ROGER GODEMENT

Généralités sur les formes modulaires, II

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 1 (1957-1958), exp. n° 8, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_1_A8_0>

20 janvier 1958

GÉNÉRALITÉS SUR LES FORMES MODULAIRES, II.

par Roger GODEMENT

Dans cet exposé le groupe Γ sera (sauf mention expresse du contraire) le groupe modulaire de Siegel $Sp(n\ ,\ \underline{Z})$ ([1]) ; on se donne un multiplicateur μ de Γ (i.e. une représentation de Γ dans un espace vectoriel complexe F_μ de dimension finie, représentation dont le noyau est d'indice fini dans Γ) et une représentation holomorphe irréductible ρ de $GL(n\ ,\ \underline{C})$ dans un espace vectoriel complexe F_ρ de dimension finie ; on notera

$$\prod \Delta_i(h)^{\alpha_i}$$

le plus haut poids de ρ (les α_i sont donc des entiers positifs pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$) . On utilisera les espaces $\mathcal{H}_\Gamma(\mu\ ;\ \rho)$, $\mathcal{H}^2_\Gamma(\mu\ ;\ \rho)$, $\mathcal{S}_\Gamma(\mu\ ;\ \rho)$, etc. définis dans l'exposé précédent, ainsi que le produit scalaire

$$\langle f\ ,\ g\rangle_\Gamma = \int_{z \bmod \Gamma} \langle \rho(y^{\frac{1}{2}})\ f(z)\ ,\ \rho(y^{\frac{1}{2}})\ g(z)\rangle\ dz =$$

$$= \int_{z \bmod \Gamma} \mathrm{Tr}(g(z)^*\ \rho(y)\ f(z))\ dz$$

où

$$dz = \det(y)^{-n-1}\ dx\ dy$$

(dx , dy mesures euclidiennes) est la mesure invariante du demi-plan de Siegel.

1. L'opérateur Φ pour les formes d'espèce $(\mu\ ;\ \rho)$.

Nous allons reprendre la définition de l'opérateur Φ donnée à l'exposé 4, pour ajouter quelques précisions qu'on n'avait pu donner à l'époque dudit exposé.

Introduisons d'abord les conventions suivantes. Soit ρ une représentation holomorphe irréductible de $GL(n\ ,\ \underline{C})$ dans un espace vectoriel complexe F_ρ de dimension finie, et choisissons un entier r , avec

$$0 \leqslant r \leqslant n\ .$$

Considérons dans $GL(n\ ,\ \underline{C})$ le sous-groupe des matrices de la forme

---

([1]) Dans les exposés de R. GODEMENT, les lettres soulignées d'un trait rectiligne ont la même signification que les lettres soulignées d'un trait ondulé dans les autres exposés de ce Séminaire : elles apparaitraient en caractères gras en typographie.

(1.1) $$\begin{pmatrix} 1_r & g_{12} \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \det(g_{22}) = 1 \quad ;$$

nous définirons

(1.2) $F_\rho^{(r)}$ = sous-espace des vecteurs $\underline{a} \in F_\rho$ tels que $\rho(g)\underline{a} = \underline{a}$ pour g de la forme (1.1).

Il est clair que

(1.2) $$F_\rho = F_\rho^{(n)} \supset F_\rho^{(n-1)} \supset \dots \supset F_\rho^{(0)} \quad ;$$

nous avons d'ailleurs vu dans l'exposé 7 (n° 4) que le vecteur $\underline{a}^+$ appartenant au plus haut poids de ρ appartient nécessairement à $F_\rho^{(r)}$ si $F_\rho^{(r)} \neq 0$ et que pour $r < n - 1$ le sous-espace $F_\rho^{(r)}$ ne peut être $\neq 0$ que si l'on a

$$\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_{n-1} = 0 \; .$$

D'autre part, on a vu aussi que $F_\rho^{(r)}$ est stable par $\rho(g)$ pour toute matrice g de la forme

(1.3) $$\begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}$$

et comme ces matrices forment un sous-groupe canoniquement isomorphe à $GL(r\, ,\, \underline{C})$ on voit que ρ définit canoniquement <u>une représentation de</u> $GL(r\, ,\, \underline{C})$ <u>dans l'espace</u> $F_\rho^{(r)}$, que nous noterons $\rho^{(r)}$ et dont nous avons prouvé qu'elle est <u>irréductible</u>.

Enfin on a aussi démontré dans l'exposé 7, n° 4 que l'on a

(1.4) $$\hat{f}(s) \in \mathrm{Hom}(F_\mu \, , \, F_\rho^{(r)}) \qquad \text{pour } s \text{ de rang } \leq r$$

si f est une forme modulaire d'espèce $(\mu \; ; \; \rho)$. On notera que ce résultat, combiné avec les relations

$$\hat{f}(usu') = \rho(u)\, \hat{f}(s)\, \mu(u')$$
$$\hat{f}(s)\, \mu(n) = \hat{f}(s) \exp(2\pi i \,\mathrm{Tr}(sn))$$

établies dans l'exposé précédent [et qu'on obtient en explicitant le comportement de f relativement au sous-groupe

$$\begin{pmatrix} u & un \\ 0 & u'^{-1} \end{pmatrix}$$

de $\Gamma = Sp(n\, ,\, \underline{Z})$] permettraient, dans le cas où $\hat{f}(s) \neq 0$, d'obtenir des restrictions concernant le multiplicateur μ ; mais nous ne nous en servirons pas pour le moment.

Pour définir l'opérateur Φ, et plus généralement les puissances successives de Φ, choisissons un entier r $(0 < r < n)$ et posons

$$z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z'_{12} & z_{22} \end{pmatrix}$$

avec z_{11} de degré r ; on sait que $\mathrm{Im}(z_{11}) \gg 0$, de sorte que z_{11} appartient au demi-plan de Siegel S_r. Dans le développement en série de Fourier de la fonction f, soit

$$f(z) = \sum \hat{f}(s) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(sz))$$

posons de même

$$s = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s'_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \quad ;$$

comme la série de Fourier de f converge absolument, on peut effectuer dans celle-ci des groupements de termes et en particulier l'écrire

$$(1.5) \qquad f(z) = \sum \hat{f}(z_{11}, z_{12}, s_{22}) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s_{22} z_{22}))$$

avec

$$(1.6) \qquad \hat{f}(z_{11}, z_{12}, s_{22}) = \sum \hat{f}\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s'_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s_{11}z_{11} + s_{12}z'_{12} + s'_{12}z_{12})) ,$$

la somme étant étendue à toutes les matrices s avec s_{22} donné. En particulier, si $s_{22} = 0$ (auquel cas on a forcément $s_{12} = 0$ pour toutes les matrices s en question, ceci parce que $s \geqslant 0$) il vient

$$\hat{f}(z_{11}, z_{12}, 0) = \sum \hat{f}\begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s_{11} z_{11}))$$

en sorte que la terme "constant", i.e. indépendant de z_{22}, de la série (1.5) est fonction de z_{11} uniquement, et peut être considéré comme <u>une application holomorphe du demi-plan de Siegel</u> S_r <u>dans l'espace</u> $\mathrm{Hom}(F_\mu, F_\rho^{(r)})$ en vertu de la relation (1.4) ; nous poserons alors

$$(1.7) \qquad \Phi^{(n-r)} f(z) = \hat{f}(z, \ , 0) = \sum \hat{f}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(sz))$$

pour $z \in S_r$, la sommation étant étendue à toutes les matrices $s \geqslant 0$ de degré r (il est commode de définir $\hat{f}(s)$ pour <u>toute</u> matrice $s = s'$ en convenant que

$\hat{f}(s) = 0$ si s n'intervient pas effectivement dans la série de Fourier de f) ; on a donc la formule

$$(1.8) \quad f(z) = \Phi^{(n-r)} f(z_{11}) + \sum_{s_{22} \neq 0} \hat{f}(z_{11}, z_{12}, s_{22}) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s_{22} z_{22}))$$

pour $z \in S_n$.

Montrons maintenant que $\Phi^{(n-r)} f$ est une forme automorphe pour le groupe $Sp(r , \underline{Z})$; on pourrait, comme dans l'exposé 4, procéder par passage à la limite en faisant grandir indéfiniment la composante z_{22} de $z \in S_n$; mais on peut aussi adopter le point de vue suivant.

L'existence pour $f(z) = f(z_{11}, z_{12}, z_{22})$ d'un développement en série de la forme (1.8) provient en effet de la pseudo-périodicité par rapport à z_{22} ; par suite les coefficients figurant dans (1.8) s'obtiennent par intégration. De façon précise, considérons dans $Sp(n , \underline{Z})$ le sous-groupe formé des translations de la forme

$$(z_{11} , z_{12} , z_{22}) \longrightarrow (z_{11} , z_{12} , z_{22} + a_{22})$$

où a_{22} est une matrice symétrique entière arbitraire de degré $n - r$; le multiplicateur μ de $Sp(n , \underline{Z})$ induit une représentation

$$a_{22} \longrightarrow \mu(a_{22})$$

du groupe additif de ces matrices, dans l'espace F_μ , et celle-ci se décompose en représentations irréductibles de degré 1, donc de la forme

$$a_{22} \longrightarrow \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s_{22} a_{22}))$$

avec s_{22} symétrique réelle (et en fait rationnelle) ; pour chaque matrice s_{22} symétrique réelle, désignons par $\hat{\mu}(s_{22})$ l'opérateur de projection orthogonale (dans F_μ) sur le sous-espace des éléments $\underline{b}$ de F_μ qui vérifient

$$\mu(a_{22})\underline{b} = \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s_{22} a_{22}))\underline{b} \quad ;$$

on a donc

$$\mu(a_{22}) = \sum_{s_{22} \bmod 1} \hat{\mu}(s_{22}) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s_{22} a_{22}))$$

(ceci est la formule de "décomposition spectrale" pour la représentation μ du groupe discret des a_{22} ; on s'excuse d'employer un langage aussi savant, mais on ne voit pas pourquoi on utiliserait, pour des espaces de Hilbert de dimension finie, un autre langage que pour les espaces de Hilbert de dimension infinie ...). Cela dit, le fait que f soit une forme modulaire d'espèce $(\mu ; \rho)$ implique en particulier la relation

$$(1.9) \qquad f(z_{11}\ ,\ z_{12}\ ,\ z_{22} + a_{22}) = f(z_{11}\ ,\ z_{12}\ ,\ z_{22})\ \mu(a_{22})^{-1}$$

d'où résulte immédiatement que

$$(1.10) \quad \hat{f}(z_{11}, z_{12}, s_{22}) = \int_{x_{22} \bmod 1} f(z_{11}, z_{12}, z_{22})\ \hat{\mu}(s_{22}) \exp(-2\pi i\ \mathrm{Tr}(s_{22}\ z_{22}))\, dx_{22}$$

et en particulier

$$(1.11) \qquad \Phi^{(n-r)} f(z_{11}) = \int_{x_{22} \bmod 1} f(z_{11}, z_{12}, z_{22})\ \hat{\mu}(0)\ dx_{22} \quad ;$$

comme d'ailleurs il est certain que le résultat ne dépend pas de z_{12} on peut aussi bien écrire

$$(1.12) \qquad \Phi^{(n-r)} f(z_{11}) = \int_{x_{22} \bmod 1} f(z_{11}, 0, z_{22})\ \hat{\mu}(0)\ dx_{22}\ .$$

Prenons alors une substitution modulaire

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} \\ c_{11} & d_{11} \end{pmatrix} \in Sp(r\ ,\ \underline{Z})$$

et associons-lui dans $Sp(n\ ,\ \underline{Z})$ son image M par l'application

$$a_{11} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix},\ \ldots \quad ;$$

il est clair que

$$M\begin{pmatrix} z_{11} & 0 \\ 0 & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}\ z_{11} & 0 \\ 0 & z_{22} \end{pmatrix} \quad ;$$

par suite, en posant

$$z = \begin{pmatrix} z_{11} & 0 \\ 0 & z_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ,$$

il vient la relation

$$\begin{aligned} \Phi^{(n-r)} f(M_{11}\ z_{11}) &= \int_{x_{22} \bmod 1} f(Mz)\ \hat{\mu}(0)\ dx_{22} \\ &= \int_{x_{22} \bmod 1} \rho(cz + d)\ f(z)\ \mu(M)^{-1}\ \hat{\mu}(0)\ dx_{22} \quad ; \end{aligned}$$

or

$$cz + d = \begin{pmatrix} c_{11}\ z_{11} + d_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne dépend pas de x_{22} ; d'autre part, les matrices M de la forme considérée commutent évidemment aux translations $z_{22} \to z_{22} + s_{22}$, de sorte que $\mu(M)$ commute à $\hat{\mu}(0)$; par suite il vient

(1.13) $\Phi^{(n-r)} f(M_{11}\, z_{11}) = \rho^{(r)}(c_{11}\, z_{11} + d_{11})\, \Phi^{(n-r)} f(z_{11})\, \mu(M_{11})^{-1}$

où $\rho^{(r)}$ est la représentation de $GL(r\,,\,\underline{C})$ dans $F_\rho^{(r)}$ définie au début du présent numéro, et où l'on pose

$$\mu(M_{11}) = \mu(M)$$

de sorte que $M_{11} \to \mu(M_{11})$ est le multiplicateur de $Sp(r\,,\,\underline{Z})$ déduit de l'injection canonique $Sp(r\,,\,\underline{Z}) \to Sp(n\,,\,\underline{Z})$.

La formule (1.13) démontre évidemment le résultat annoncé, à savoir que $\Phi^{(n-r)} f$ est une forme modulaire relative au multiplicateur μ de $Sp(r\,,\,\underline{Z})$ et à la représentation (holomorphe et irréductible) $\rho^{(r)}$ de $GL(r\,,\,\underline{C})$ dans le sous-espace $F_\rho^{(r)}$ de F_ρ . On remarquera qu'en général la représentation $\rho^{(r)}$ est de dimension strictement plus petite que la représentation ρ de $GL(n\,,\,\underline{C})$; cela suggère que, dans la "compactification de Satake" de l'espace quotient $S_n/Sp(n\,,\,\underline{Z})$, les formes modulaires d'espèce $(\mu\,;\,\rho)$ correspondent à des sections holomorphes d'une variété fibrée présentant des "fibres exceptionnelles" (i.e. de dimension plus petite que la fibre "générique"), placées au-dessus des points à l'infini de la variété compacte en question. On reviendra peut-être sur cette question par le suite, i.e. après que la compactification de Satake aura été étudiée en détail.

L'essentiel pour le moment est de remarquer que l'opérateur $\Phi = \Phi^{(1)}$ applique linéairement les formes d'espèce $(\mu\,;\,\rho)$ pour $Sp(n\,,\,\underline{Z})$ dans les formes d'une certaine espèce pour $Sp(n-1\,,\,\underline{Z})$, et a pour noyau exactement l'ensemble des Spitzenformen d'espèce $(\mu\,;\,\rho)$ pour $Sp(n\,,\,\underline{Z})$; ce résultat permet d'effectuer certaines démonstrations en raisonnant par récurrence sur n .

2. Fonctions-noyaux modulo Γ .

Les définitions de ce numéro s'appliquent à tout sous-groupe discret Γ de $Sp(n\,,\,\underline{R})$ (et même à tout groupe discontinu de tout espace symétrique complexe).

Soit $\mathfrak{F}$ un sous-espace fermé de $\mathcal{H}^2_\Gamma(\mu\,;\,\rho)$. Les éléments de $\mathfrak{F}$ sont des fonctions $f(z)$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(F_\mu\,,\,F_\rho)$, espace que l'on a muni dans l'exposé précédent du produit scalaire

(2.1) $$\langle u\,,\,v\rangle = \mathrm{Tr}(uv^*)$$

(l'application $v \to v^*$ de $\mathrm{Hom}(F_\mu\,,\,F_\rho)$ dans $\mathrm{Hom}(F_\rho\,,\,F_\mu)$ étant définie à l'aide de produits scalaires sur F_μ et F_ρ , produits scalaires adaptés à μ et ρ respectivement). Cela dit, il est clair que pour tout point z du demi-plan de Siegel et tout $u \in \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$ l'expression

$$f \longrightarrow \langle f(z) , u \rangle = \mathrm{Tr}(f(z)u^*)$$

est une forme linéaire continue sur $\mathcal{F}_\rho$, et même sur $\mathcal{L}^2_\Gamma(\mu ; \rho)$. Donc il y a un élément $k_{z;u} \in \mathcal{F}_\rho$ et un seul tel que l'on ait

(2.2) $$\mathrm{Tr}(f(z)u^*) = \langle f , k_{z;u} \rangle_\Gamma \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{F}_\rho \quad ;$$

pour ζ donné, l'expression

$$k_{z;u}(\zeta) \in \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$$

est fonction linéaire de u ; on peut donc écrire

(2.3) $$k_{z;u}(\zeta) = K_\Gamma^{\mathcal{F}_\rho}(\zeta ; z)u$$

avec un élément

(2.4) $$K_\Gamma^{\mathcal{F}_\rho}(\zeta ; z) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho) , \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho))$$

qui est évidemment fonction holomorphe de ζ et de $\bar{z}$. La relation (2.2) s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(f(z)u^*) &= \int_{\zeta \bmod \Gamma} \mathrm{Tr}(\rho(\eta)\, f(\zeta)\, k_{z;u}(\zeta)^*)\, d\zeta \\
&= \int_{\zeta \bmod \Gamma} \langle \rho(\eta)\, f(\zeta) , k_{z;u}(\zeta) \rangle\, d\zeta \\
&= \int_{\zeta \bmod \Gamma} \langle \rho(\eta)\, f(\zeta) , K_\Gamma^{\mathcal{F}_\rho}(\zeta ; z)\, u \rangle\, d\zeta \\
&= \int_{\zeta \bmod \Gamma} \langle K_\Gamma^{\mathcal{F}_\rho}(\zeta ; z)^*\, \rho(\eta)\, f(\zeta) , u \rangle\, d\zeta \\
&= \int_{\zeta \bmod \Gamma} \mathrm{Tr}(K_\Gamma^{\mathcal{F}_\rho}(\zeta ; z)^*\, \rho(\eta)\, f(\zeta)u^*)\, d\zeta
\end{aligned}$$

et comme $u \in \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$ est arbitraire il vient

(2.5) $$\boxed{f(z) = \int_{\zeta \bmod \Gamma} K_\Gamma^{\mathcal{F}_\rho}(\zeta ; z)^*\, \rho(\eta)\, f(\zeta)\, d\zeta}$$

noter que l'adjoint de

$$K_\Gamma^{\mathcal{F}_\rho}(\zeta ; z) : \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$$

est défini à l'aide de la structure hilbertienne de $\mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$.

La formule (2.5) permet d'appeler $K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(z_1 , z_2)$ la <u>fonction noyau</u> de $\mathfrak{F}$, et elle possède toutes les propriétés formelles qui appartiennent aux fonctions noyaux usuelles (i.e. à valeurs scalaires) ; en particulier si l'on applique la formule (2.5) à la fonction $f = k_{z;u}$ il vient

$$(2.6) \qquad K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(z_1 , z_2)u = \int_{z \bmod \Gamma} K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(z , z_1)^* \rho(y) K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(z , z_2)u.dz$$

pour tout $u \in \mathrm{Hom}(F_{\mu} , F_{\rho})$, ce qui met en évidence la propriété "reproduisante" de la fonction noyau, ainsi que la symétrie hermitienne positive de $K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(z_1 , z_2)$.

Comme $K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(z_1 , z_2)u = k_{z_2;u}(z_1)$ est une forme automorphe d'espèce $(\mu ; \rho)$ pour tout $u \in \mathrm{Hom}(F_{\mu} , F_{\rho})$ on a pour $M \in \Gamma$ la relation

$$K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(Mz_1 , z_2)u = \rho(cz_1 + d) K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(z_1 , z_2)u \, \mu(M)^{-1} \quad ;$$

pour interpréter cette relation, on remarque que

$$\mathrm{Hom}(E , \mathrm{Hom}(F_{\mu} , F_{\rho})) \cong \mathrm{Hom}(E \otimes F_{\mu} , F_{\rho}) ,$$

pour tout espace vectoriel E , est canoniquement muni d'une structure de module à <u>droite</u> sur $\mathrm{Hom}(F_{\mu} , F_{\mu})$ et à <u>gauche</u> sur $\mathrm{Hom}(F_{\rho} , F_{\rho})$; ceci dit, et prenant $E = \mathrm{Hom}(F_{\mu} , F_{\rho})$, la relation précédente s'écrit

$$(2.7) \qquad K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(Mz_1 , z_2) = \rho(cz_1 + d) K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(z_1 , z_2) \mu(M)^{-1} \quad (M \in \Gamma) .$$

Comme d'autre part

$$K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(z_1 , z_2)^* = K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(z_2 , z_1)$$

on a aussi la relation

$$(2.8) \qquad K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(z_1 , Mz_2) = \mu(M) K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(z_1 , z_2) \rho(cz_2 + d)^* \quad (M \in \Gamma) ;$$

cette fois, on tient compte du fait que $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(F_{\mu} , F_{\rho}) , E)$ est un module <u>à gauche</u> sur $\mathrm{Hom}(F_{\mu} , F_{\mu})$ et <u>à droite</u> sur $\mathrm{Hom}(F_{\rho} , F_{\rho})$; et en combinant les deux résultats précédents on trouve la formule

$$(2.10) \qquad \boxed{K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(M_1 z_1 , M_2 z_2) = \rho(c_1 z_1 + d_1) \mu(M_2) K_{\Gamma}^{\mathfrak{F}}(z_1 , z_2) \mu(M_1)^* \rho(c_2 z_2 + d_2)^*}$$

on laisse au lecteur le soin d'interpréter les opérations de multiplication qui figurent dans (2.10) , par exemple en consultant CARTAN-EILENBERG [1] .

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> $\mathfrak{F}$ <u>un sous-espace</u> fermé <u>de</u> $\mathcal{H}_{\Gamma}^{2}(\mu ; \rho)$; <u>supposons le domaine fondamental de</u> Γ <u>de volume</u> fini, <u>et</u> $\mathfrak{F}$ <u>contenu dans le sous-espace</u> $\mathcal{H}_{\Gamma}^{\infty}(\mu ; \rho)$ <u>de</u> $\mathcal{H}_{\Gamma}^{2}(\mu ; \rho)$. <u>Alors</u> $\mathfrak{F}$ <u>est de dimension finie</u>.

Identifions chaque fonction $f \in \mathcal{H}^2(\mu;\rho)$ à la fonction (non analytique) $\rho(y^{1/2})\ f(z)$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$; celle-ci est de carré sommable modulo Γ pour la mesure dz , et la relation (2.5) montre alors que les éléments de $\mathfrak{F}$ sont fixes par l'opérateur intégral défini par le noyau

$$H(z_1 , z_2) = \rho(y_1^{1/2})\ K_\Gamma^{\mathfrak{F}}(z_1 , z_2)\ \rho(y_2^{1/2}) \quad ;$$

pour établir le théorème, il suffit donc d'établir que ce noyau est du type HILBERT-SCHMIDT ; vu (2.6) il suffit d'ailleurs de prouver que la fonction $H(z , z)$ est intégrable modulo Γ , et puisque le domaine fondamental de Γ est de volume fini, il suffit d'établir que la fonction

$$H(z , z) = \rho(y^{1/2})\ K_\Gamma^{\mathfrak{F}}(z , z)\ \rho(y^{1/2})$$

est bornée. Pour ce faire il suffit d'établir que, pour tout $u \in \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$, la fonction

$$\begin{aligned}\langle H(z , z)\ u , u\rangle &= \langle K_\Gamma^{\mathfrak{F}}(z , z)\ \rho(y^{1/2})\ u , \rho(y^{1/2})\ u\rangle \\ &= \langle k_{z;\,\rho(y^{1/2})u}(z) , \rho(y^{1/2})u\rangle \qquad \text{d'après (1.3)} \\ &= \langle k_{z;\,\rho(y^{1/2})u} , k_{z;\,\rho(y^{1/2})u}\rangle_\Gamma \qquad \text{d'après (1.2)}\end{aligned}$$

est bornée ; autrement dit, tout revient à montrer que, pour u donné, l'ensemble des éléments de $\mathfrak{F}$ de la forme $k_{z;\,\rho(y^{1/2})u}$ est borné pour la topologie forte de $\mathfrak{F}$; mais comme le sous-espace $\mathfrak{F}$ de $\mathcal{H}_\Gamma^2(\mu;\rho)$ est fermé et donc complet, il suffit d'établir que cet ensemble est borné pour la topologie faible de $\mathfrak{F}$, autrement dit que pour tout $f \in \mathfrak{F}$, la fonction

$$z \longrightarrow \langle f , k_{z;\,\rho(y^{1/2})u}\rangle_\Gamma = \langle \rho(y^{1/2})\ f(z) , u\rangle$$

est bornée ; mais cela résulte de l'hypothèse que $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}_\Gamma^\infty(\mu;\rho)$, de sorte que le théorème est démontré.

REMARQUE 1. - La méthode utilisée pour démontrer le théorème 1 ne repose pas (malgré les apparences) sur le fait qu'il s'agisse de fonctions holomorphes ; on a en effet le résultat suivant (qu'on énonce pour des fonctions numériques, mais qui s'étend trivialement aux sections d'un espace fibré par exemple) : soient X un espace localement compact, μ une mesure positive de masse totale finie sur X, et H un sous-espace fermé de $L^2(\mu)$; supposons $H \subset L^\infty(\mu)$; alors H est de dimension finie. Voici la démonstration de ce résultat. Tout d'abord on sait (théorème de Stone-Kakutani) que l'espace $L^\infty(X ; \mu)$ est isomorphe, comme algèbre normée, à l'espace des fonctions continues sur un espace compact $\hat{X}$, et que $L^2(X ; \mu)$ est isomorphe à $L^2(\hat{X} ; \hat{\mu})$, où $\hat{\mu}$ est une mesure positive sur $\hat{X}$ telle que toute fonction bornée et mesurable pour $\hat{\mu}$ soit presque partout égale à une fonction continue bien déterminée. Ceci permet de se ramener au cas où H est composé uniquement de fonctions continues et où l'espace X est compact. Ceci fait, et deux fonctions continues égales presque partout étant identiques, chaque $x \in X$ définit sur H une forme linéaire $f \to f(x)$; pour montrer que cette forme linéaire est continue il suffit de prouver que l'injection $H \to L^\infty(X ; \mu)$ est continue (H étant muni de la topologie L^2) ; pour cela on applique le théorème de Banach (graphe fermé), ce qui est permis car H est fermé dans L^2 et donc complet, ce qui donne immédiatement le résultat cherché. On peut donc écrire $f(x) = \langle f , k_x \rangle$ avec $k_x \in H$ bien déterminé ; d'où pour les $f \in H$ l'équation intégrale $f(x) = \int \overline{k_x(y)}\, f(y)\, dy$; il reste à prouver que le noyau $k(x , y) = \overline{k_x(y)}$ est du type de Hilbert-Schmidt i.e. que $\int \langle k_x , k_x \rangle\, dx < + \infty$, et pour cela il suffit de faire voir que

$$\sup_{x \in X} \| k_x \|_2 < + \infty \quad ;$$

mais comme la fonction $x \to \langle f , k_x \rangle = f(x)$ est bornée pour tout $f \in H$ le résultat cherché résulte d'un théorème classique (dans un espace de Banach, tout ensemble faiblement borné est fortement borné).

Indiquons que le résultat précédent est encore valable, d'après A. GROTHENDIEK, si l'on remplace L^2 par un espace L^p avec $1 < p < + \infty$; mais; la démonstration est plus compliquée.

Il faut aussi remarquer que l'hypothèse que μ est de masse totale finie est indispensable ; contre exemple : $X = \underline{R}$, $d\mu(x) = dx$ et on prend pour $H \subset L^2(dx)$ l'ensemble des fonctions dont la transformée de Fourier est nulle en dehors d'un intervalle compact donné ; la transformée de Fourier d'une $f \in H$ étant de carré sommable est alors sommable puisque nulle en dehors d'un compact, de sorte que f est presque partout égale à une fonction continue et bornée ; on a donc bien $H \subset L^{\infty}(dx)$; que H soit fermé dans $L^2(dx)$, et de dimension infinie, est évident.

REMARQUE 2. - Il va de soi que le résultat contenu dans le théorème 1 est loin de satisfaire le rédacteur du présent exposé. Tout d'abord on aimerait pouvoir démontrer que

$$\dim \mathcal{H}^2_{\Gamma}(\mu ; \rho) < +\infty$$

dans l'hypothèse où le domaine fondamental de Γ est de volume fini (ce résultat est naturellement bien connu pour $n = 1$, modulo le fait que les groupes Γ ayant un domaine fondamental de volume fini sont justement les "groupes fuchsiens de première espèce", i.e. ceux qu'on obtient en uniformisant une courbe algébrique munie d'une signature donnée). D'autre part, il ne faut pas se dissimuler que le point de vue consistant à examiner uniquement des fonctions automorphes analytiques complexes est beaucoup trop étroit à de nombreux points de vue ; si l'on veut extraire de la situation "groupe discontinu opérant dans un espace symétrique" le maximum de possibilités on est conduit au problème général que voici.

Soient G un groupe de Lie semi-simple ayant une représentation linéaire fidèle (cette dernière hypothèse a pour but d'éviter certaine difficultés; rappelons qu'elle implique que le centre de G est fini), K un sous-groupe compact maximal de G, et $Z(G)$ l'ensemble des opérateurs différentiels sur G qui commutent aux translations à gauche et à droite, i.e. aux applications de la forme $g \longrightarrow g_1\, g\, g_2$; on sait que $Z(G)$ est une algèbre commutative, admettant un système de générateurs algébriquement indépendants en nombre égal au rang de G (théorème de Chevalley ; il est facile, par la théorie des invariants, de voir que $Z(G)$ admet un système fini de générateurs, mais le résultat complet est nettement moins trivial !). Cela étant, donnons-nous d'une part un sous-groupe discret Γ de G tel que G/Γ soit de volume fini, d'autre part une représentation irréductible ρ de K dans un espace E_{ρ} de dimension finie. Alors le problème, auquel on a fait allusion plus haut, consiste à étudier les fonctions $\varphi(g)$ qui possèdent les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} &(a) \;:\quad \varphi(kg\gamma) = \rho(k)\,\varphi(g) \\ &(b) \;:\quad D(\varphi) = \lambda(D).\,\varphi \quad \text{pour } D \in Z(G)\,, \end{aligned}$$

les "valeurs propres" $\lambda(D)$ étant données à l'avance (on suppose bien entendu que $D \longrightarrow \lambda(D)$ est un homomorphisme de $Z(G)$ dans le corps complexe ; rappelons que

HARISH-CHANDRA a donné un procédé explicite [2] pour déterminer <u>tous</u> ces homomorphismes, et même pour trouver <u>des</u> solutions de (b) quel que soit λ).

On pourrait aussi bien entendu introduire dans (a) un multiplicateur pour Γ (mais ce ne serait pas sérieux, car en remplaçant Γ par un sous-groupe d'indice fini on ferait disparaître le dit multiplicateur !).

Dans la pratique on constate que pour éviter des circonstances pathologiques il faut toujours imposer aux fonctions φ une condition concernant leur "comportement à l'infini" dans G/Γ ; la nature exacte de la condition à imposer dans le cas général n'est d'ailleurs pas encore connue. Le <u>premier pas</u> à faire serait l'étude des solutions de (a) et (b) qui sont <u>de carré sommable</u> modulo Γ; la question revient alors essentiellement à étudier les composantes irréductibles <u>discrètes</u> de la représentation unitaire évidente de G dans $L^2(G/\Gamma)$; une composante donnée peut-elle être répétée une <u>infinité</u> de fois dans $L^2(G/\Gamma)$?

Supposons que G/K admette une structure <u>complexe</u> ; alors les solutions <u>holomorphes</u> (au sens de G/K) de (a) correspondent, comme il est facile de le voir, à un système (b) avec un λ <u>bien déterminé</u> (les conditions d'holomorphie s'expriment par des équations différentielles ...). C'est pourquoi le problème général contient fatalement la théorie usuelle des fonctions automorphes.

Dans le cas où $G = Sp(1, \underline{R})$ le problème général a été étudié par MAAS, ROELCKE et SELBERG ; les travaux de ces auteurs démontrent surabondament que ce problème est aussi peu pathologique qu'on peut l'espérer. Bien que ces auteurs ne fassent pas allusion aux travaux de HARISH-CHANDRA, il est parfaitement clair qu'on ne pourra pas continuer longtemps à s'en passer ... à moins de se mettre dans la situation peu confortable qui consisterait à les reconstituer dans chaque cas particulier !

Dans le cas $Sp(n, \underline{R})/Sp(n, \underline{Z})$ le premier pas à effectuer consisterait à étudier (a) et (b) en prenant $G = Sp(n, \underline{R})$, et pour Γ le groupe des <u>translations entières</u> (ceci afin d'avoir des informations sur les développements en série de

---

[2] La méthode est la suivante : on écrit (MOSTOW-IWASAWA) $G = K.T$ où T est un sous-groupe <u>résoluble</u> de G, tel que $K \cap T = \{e\}$; soit $t \longrightarrow \alpha(t)$ un caractère de T (homomorphisme de T dans C^*) ; alors la fonction $\varphi(g)$ donnée par $\varphi(kt) = \rho(k)\ \alpha(t)$ vérifie $\varphi(kg) = \rho(k)\ \varphi(g)$; c'est trivial, et vérifie (b), c'est aussi trivial ; ce qui n'est pas trivial est de prouver qu'en choisissant convenablement α on obtient dans (b) <u>tout</u> homomorphisme λ de Z(G) dans $\underline{C}$.

Fourier des solutions de (a) et (b), ainsi qu'on le fait pour les fonctions holomorphes) ; dans ce cas, G/Γ n'est évidemment pas de volume fini ; cependant, pour $n = 1$, on constate facilement (MAAS ou calcul direct trivial) que pour $\rho(k) = 1$, ce qui revient à dire qu'on étudie dans le demi-plan de Poincaré les fonctions $\varphi(z)$ vérifiant

$$\varphi(z+1) = \varphi(z) \quad , \quad y^2(\varphi''_{xx} + \varphi''_{yy}) = \lambda\varphi \ ,$$

on trouve comme solutions "simples" de (a) et (b) les fonctions de la forme

$$y^{\frac{1}{2}}.B(2\pi|q|y)\exp(2\pi iqx) \ ,$$

où B est une <u>fonction de Bessel</u> si $\lambda \neq 0$ (le cas $\lambda = 0$ correspond aux fonction holomorphes) et si $q \neq 0$; pour $q = 0$ on trouve au contraire les fonctions de la forme

$$ay^s + by^{1-s}$$

si $\lambda = -s(1-s)$. Autrement dit, toute solution "périodique" de l'équation

$$-\Delta\varphi = s(1-s)\varphi \qquad s \neq 0, 1 \ ,$$

où Δ est le laplacien du demi-plan, se développe en une série de Fourier de la forme

$$\varphi(z) = ay^s + by^{1-s} + \sum_{q\neq 0} a_q\, y^{\frac{1}{2}} B_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|q|y)\, e^{2\pi iqx}$$

où B_ν désigne une fonction de Bessel d'indice ν ; si de plus l'on impose à $\varphi(z)$ de vérifier

$$\varphi(x+iy) = O(y^k) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1 \ , \ y \longrightarrow +\infty) \ ,$$

i.e. de ne pas croître trop vite à l'infini, les fonctions de Bessel qui interviennent dans le problème sont les fonctions $K_{s-\frac{1}{2}}$ dans la notation classique, fonctions données, comme l'on sait, par les intégrales suivantes (le rédacteur se borne ici à reproduire MAGNUS-OBERHETTINGER [2], p. 39) :

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}\,(\frac{z}{2})^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{ch}(\nu t)\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,(\frac{z}{2})^{\nu}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} (\operatorname{sh} t)^{2\nu}\, dt$$

$$= \frac{z^{\nu}}{2} \int_0^{\infty} e^{-(t+z^2 t^{-1})/2}\, t^{-\nu-1}\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, \frac{e^{-z}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{t}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,(2z)^{\nu}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{t^2+z^2}}}{\sqrt{t^2+z^2}}\, t^{2\nu} dt$$

$$= \frac{(2z)^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{(t^2+z^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}\, dt$$

$$= \frac{1}{\cos(\frac{\pi\nu}{2})} \int_0^{\infty} \cos(z \operatorname{sh} t)\, \operatorname{ch}(\nu t)\, dt \ .$$

Bien entendu ces représentations intégrales ne sont pas toutes valables dans les même conditions.

Qoiqu'il en soit on peut considérer comme non trivial le problème consistant à étendre ces formules mystérieurse au demi-plan de Siegel. L'avant-dernière se généralise facilement et conduit dans le demi-plan de Siegel S_n aux fonctions

$$\varphi(z) = f(y^{\frac{1}{2}} q y^{\frac{1}{2}}) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(qx))$$

où q est une matrice symétrique réelle (demi-entière si l'on veut une fonction invariante par les translations entières) et où

(2.11) $$f(y) = \det(y)^{-s+\frac{n+1}{2}} \int \det(1+x^2)^{-s} \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(yx))\, dx$$

l'intégrale étant étendue à l'espace des matrices $x = x'$ réelles, et convergent absolument pour

$$\Re(s) > \frac{n}{2} \ ,$$

comme on le verra dans l'exposé 10 . Mais bien entendu il doit y avoir beaucoup d'autre solutions du problème que les fonctions précédentes ; une méthode générale pour en construire s'obtient comme suit : tout d'abord on remarque, c'est trivial, que toute fonction

$$\alpha(z) = \prod_{i=1}^{i=n} \Delta_i(\mathrm{Im}(z))^{s_i}$$

(les $\Delta_i(g)$ sont, comme d'habitude, les mineurs principaux de la matrice g) vérifie le système (b) , et d'ailleurs (ceci est moins trivial, c'est l'un des résultats que l'on doit à HARISH-CHANDRA) qu'en faisant varier les paramètres complexes s_i on obtient tous les systèmes de valeurs propres $\lambda(D)$ possibles dans (b) . Ceci dit, on a encore des solutions de (b) en transformant la fonction précédente par une matrice symplectique ; en considérant alors

$$\int \alpha(M(z + \xi)) \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(q\,\xi))\, d\xi \qquad (q = q' \text{ réelle})$$

avec $M \in Sp(n, \underline{R})$ choisie de façon à rendre convergente l'intégrale précédente, qui est étendue aux matrices $\xi = \xi'$ réelles, ce qui probablement impose des limitations aux s_i , on trouvera forcément une solutions du système (b) qui est de la forme

$$f(y) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(qx)) .$$

Il resterait à savoir si cette méthode (combinée éventuellement avec un prolongement analytique par rapport aux paramètres s_i) conduit à toutes les solutions "raisonnables", i.e. ne croissant pas trop vite à l'infini, du système (a) et (b) pour ρ = identité, Γ = groupe des translations entières. C'est naturellement par ce procédé que le rédacteur a obtenu (2.11) : prendre

$$\alpha(z) = \det(y)^s \quad , \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

avec $c = c'$ inversible.

3. Applications au groupe modulaire de Siegel.

On désigne dans ce numéro par Γ le groupe modulaire de Siegel.

Soit une fonction $f \in \mathcal{H}^2_\Gamma(\mu\,;\rho)$, et écrivons sa série de Fourier

$$f(z) = \sum_{s \geq 0} \hat{f}(s) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(sz)) \quad ;$$

vu la formule

$$\hat{f}(s) = \int_{x \bmod 1} f(z)\, \hat{\mu}(s) \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(sz))\, dx$$

il est clair que l'application $f \longrightarrow \hat{f}(s)$ de $\mathcal{H}^2_\Gamma(\mu\,;\rho)$ dans $\mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$

est <u>continue</u> ; par suite, le sous-espace $\mathcal{S}_\Gamma(\mu\,;\,\rho)$ des Spitzenformen, défini par la condition

$$\hat{f}(s) = 0 \quad \text{si} \quad \mathrm{rg}(s) < n ,$$

est fermé dans $\mathcal{H}^2_\Gamma(\mu\,;\,\rho)$; mais il est aussi contenu dans $\mathcal{H}^\infty_\Gamma(\mu\,;\,\rho)$ comme on l'a vu dans l'exposé précéd nt ; donc

$$\dim \mathcal{S}_\Gamma(\mu\,;\,\rho) < +\infty \ .$$

Comme l'opérateur Φ (n° 1) a pour noyau <u>exactement</u> $\mathcal{S}_\Gamma(\mu\,;\,\rho)$ on obtient donc, en raisonnement par récurrence sur n, le résultat suivant :

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> Γ <u>le groupe modulaire de Siegel</u> ; <u>alors l'espace</u> $\mathcal{H}_\Gamma(\mu\,;\,\rho)$ <u>est de dimension finie pour tout multiplicateur</u> μ <u>de</u> Γ <u>et pour toute représentation holomorphe</u> ρ <u>de</u> $GL(n\,,\,\underline{C})$.

On trouvera dans KOECHER [3] une démonstration plus simple du théorème 2 , qui a l'avantage de donner explicitement une borne supérieur pour la dimension de $\mathcal{H}_\Gamma(\mu\,;\,\rho)$, au moins pour ρ de dimension 1. Il faut remarquer que, <u>même pour</u> $n = 1$, on n'a pas de démonstration du th. 2 qui n'utilise, d'une façon ou d'une autre, la structure du groupe discontinu Γ ; il y a là une situation absolument choquante.

REMARQUE 1 . - Le théorème 3 contient bien entendu les théorèmes de finitude analogues relatifs aux groupes commensurables à Γ ; on le voit comme suit. Soit Γ' un groupe commensurable à Γ , et soient μ' un multiplicateur de Γ' , et ρ unereprésentation holomorphe de $GL(n\,,\,\underline{C})$; il s'agit de prouver que

$$\dim \mathcal{H}_{\Gamma'}(\mu'\,;\,\rho) < +\infty \ .$$

Comme μ' a pour noyau un sous-groupe d'indice fini dans Γ' , et comme Γ' est commensurable à Γ , il existe évidemment un groupe

$$\Gamma_0 \subset \Gamma \cap \Gamma'$$

invariant et d'indice fini dans Γ et Γ' à la fois, et tel que μ' soit trivial sur Γ_0 ; comme on a visiblement

$$\mathcal{H}_{\Gamma'}(\mu'\,;\,\rho) \subset \mathcal{H}_{\Gamma_0}(\rho)$$

tout revient à prouver que $\mathcal{H}_{\Gamma_0}(\rho)$ est de dimension finie pour tout sous-groupe Γ_0 de Γ , invariant et d'indice fini dans Γ .

Or considérons une fonction $f \in \mathcal{M}_{\Gamma_0}(\rho)$; on sait (Exposé 7 n° 1) qu'il existe un multiplicateur μ_f de Γ , trivial sur Γ_0 , une forme modulaire $u_f \in \mathcal{M}_\Gamma(\mu_f ; \rho)$, et un vecteur $\underline{a}_f \in F_{\mu_f}$, tels que l'on ait

$$f(z) = u_f(z)\, \underline{a}_f ;$$

de plus, la construction de μ_f donnée dans l'exposé 7 , n° 1 , montre que l'on peut supposer la représentation μ_f de Γ monogène (3) (en l'espèce, les transformés du vecteur $\underline{a}_f$ par les opérateurs $\mu_f(M)$, $M \in \Gamma$, engendrent l'espace vectoriel F_{μ_f}).

Comme on sait déjà que l'espace $\mathcal{M}_\Gamma(\mu ; \rho)$ est de dimension finie pour tout multiplicateur μ de Γ , il suffit donc d'établir que les classes de multiplicateurs monogènes de Γ triviales sur Γ_0 sont en nombre fini ; mais celles-ci correspondant biunivoquement aux classes de représentations monogènes du groupe fini Γ/Γ_0 , le résultat qu'on avait en vue est établi.

En conclusion, le théorème 3 s'applique à tout sous-groupe de $Sp(n , \underline{R})$ commensurable à $Sp(n , \underline{Z})$.

On laisse au lecteur le soin de déduire directement le théorème 3 du théorème 2 dans le cas général.

REMARQUE 2. - Il y a lieu de croire que l'on pourra déduire aussi le théorème 3 des résultats qui seront exposés plus tard sur la "compactification de Satake" de l'espace S_n/Γ , et des théorèmes de finitude pour les variétés algébriques complètes.

4. Cas de nullité de $\mathcal{M}_\Gamma(\mu ; \rho)$.

Soit Γ le groupe modulaire de Siegel ; nous allons prouver que $\mathcal{M}_\Gamma(\mu ; \rho) = 0$ si le paramètre α_n de ρ est inférieur à une certaine limite ; ce résultat nous redonnera le fait établi dans l'exposé 4, à savoir que toute forme modulaire

(3) Une représentation linéaire $M \longrightarrow \mu(M)$ d'un groupe Γ dans un espace vectoriel F_μ de dimension finie est dite monogène s'il existe un vecteur $\underline{a} \in F_\mu$ tel que F_μ soit le plus petit sous-espace invariant de F_μ contenant $\underline{a}$, i.e. si les $\mu(M)\underline{a}$ engendrent F_μ . Si Γ est fini d'ordre q , on a alors nécessairement $\dim(F_\mu) \leq q$, et μ est contenue dans la représentation "régulière" de Γ .

de poids $k < 0$ est identiquement nulle.

Prenons une forme $f \in \mathcal{H}_r(\mu ; \rho)$ et supposons tout d'abord que f soit une Spitzenform ; alors la formule

$$\rho(y^{\frac{1}{2}})\, \hat{f}(s) = \exp(2\pi \operatorname{Tr}(sy)) \int \rho(y^{\frac{1}{2}})\, f(z)\, \hat{\mu}(s) \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(sx))\, dx$$

qui donne les coefficients de Fourier de f montre, puisque la fonction $\rho(y^{\frac{1}{2}})\, f(z)$ est bornée dans le demi-plan de Siegel, qu'on a une majoration de la forme

$$(4.1) \qquad \| \rho(y^{\frac{1}{2}})\, \hat{f}(s) \| \leqslant c.\exp(2\pi \operatorname{Tr}(sy)) ,$$

c étant une constante indépendante de la matrice $y = y' \gg 0$. Posant $y = g'g$ avec $g \in GL_+(n , \underline{R})$ on voit que tout élement $a \in F_\rho$ de la forme $\hat{f}(s)\underline{b}$, avec $\underline{b} \in F_\mu$, vérifie l'inégalité

$$(4.2) \qquad \| \rho(g)\underline{a} \| \leqslant c.\exp(2\pi \operatorname{Tr}(gsg'))$$

pour une certaine matrice $s = s' \gg 0$; il s'agit, moyennant une hypothèse sur le plus haut poids de ρ , d'en déduire que $\underline{a} = 0$.

Or considérons dans F_ρ l'ensemble V des vecteurs $\underline{a}$ tels qu'il existe une constance c et une matrice $s \gg 0$ vérifiant (4.2). Tout d'abord V est un sous-espace vectoriel de F_ρ , car si l'on a

$$\| \rho(g)\underline{a}_1 \| \leqslant c_1 \exp(2\pi \operatorname{Tr}(gs_1 g'))$$
$$\| \rho(g)\underline{a}_2 \| \leqslant c_2 \exp(2\pi \operatorname{Tr}(gs_2 g'))$$

on en déduit évidemment que

$$\| \rho(g)(\underline{a}_1 + \underline{a}_2) \| \leqslant c.\exp(2\pi \operatorname{Tr}(gsg'))$$

en prenant $c = c_1 + c_2$, $s = s_1 + s_2 \gg 0$. D'autre part, V est stable par la représentation ρ , attendu que (4.2) implique trivialement

$$\| \rho(g)\ \rho(g_0)\underline{a} \| \leqslant c.\exp(2\pi \operatorname{Tr}(gg_0\, sg_0'\, g')) .$$

Donc tout revient à examiner si V contient le vecteur $\underline{a}^+$ appartenant au plus haut poids de ρ , et pour ce faire il revient évidemment au même d'appliquer (4.2) au vecteur $\underline{a}^+$ en prenant g diagonale ; mais si $g = (\lambda_1 , \dots , \lambda_n)$ on a

$$\| \rho(g)\underline{a}^+ \| = \prod_{i=1}^{i=n} \Delta_i(g)^{\alpha_i} = \alpha(g)$$

et la relation (4.2) implique que $\alpha(g)$ reste borné lorsque les paramètres λ_i tendent vers 0 ; ceci exige visiblement $\alpha_n \geq 0$.

On voit donc que

(4.3) $$\alpha_n < 0 \quad \text{implique} \quad \mathcal{S}_r(\mu\ ;\ \rho) = 0\ .$$

Pour passer de là aux formes modulaires quelconques, on va raisonner par récurrence sur n en utilisant l'opérateur Φ .

On a vu en effet plus haut que Φ transforme toute forme f d'espèce $(\mu\ ;\ \rho)$ en une forme d'espèce $(\mu\ ;\ \rho^{(n-1)})$, où $\rho^{(n-1)}$ est la représentation de $GL(n-1\ ,\ \underline{C})$ dans le sous-espace $F_\rho^{(n-1)}$ de F_ρ défini par (1.2) ; tout revient donc à calculer le plus haut poids de la représentation $\rho^{(n-1)}$; or nous savons que le vecteur $\underline{a}^+$ qui appartient au plus haut poids de ρ appartient aussi au plus haut poids de $\rho^{(n-1)}$; donc le plus haut poids de $\rho^{(n-1)}$ est la restriction aux matrices diagonales de $GL(n-1\ ,\ \underline{C})$, i.e. aux matrices de $GL(n\ ,\ \underline{C})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1_1 \end{pmatrix} \quad (h \text{ diagonale}),$$

du plus haut poids de ρ ; le plus haut poids de $\rho^{(n-1)}$ est donc

$$\alpha^{(n-1)}(h) = \prod_{i=1}^{i=n} \Delta_i \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\alpha_i}$$

en sorte que l'exposant de $\det(h)$ dans ce plus haut poids est égal à $\alpha_{n-1} + \alpha_n$. Plus généralement, le même raisonnement montre que la représentation $\rho^{(r)}$ de $GL(r\ ,\ \underline{C})$ dans $F_\rho^{(r)}$ définie en (1.2) a pour plus haut poids une fonction de h dans laquelle l'exposant de $\det(h)$ est égal à $\alpha_r + \dots + \alpha_n$, et en fait à $\alpha_r + \alpha_n$ attendu que pour $r < n-1$ le sous-espace $F_\rho^{(r)}$ ne peut-être $\neq 0$, comme on l'a vu, que si $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

Cela dit désignons par r <u>le plus grand entier</u> $< n$ <u>tel que</u> $\alpha_r \neq 0$; nous nous allons démontrer par récurrence sur n que

$$\alpha_r + \alpha_n < 0 \quad \text{implique} \quad \mathcal{H}(\mu\ ;\ \rho) = 0\ .$$

Le résultat est vrai et classique pour $n = 1$; supposons-le démontré pour $n-1$. On doit distinguer deux cas :

Tout d'abord si $r = n-1$, alors pour toute forme $f \in \mathcal{H}_r(\mu\ ;\ \rho)$ on sait (Exposé 7, théorème 3, corollaire) que Φf est une Spitzenform ; comme le plus haut poids de $\rho^{(n-1)}$ contient $\det(h)$ à la puissance $\alpha_{n-1} + \alpha_n$ comme on l'a vu plus haut, (4.3) montre que $\Phi f = 0$; donc f est une Spitzenform, et comme $\alpha_{n-1} + \alpha_n < 0$ implique $\alpha_n < 0$ on en déduit, en appliquant à nouveau (4.3), que $f = 0$.

Supposons maintenant $r < n - 1$, de sorte que $\alpha_{n-1} = 0$; alors l'exposant de $\det(h)$ dans le plus haut poids de la représentation $\rho^{(n-1)}$ est α_n ; donc l'entier $\alpha_r + \alpha_n$ relatif à la représentation $\rho^{(n-1)}$ est égal à $\alpha_r + \alpha_n$; vu l'hypothèse de récurrence la relation $\alpha_r + \alpha_n < 0$ implique donc encore $\Phi f = 0$, et on termine le raisonnement comme ci-dessus.

Nous avons donc démontré le résultat suivante ("on" ignore s'il est possible de l'améliorer ; il est assez étrange que la condition $\alpha_n < 0$ ne suffise pas, apparement, à impliquer $\mathcal{H}_\Gamma(\mu ; \rho) = 0$; la situation est d'autant plus confuse que les méthodes de construction de formes modulaires qu'on exposera plus loin, séries d'Eisenstein, ne fonctionnent pas pour $\alpha_n < 0$, de sorte que la construction de contre-exemples ne saurait être triviale, à première vue tout au moins):

THÉORÈME 3. - *Soit* ρ *une représentation irréductible holomorphe de* $GL(n , \underline{C})$, *de plus haut poids*

$$\Delta_1(h)^{\alpha_1} \dots \Delta_r(h)^{\alpha_r} \Delta_n(h)^{\alpha_n} \quad \text{avec} \quad \alpha_r \geq 1 .$$

Supposons $\alpha_r + \alpha_n < 0$. *Alors, pour tout multiplicateur* μ *du groupe modulaire de Siegel, ou de tout groupe* Γ *commensurable au groupe modulaire de Siegel, on a* $\mathcal{H}_\Gamma(\mu ; \rho) = 0$. *De plus, la condition* $\alpha_n < 0$ *suffit à entraîner* $\mathcal{S}_\Gamma(\mu ; \rho) = 0$.

COROLLAIRE. - *Pour toute représentation* ρ *de* $GL(n , \underline{C})$ *et tout entier* k *posons*

$$\rho_k(g) = \det(g)^{-k} \rho(g) .$$

On a alors

$$\mathcal{H}_\Gamma(\mu ; \rho_k) = 0 \quad \text{pour } k \text{ assez grand} .$$

Ce dernier résultat a sûrement une interprétation en géométrie algébrique ...

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, University Press, 1956 (Princeton mathematical Series 19).

[2] MAGNUS (W.) und OBERHETTINGER (F.). - Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2. Auflage. - Berlin, Springer, 1948 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 52)

Pour une autre démonstration du théorème de finitude, voir par exemple l'article de KOECHER, cité dans l'exposé 4 :

[3] KOECHER (M.). - Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades, Math. Z., t. 59, 1954, p. 399-416 ; et t. 61, 1955, p. 455-466.

Pour la théorie des fonctions automorphes non analytiques, voir (outre l'article de SELBERG cité dans l'exposé 6) :

MAAS (H.). - Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Annalen, t. 121, 1949, p. 141-183.

MAAS (H.). - Modulformen zweiten Grades und Dirichletreihen, Math. Annalen, t. 122, 1950, p. 90-108.

MAAS (H.). - Spherical functions and quadratic forms, J. Indian math. Soc., t. 20, 1956, p. 117-162.

ROELCKE (W.). - Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art, Sitz. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Klasse, 1953-55, Abh. 4, p. 161-267.

Les résultats de HARISH-CHANDRA auxquels on a fait allusion dans la Remarque 2 du n° 2 se trouvent principalement dans les deux articles suivants :

HARISH-CHANDRA. - On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 28-96. [Cet article contient la détermination des caractères de $Z(G)$, cf. Théorème 5, p. 73].

HARISH-CHANDRA. - Representations of semi-simple Lie groups II, Trans. Amer. math. Soc., t. 76, 1954, p. 26-65.