E. B. Dynkin, Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1952, Volume 30(72), Number 2, 349–462

1952 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 30 (72), № 2

Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли

Е. Б. Дынкин (Москва)

Изучение полупростых подалгебр полупростых алгебр Ли* (или, что равносильно, связных полупростых подгрупп полупростых групп Ли) важно как для алгебры, так и для геометрии. Как показал А. И. Мальцев [11], к этому вопросу сводится более общая задача изучения полупростых подалгебр в любых алгебрах Ли, задача о построении всех алгебр Ли с данным радикалом и др. С другой стороны, изучение транзитивных групп преобразований равносильно изучению пар «группа, стационарная подгруппа», откуда видно значение указанной задачи для геометрии.

Исследование полупростых подалгебр в произвольных полупростых алгебрах Ли легко сводится к исследованию полупростых подалгебр в простых алгебрах (см. [11]). Простые алгебры Ли исчерпываются четырьмя классическими сериями A_n, B_n, C_n, D_n** и пятью особыми алгебрами E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. Изучение полупростых подалгебр алгебры A_n равносильно изучению всевозможных линейных представлений полупростых алгебр Ли. Основные результаты в этом направлении были получены Э. Картаном [16] и Г. Вейлем [21]. Описание полупростых подалгебр в алгебрах B_n, C_n и D_n было дано А. И. Мальцевым [11]. Что же касается особых алгебр, то среди них А. И. Мальцевым были изучены лишь простейшая алгебра G_2 и, частично, F_4***. Между тем, не говоря уже об общей теории, которая, таким образом, остается незавершенной, решение ряда важных вопросов, относящихся к классическим группам Ли, также зависит от построения полной классификации полупростых подгрупп особых групп.

Одним из таких вопросов является вопрос об описании максимальных подгрупп классических групп. Как было показано нами в ра-

* Говоря об алгебрах и группах Ли, мы всегда подразумеваем алгебры и группы с комплексными параметрами.

** Если обозначить через $SL(N)$ группу всех комплексных матриц порядка N с детерминантом 1, через $O(N)$ — группу всех ортогональных матриц порядка N и через $Sp(N)$ — группу всех симплектических матриц порядка N, то алгебра A_n отвечает группе $SL(n+1)$, алгебра B_n — группе $O(2n+1)$, алгебра C_n — группе $Sp(2n)$ и алгебра D_n — группе $O(2n)$. Мы будем также обозначать алгебры, отвечающие группам $SL(N)$, $O(N)$ и $Sp(N)$, соответственно, через $ASL(N)$, $AO(N)$ и $ASp(N)$.

*** В таблице простых подалгебр алгебры F_4, указанной А. И. Мальцевым, имеются пробелы: из 15-ти подалгебр ранга 1 указаны 14 подалгебр, из 6-ти простых подалгебр ранга 2 указано 4 подалгебры. Полупростые непростые подалгебры вовсе не указаны.

боте [9] (см. также [6] и [8]), этот вопрос сводится к определению отношений включения между неприводимыми алгебрами матриц со следом нуль, которые всегда являются полупростыми, но, конечно, могут быть особыми.

С задачей о максимальных подгруппах тесно связана классическая задача С. Ли о классификации примитивных групп преобразований (см. [19]). Для решения этой задачи необходимо, в частности, определить максимальные полупростые подалгебры особых алгебр Ли.

Настоящая работа завершает решение задачи о классификации полупростых подалгебр полупростых алгебр Ли. Вместе с нашей работой [9] она дает также исчерпывающее решение проблемы Ли о классификации примитивных групп преобразований и задачи о перечислении максимальных подгрупп простых групп Ли.

В первой главе исследуются некоторые общие вопросы, связанные с описанием полупростых подалгебр. Показывается, что наиболее широким источником для получения характеристик полупростых подалгебр полупростой алгебры G, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов G, является изучение связи между линейными представлениями алгебры G и линейными представлениями, которые индуцируются ими на подалгебрах. В связи с этим вводится понятие линейной сопряженности подалгебр. В этой же главе вводятся и изучаются важные общие понятия индекса подалгебры и целочисленности подалгебр. Индекс простой подалгебры в простой алгебре Ли всегда выражается натуральным числом и является простейшим среди всех нетривиальных инвариантов подалгебры.

Во второй главе дается классификация регулярных подалгебр* и изучаются свойства S-подалгебр и R-подалгебр: S-подалгебры играют в общей теории ту же роль, какую при изучении алгебры A_n всех матриц порядка $n+1$ со следом нуль играют неприводимые подалгебры; R-подалгебры являются аналогом приводимых подалгебр.

В третьей главе исследуются трехчленные простые подалгебры полупростых алгебр Ли. Вслед за общими теоремами в этой главе вычисляются таблицы всех трехчленных подалгебр в особых алгебрах Ли (см. таблицы 16—20).

В четвертой главе выводится классификация простых подалгебр в особых алгебрах Ли. Таблица 25 дает полное перечисление всех таких подалгебр, имеющих ранг, больший 1.

В пятой главе дается полная классификация S-подалгебр (в том числе непростых S-подалгебр) в особых алгебрах Ли (см. таблицу 39, в которой перечислены все S-подалгебры и указаны все отношения включения между ними).

Наконец, в шестой главе приводится полная классификация максимальных подалгебр полупростых алгебр Ли и находятся все подалгебры особых алгебр Ли, неприводимые относительно некоторого линейного представления алгебры.

---

* Результаты о регулярных полупростых подалгебрах, вошедшие в § 5 главы II, были опубликованы ранее в кратком сообщении [5].

Основной части работы мы предпосылаем краткое введение, в котором приводятся обозначения, терминология и некоторые основные факты теории полупростых алгебр Ли.

Оглавление

Введение

Для любой полупростой алгебры Ли G имеет место **каноническое разложение**:

$$G = K \dot{+} \sum_{\alpha \in \Sigma} G_\alpha, \tag{0.1}$$

где K — *картановская подалгебра*, Σ — конечная система векторов из K — *система корней* алгебры G, G_α — *корневые подпространства*. Каноническое разложение полупростой алгебры G определено однозначно с точностью до внутренних автоморфизмов G. Выбор канонического разложения определяется выбором картановской подалгебры K. Каждую систему элементов алгебры G, которая при надлежащем выборе картановской подалгебры становится системой корней G, мы будем называть **возможной системой корней** G. Все возможные системы корней сопряжены между собой.

Совокупность H векторов, выражающихся через корни в виде линейной комбинации с вещественными коэффициентами, мы будем называть, следуя А. И. Мальцеву, *идемпотентом* алгебры G. Связь между идемпотентом H и картановской подалгеброй K можно записать в виде формулы

$$K = [H], \tag{0.2}$$

где $[H]$ — обозначает минимальное подпространство над полем комплексных чисел, содержащее H.

В полупростой алгебре G можно ввести невырожденное скалярное произведение, инвариантное относительно всех автоморфизмов G. Если G — простая алгебра, то такое скалярное произведение определено однозначно с точностью до численного множителя. При надлежащем выборе этого множителя идемпотент H является эвклидовым пространством относительно инвариантного скалярного произведения.

В идемпотенте H можно различными способами ввести упорядочение, удовлетворяющее условиям:

1) Если $h_1, h_2 \in H$ и λ_1, λ_2 — положительные числа, то из $h_1 > 0$ $h_2 > 0$ следует: $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 > 0$.

2) Если $h \in H$, то либо $h > 0$, либо $-h > 0$, либо $h = 0$.

Каждое такое упорядочение приводит к тому, что из системы корней Σ выделяется определенная подсистема Π *простых корней*. Система Π является базисом пространства H. Знания попарных скалярных произведений простых корней достаточно для того, чтобы восстановить всю алгебру G. Система простых корней определяется выбором упорядоченного идемпотента H. Всякую систему векторов, которая становится системой простых корней при некотором выборе упорядоченного идемпотента H, мы назовем *возможной системой простых корней*. Все возможные системы простых корней алгебры G сопряжены.

Пусть фиксирована некоторая возможная система Π простых корней полупростой алгебры G, и пусть H — натянутый на эту систему идемпотент. Каждое упорядочение идемпотента H, относительно которого Π становится системой простых корней алгебры G, мы называем *Π-упорядочением*. Пусть $x, y \in H$. Условимся писать

$$x \gg y,$$

если $x > y$ относительно любого Π-упорядочения идемпотента H.

Пусть $\varphi(x)$ — линейное представление полупростой алгебры G, действующее в пространстве R. Фиксируем определенную картановскую подалгебру K алгебры G. Вектор $\xi \in R$ называется *весовым* для φ, если он является собственным для всех преобразований $\varphi(h)$ $(h \in K)$. Тогда, очевидно,

$$\varphi(h)\xi = \Lambda(h)\xi, \tag{0.3}$$

где $\Lambda(h)$ — линейная форма на K, т. е. элемент пространства $\overline{K}$, сопряженного с пространством K. Эта форма называется *весом* вектора ξ.

Если в G фиксировано определенное инвариантное невырожденное скалярное произведение, то тем самым устанавливается естественное отображение $\overline{K}$ на K и веса вкладываются в K: элемент Λ из K, отвечающий форме $\Lambda(h)$, определяется формулой

$$\Lambda(h) = (\Lambda, h) \quad (h \in K). \tag{0.4}$$

Система $\Delta(\varphi)$ весов представления φ, будучи вложена в K, оказывается принадлежащей идемпотенту H.

Пусть $h \in H$. Мы будем постоянно пользоваться обозначением

$$h' = \frac{2}{(h, h)} h. \tag{0.5}$$

Очевидно,

$$(h', h')(h, h) = 4, \tag{0.6}$$

$$h'' = h, \tag{0.7}$$

$$h = \frac{2}{(h', h')} h'. \tag{0.8}$$

Неприводимое представление φ простой алгебры G мы задаем изображая схему простых корней G и надписывая около каждого пункта этой схемы значение $\frac{2(\Lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = (\Lambda, \alpha')$, где Λ — старший вес φ, а α — простой корень, изображаемый этим пунктом. Числа (Λ, α') являются целыми и неотрицательными. И, обратно, каждому набору неотрицательных целых чисел (Λ, α') (α пробегает все простые корни) отвечает однозначно определенное неприводимое представление алгебры G.

Числа (Λ, α') могут рассматриваться как контравариантные координаты вектора Λ по базису Π', который получается из системы простых корней Π преобразованием $\alpha' = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$. Мы условимся обозначать контравариантные координаты вектора $h \in H$ по базису Π' через h^{α}, а ковариантные координаты — через h_{α}. Таким образом,

$$h^{\alpha} = (h, \alpha') = \frac{2(h, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}, \tag{0.9}$$

$$h = \sum_{\alpha \in \Pi} h_{\alpha} \alpha' = \sum_{\alpha \in \Pi} \frac{2h_{\alpha}}{(\alpha, \alpha)} \alpha. \tag{0.10}$$

Положим

$$g^{\alpha\beta} = (\alpha', \beta') = \frac{4(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} \tag{0.11}$$

и обозначим через $g_{\alpha\beta}$ элементы матрицы, обратной к матрице $(g^{\alpha\beta})$. Очевидно,

$$h^{\alpha} = \sum_{\beta \in \Pi} g^{\alpha\beta} h_{\beta}, \tag{0.12}$$

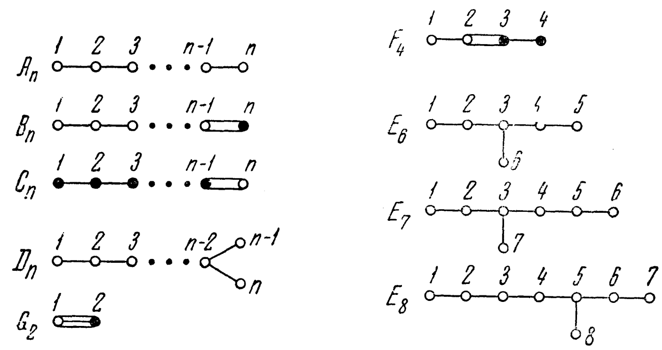
$$h_{\alpha} = \sum_{\beta \in \Pi} g_{\alpha\beta} h^{\beta}. \tag{0.13}$$

Матрицы $(g^{\alpha\beta})$ и $(g_{\alpha\beta})$ для всех типов простых групп указаны в таблице 2 (при этом простые корни расположены в порядке*, указанном в таблице 1). Очевидно, для $h,\ k \in H$

$$(h, k) = \sum_{\alpha \in \Pi} h^{\alpha} k_{\alpha} = \sum_{\alpha \in \Pi} h_{\alpha} k^{\alpha}. \tag{0.14}$$

Таблица 1

Каноническая нумерация простых корней



Глава I

Некоторые вопросы общей теории

§ 1. Линейная эквивалентность представлений и линейная сопряженность подалгебр

n° 1. В работе А. И. Мальцева [11] описана следующая общая схема сведения задачи классификации подалгебр к задаче классификации представлений одних алгебр в других алгебрах.

Представлением алгебры $\tilde{G}$ в алгебре G называется гомоморфное отображение f $\tilde{G}$ в G. Если это отображение изоморфно, то представление называется точным. Два представления f_1 и f_2 алгебры $\tilde{G}$ в G называются эквивалентными, если существует внутренний автоморфизм U алгебры G такой, что

$$f_2(x) = Uf_1(x). \tag{1.1}$$

Ищутся все классы эквивалентных между собой точных представлений $\tilde{G}$ в G. Объединяя затем классы, которые переводятся друг в друга автоморфизмами $\tilde{G}$, получим классификацию с точностью до сопряженности подалгебр алгебры G, изоморфных $\tilde{G}$.

А. И. Мальцев реализует эту программу для случая, когда алгебра G принадлежит к одной из классических серий A_n, B_n, C_n, D_n и алгебра $\tilde{G}$ является полупростой. При этом используется теория линейных представлений; а именно, рассматривается линейное представле-

* Этот порядок принят также в нашей работе [9].

Таблица 2

Тип группы	$(g^{\alpha\beta})$	$(g_{\alpha\beta})$
A_n	$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & 2 \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{n+1}\begin{Vmatrix} 1\cdot n & 1\cdot(n-1) & 1\cdot(n-2) & \dots 1\cdot 2 & 1\cdot 1 \\ 1\cdot(n-1) & 2\cdot(n-1) & 2\cdot(n-2) & \dots 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \\ 1\cdot(n-2) & 2\cdot(n-2) & 3\cdot(n-2) & \dots 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1\cdot 2 & 2\cdot 2 & 3\cdot 2 & \dots (n-1)\cdot 2 & (n-1)\cdot 1 \\ 1\cdot 1 & 2\cdot 1 & 3\cdot 1 & \dots (n-1)\cdot 1 & n\cdot 1 \end{Vmatrix}$
B_n	$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \dots & -2 & 4 \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 6 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2(n-1) & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & \frac{n}{2} \end{Vmatrix}$
C_n	$\begin{Vmatrix} 4 & -2 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \dots & -2 & 2 \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{Vmatrix}$
D_n	$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 6 & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2(n-2) & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{2} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & \frac{n-2}{2} & \frac{n}{2} \end{Vmatrix}$
E_6	$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 6 & 12 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 & 10 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 & 6 \end{Vmatrix}$
E_7	$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 2 & 4 \\ 6 & 12 & 16 & 12 & 8 & 4 & 8 \\ 8 & 16 & 24 & 18 & 12 & 6 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 15 & 10 & 5 & 9 \\ 4 & 8 & 12 & 10 & 8 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 12 & 9 & 6 & 3 & 7 \end{Vmatrix}$

Таблица 2 (продолжение)

Тип группы	$(g^{\alpha\beta})$	$(g_{\alpha\beta})$
E_8	$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 24 & 16 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 20 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 14 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 & 8 \end{Vmatrix}$
G_2	$\begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$
F_4	$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{Vmatrix}$

ние ω алгебры G в пространстве $R^{(N)}$ возможно меньшего числа измерений ($N = n+1$ для A_n, $N = 2n$ для C_n и D_n, $N = 2n+1$ для B_n). Тогда с каждым представлением f алгебры $\tilde{G}$ в G связывается линейное представление ωf алгебры $\tilde{G}$, которое может служить описанием отображения f. В случае, когда $G = A_n$, B_n или C_n, это описание оказывается полным: если для двух представлений f_1 и f_2 алгебры $\tilde{G}$ в G имеет место эквивалентность ωf_1 и ωf_2, то из нее вытекает эквивалентность f_1 и f_2. Для $G = D_n$ линейное представление ωf определяет f двузначным образом, причем два неэквивалентные представления f_1 и f_2, связанные соотношением $\omega f_1 \sim \omega f_2$*, переводятся друг в друга некоторым внешним автоморфизмом D_n. Таким образом, А. И. Мальцеву удается описать полупростые подалгебры классических алгебр.

Естественным продолжением исследований А. И. Мальцева была бы попытка изучать представления полупростых алгебр Ли в особых алгебрах G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, используя простейшее линейное представление ω этих алгебр в пространстве $R^{(N)}$ возможно меньшего числа измерений ($N = 7$ для G_2, 26 для F_4, 27 для E_6, 133 для E_7 и 248 для E_8). Однако такая попытка наталкивается на значительные трудности, которые побуждают искать новых путей.

n° 2. Желая классифицировать представление f полупростой алге-

* Значок $\sim$ обозначает эквивалентность представлений.

бры $\widetilde{G}$ в заданную простую алгебру G, мы должны построить систему характеристик такого представления, удовлетворяющую требованиям:

а) инвариантности относительно внутренних автоморфизмов G (что обеспечит совпадение характеристик для эквивалентных представлений),

б) полноты (из совпадения характеристик для двух представлений должна вытекать эквивалентность представлений),

в) компактности и удобной вычислимости. (Важность этого последнего требования не вызывает сомнений, поскольку для решения нашей задачи мы должны составить полную таблицу всех возможных значений системы характеристик. Хотя требование в) может показаться несколько неопределенным, но оно достаточно определенно для того, чтобы забраковать тривиальные решения, являющиеся перефразировкой самой задачи.)

В соответствии с этими требованиями мы намечаем себе следующую программу исследования:

1) набрать возможно более широкий запас характеристик представления f, удовлетворяющих требованиям инвариантности и удобной вычислимости;

2) исследовать полноту этого набора;

3) выделить из этого набора наиболее экономным образом независимую систему характеристик, через которые выражаются все остальные характеристики.

Рассмотрим произвольное линейное представление φ алгебры G. Ему отвечает линейное представление φf алгебры $\widetilde{G}$. Система старших весов представления φf удовлетворяет требованиям пункта 1). Пусть теперь φ пробегает все линейные представления G. Мы получим при этом набор систем старших весов, который и дает наиболее широкое решение задачи 1), какое только мы можем в настоящее время вообразить. (Характеристики, использованные А. И. Мальцевым и описанные в n°1, очевидно, вошли в наш набор.) Если обозначить через $\Gamma(G)$ решетку старших весов всех неприводимых представлений алгебры G, то построенный набор характеристик определяется некоторым отображением системы всех конечных подмножеств $\Gamma(G)$ в систему конечных подмножеств $\Gamma(\widetilde{G})$. Очевидно, достаточно рассматривать только неприводимые представления G и, стало быть, рассматривать отображение самой решетки $\Gamma(G)$ в систему конечных подмножеств $\Gamma(\widetilde{G})$.

Назовем два представления f_1 и f_2 алгебры $\widetilde{G}$ в G **линейно эквивалентными** или, сокращенно, **L-эквивалентными** и будем писать $f_1 \sim f_2$ (L) если для всякого линейного представления φ алгебры G

$$\varphi f_1 \sim \varphi f_2. \tag{1.2}$$

Вопрос о полноте введенного выше набора характеристик, очевидно равносилен вопросу о том, вытекает ли из линейной эквивалентности f_1 и f_2 их эквивалентность. Примеры, которые будут построены ниже, дают отрицательный ответ на этот вопрос, так что класс L-эквивалентных представлений $\widetilde{G}$ в G может, вообще говоря, распасться на несколько подклассов эквивалентных представлений. Однако он, как правило, все же состоит только из одного такого подкласса, а если и распадается, то на весьма малое число подклассов. С другой стороны, можно без всякого преувеличения сказать, что в подавляющем большинстве исследований L-эквивалентные представления будут совершенно неразличимы даже тогда, когда они неэквивалентны. Далее, как мы увидим ниже, все основные операции над представлениями, переводящие эквивалентные представления в эквивалентные, сохраняют и L-эквивалентность. Все это побуждает нас примириться с отсутствием строгой полноты построенного набора инвариантов и поставить перед собой в качестве основной задачи классификацию представлений $\widetilde{G}$ в G с точностью до линейной эквивалентности. (Понятно, что решение этой задачи явится решающим продвижением и первоначальной задачи классификации представлений $\widetilde{G}$ в G с точностью до эквивалентности. Последняя сведется к исследованию того, какие из классов L-эквивалентных представлений распадаются на классы эквивалентных представлений и как именно происходит это распадение.)

Рациональный выбор независимой подсистемы построенного набора характеристик может производиться, конечно, разными способами. В n° 4 мы докажем общую теорему, в силу которой совокупность всех неприводимых линейных представлений φ алгебры G может быть заменена одним (простейшим) представлением для алгебр A_n, B_n, C_n, E_6, F_4, G_2 и двумя представлениями для алгебр D_n, E_7 и E_8. Более детальное исследование впоследствии покажет нам, что и для алгебр E_7 и E_8 оказывается достаточным одно простейшее представление (см. n° 35).

n° 3. Настоящий n° посвящен доказательству нижеследующего критерия L-эквивалентности:

Теорема 1.1. *Пусть $\widetilde{G}$ и G — полупростые алгебры Ли, $\widetilde{K}$ — картановская подалгебра $\widetilde{G}$. Пусть f_1 и f_2 — представления $\widetilde{G}$* в G. *Для того чтобы f_1 и f_2 были L-эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы были эквивалентны представления f_1' и f_2', индуцированные ими на $\widetilde{K}$.*

Доказательству этой теоремы мы предпошлем несколько замечаний и лемм.

Рассмотрим представление f $\widetilde{G}$ в G. Пусть картановская подалгебра K алгебры G выбрана так, что

$$f(\widetilde{K}) \subset K. \tag{1.3}$$

Рассмотрим какое-нибудь линейное представление φ алгебры G. Веса представления φ суть линейные формы, определенные на K. С каждой такой формой $\Lambda(h)$ естественно связывается форма $\widetilde{\Lambda}(\widetilde{h})$, определенная на $\widetilde{K}$ формулой

$$\widetilde{\Lambda}(\widetilde{h}) = \Lambda(f(\widetilde{h})). \tag{1.4}$$

Мы обозначим через f^* линейное отображение пространства форм над K на пространство форм над $\widetilde{K}$, определенное формулой

$$f^*(\Lambda) = \widetilde{\Lambda}. \tag{1.5}$$

Лемма 1.1. *Отображение f^* переводит систему $\Delta(\varphi)$ весов представления φ в систему $\Delta(\tilde{\varphi})$ весов представления $\tilde{\varphi}=\varphi f$, при этом кратность каждого веса из $\Delta(\tilde{\varphi})$ равна сумме кратностей всех весов из $\Delta(\varphi)$, переходящих в него при отображении f^*.*

Доказательство леммы вытекает из того, что если ξ_Λ — весовой вектор представления φ, отвечающий весу Λ, то он является весовым и для $\tilde{\varphi}$, причем его вес относительно $\tilde{\varphi}$ равен $f^*(\Lambda)$.

Перейдя от пространств линейных форм над K и над $\tilde{K}$ к самим пространствам K и $\tilde{K}$, мы вправе рассматривать отображение f^* как отображение K на $\tilde{K}$. При этом для любых $\tilde{h}\in\tilde{K}$, $h\in K$

$$(f(\tilde{h}),\ h)=(\tilde{h},\ f^*(h)). \tag{1.6}$$

Из леммы 1.1 видно, что f^* отображает идемпотент H алгебры G в идемпотент $\tilde{H}$ подалгебры $\tilde{G}$.

Мы скажем, что способ упорядочения $\mathfrak{A}$ пространства H согласован со способом упорядочения $\tilde{\mathfrak{A}}$ пространства $\tilde{H}$ относительно отображения f^*, если из $f^*(x)<f^*(y)$ следует $x<y$ $(x,\ y\in H)$.

Фиксируем некоторое упорядочение $\tilde{\mathfrak{A}}$ пространства $\tilde{H}$. Рассмотрим систему Π простых корней алгебры G относительно какого-нибудь упорядочения $\mathfrak{A}$ пространства H. Назовем представление f $\tilde{G}$ в G П-представлением, если существует П-упорядочение пространства H, согласованное с $\tilde{\mathfrak{A}}$ относительно f^*.

Лемма 1.2. *Для всякого представления f алгебры $\tilde{G}$ в G существует эквивалентное П-представление.*

Доказательство. Рассмотрим упорядочение $\mathfrak{B}$ пространства H, согласованное с $\tilde{\mathfrak{A}}$ относительно f^*. Пусть Π' — соответствующая система простых корней G. Существует внутренний автоморфизм U алгебры G, который переводит Π' в Π (см. [7], лемма 3). Очевидно, что представление Uf является П-представлением.

Лемма 1.3. *Если f — произвольное П-представление $\tilde{G}$ в G, то для любых $h_1,\ h_2\in H$ из $h_1\gg h_2$ следует $f^*(h_1)\geqslant f^*(h_2)$.*

Доказательство. Рассмотрим П-упорядочение $\mathfrak{B}$ пространства H, согласованное с $\tilde{\mathfrak{A}}$ относительно f^*. Если бы выполнялось соотношение $f^*(h_1)<f^*(h_2)$, то относительно $\mathfrak{B}$ имело бы место соотношение $h_1<h_2$, которое противоречит заданному $h_1\gg h_2$.

Лемма 1.4. *Пусть f — П-представление $\tilde{G}$ в G, и пусть φ — линейное представление алгебры G. Отображение f^* переводит старший (младший) вес представления φ в старший (соответственно, младший) вес представления $\tilde{\varphi}=\varphi f$.*

Доказательство. Старший вес Λ неприводимого представления φ удовлетворяет условию $\Lambda\gg\mathrm{M}$ для любого $\mathrm{M}\in\Delta(\varphi)$. В силу леммы 1.3, отсюда вытекает: $f^*(\Lambda)\geqslant f^*(\mathrm{M})$, а это и доказывает, что вес $f^*(\Lambda)$ является старшим для $\tilde{\varphi}$.

Доказательство теоремы 1.1.

Достаточность. Пусть представления f_1' и f_2' эквивалентны.

Выберем внутренний автоморфизм U алгебры G так, чтобы

$$Uf_2' = f_1', \tag{1.7}$$

и рассмотрим представление $f_3 = Uf_2$. Представление f_3 индуцирует на $\widetilde{K}$ представление f_3', совпадающее с f_1'. Выберем картановскую подалгебру K алгебры G так, чтобы

$$f_1(\widetilde{K}) = f_3(\widetilde{K}) \subseteq K \tag{1.8}$$

(возможность такого выбора вытекает из теоремы Ф. Р. Гантмахера ([1], теорема 11)). Из совпадения f_3' и f_1' вытекает, что $f_1^* = f_3^*$ и, в силу леммы 1.1, $\Delta(\varphi f_1) = \Delta(\varphi f_3)$. Стало быть, $\varphi f_1 \sim \varphi f_3$. Тем самым доказана L-эквивалентность f_1 и f_3, а значит, и f_1 и f_2.

Необходимость. Заменив, в случае надобности, одно из представлений f_1, f_2 на эквивалентное, мы вправо считать, что

$$f_1(\widetilde{K}) \subseteq K, \quad f_2(\widetilde{K}) \subset K, \tag{1.9}$$

где K — некоторая картановская подалгебра алгебры G (см. [1], теорема 11). Согласно лемме 1.2, мы вправе при этом дополнительно считать, что f_1 и f_2 являются П-представлениями. Линейная эквивалентность f_1 и f_2 означает, по определению, что для любого линейного представления φ алгебры G $\varphi f_1 \sim \varphi f_2$. Следовательно, старшие веса φf_1 и φf_2 совпадают между собой. В силу леммы 1.4, выводим отсюда, что если Λ — старший вес какого-нибудь неприводимого представления φ, то $f_1^*(\Lambda) = f_2^*(\Lambda)$. Поскольку старшие веса неприводимых представлений порождают все пространство K, имеем: $f_1^* = f_2^*$. Из этого равенства вытекает, что $f_1' = f_2'$, и тем самым теорема доказана.

Используя теорему 1.1, легко убедиться в том, что важнейшие свойства отношения эквивалентности представлений присущи и отношению L-эквивалентности. Приведем некоторые из этих свойств.

А) *Пусть G_1, G_2 и G_3 — полупростые алгебры Ли, и пусть f_1 и f_1' — представления G_1 в G_2, а f_2 и f_2' — представления G_2 в G_3. Если*

$$f_1 \sim f_1' \ (L) \quad \text{и} \quad f_2 \sim f_2' \ (L), \tag{1.10}$$

то

$$f_2 f_1 \sim f_2' f_1' \ (L). \tag{1.11}$$

Б) *Пусть f_1 — представление $\widetilde{G}$ в G_1 и f_2 — представление $\widetilde{G}$ в G_2. Пусть f — представление алгебры $\widetilde{G}$ в прямую сумму $G_1 \dot{+} G_2$, определенное формулой*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x). \tag{1.12}$$

Если заменить представления f_1 и f_2 на линейно эквивалентные, то представление f также заменится L-эквивалентным.

n° 4. Теперь мы приступаем к реализации пункта 3) намеченной в n° 2 программы. Прежде всего из теоремы 1.1 легко выводится следующая

Теорема 1.2. *Пусть $\tilde{G}$ и G — полупростые алгебры Ли, $\tilde{K}$ и K — их картановские подалгебры. Пусть f_1 и f_2 — представления $\tilde{G}$ в G, причем*

$$f_1(\tilde{K}) \subseteq K, \quad f_2(\tilde{K}) \subseteq K. \tag{1.13}$$

Если линейная оболочка элементов $h_1, \ldots, h_n$ совпадает с K и если

$$f_1^*(h_i) = f_2^*(h_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.14}$$

то представления f_1 и f_2 линейно эквивалентны.

Действительно, из (1.14) вытекает, что $f_1^* = f_2^*$; стало быть, f_1 и f_2 совпадают на $\tilde{K}$ и, согласно теореме 1.1, $f_1 \sim f_2$ (L).

Следствие. *Назовем набор линейных неприводимых представлений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ алгебры G полным, если линейная оболочка старших весов этих представлений совпадает с K*. Если два представления f_1 и f_2 $\tilde{G}$ в G удовлетворяют для некоторого полного набора $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ условиям*

$$\varphi_i f_1 \sim \varphi_i f_2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.15}$$

то f_1 и f_2 линейно эквивалентны.

При выводе этого следствия должна быть использована лемма 1.4. Сформулированный результат может быть значительно усилен, если воспользоваться вместо леммы 1.4 ее обобщением — нижеследующей леммой 1.5.

Лемма 1.5. *Пусть f — П-представление алгебры $\tilde{G}$ в G, и пусть φ — линейное представление алгебры G. Рассмотрим систему весов*

$$\mathrm{M}_1 \geqslant \mathrm{M}_2 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{M}_N \tag{1.16}$$

линейного представления φf алгебры $\tilde{G}$, занумерованную в порядке убывания (каждый вес повторен столько раз, какова его кратность). Для каждого $\Lambda \in \Delta(\varphi)$ обозначим через $\bar{k}(\Lambda)$ число элементов $\tilde{\Lambda}$ из $\Delta(\varphi)$, удовлетворяющих условию

$$\tilde{\Lambda} \gg \Lambda, \tag{1.17}$$

а через $\underline{k}(\Lambda)$ — число элементов $\tilde{\tilde{\Lambda}}$ из $\Delta(\varphi)$, удовлетворяющих условию

$$\Lambda \gg \tilde{\tilde{\Lambda}} \tag{1.18}$$

(каждый вес учитывается столько раз, какова его кратность). Тогда

$$f^*(\Lambda) = \mathrm{M}_k, \tag{1.19}$$

где k удовлетворяет условиям

$$1 + \bar{k}(\Lambda) \leqslant k \leqslant N - \underline{k}(\Lambda). \tag{1.20}$$

Доказательство. В силу леммы 1.3, все веса $\tilde{\Lambda}$, удовлетворяющие условию (1.17), должны перейти в веса M_i с номерами, мень-

* Примером такого набора может служить набор базисных представлений.

шими k, и, значит, $\overline{k}(\Lambda) \leqslant k-1$, а все веса $\tilde{\tilde{\Lambda}}$, удовлетворяющие условию (1.18), должны перейти в веса с номерами, большими чем k, и, значит, $\underline{k}(\Lambda) \leqslant N-k$.

Из леммы 1.5 сразу вытекает

Следствие 1. *Если для некоторого веса* Λ

$$\overline{k}(\Lambda) + \underline{k}(\Lambda) = N - 1, \tag{1.21}$$

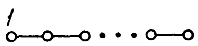
то $f^*(\Lambda) = \mathrm{M}_{\overline{k}(\Lambda)+1}$.

Условие (1.21) означает, что вес Λ принадлежит этажу ширины 1 и, согласно теореме 4 работы [4], тому же условию удовлетворяют и все веса $\tilde{\Lambda}$, для которых выполняется условие (1.17). Таким образом, утверждение следствия 1 равносильно следующему утверждению:

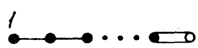
Следствие 2. *Если* $s_1(\varphi) = s_2(\varphi) = \ldots = s_k(\varphi) = 1$*, *то старшие* k *весов* $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \ldots > \Lambda_k$ *представления* φ *(которые не зависят от выбора* П*-упорядочения идемпотента* H*) переходят при отображении* f^**, соответственно, в* $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_k$.

Сопоставляя теорему 1.2 и следствие 2 леммы 1.5, выводим теорему:

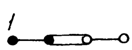
Теорема 1.3. *Пусть* ω *— линейное представление алгебры* G*, задаваемое схемой*

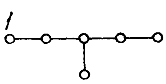
для A_n:  ,

для B_n:  ,

для C_n:  ,

для G_2:  ,

для F_4:  ,

для E_6;  ,

Если f_1 *и* f_2 *— два представления алгебры* $\tilde{G}$ *в* G*, причем* $\omega f_1 \sim \omega f_2$*, то* f_1 *и* f_2 L*-эквивалентны.*

---

* $s_k(\varphi)$ обозначает сумму кратностей весов неприводимого представления φ, представляющихся в виде

$$\Lambda - \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_i \quad \left(\sum_{i=1}^{n} p_i = k\right),$$

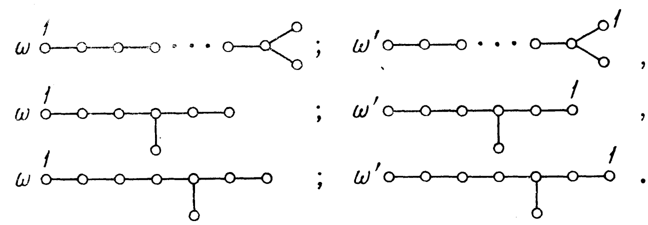
где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — система простых корней, а Λ — старший вес φ.

Для D_n, E_7 и E_8 рассмотрим два представления ω и ω', задаваемые схемами

для D_n:

для E_7:

для E_8:



Если $\omega f_1 \sim \omega f_2$ и $\omega' f_1 \sim \omega' f_2$, то f_1 и f_2 L-эквивалентны.

Для доказательства теоремы 1.3 достаточно проверить, что если в описанных линейных представлениях отобрать все веса, принадлежащие этажам ширины 1, то получится набор векторов из H, порождающий все H. Эта проверка проводится без всякого труда.

Исследуем более детально вопрос о том, как, зная систему весов линейного представления ωf, восстановить представление f алгебры $\widetilde{G}$ в G. Так как эта задача может быть решена в лучшем случае лишь с точностью до L-эквивалентности, то вопрос может идти лишь о том, чтобы найти $f(\widetilde{h})$ для всех $\widetilde{h} \in \widetilde{H}$, для чего достаточно найти $f(\beta)$ $(\beta \in \widetilde{\Pi})$, где $\widetilde{\Pi}$ — система простых корней алгебры $\widetilde{G}$. Согласно лемме 1.2, мы можем считать, что f — Π-представление. Элемент $f(\beta)$ определяется своими контравариантными координатами $(f(\beta), \alpha)$ по базису Π. Если принять во внимание, что $(f(\beta), \alpha) = (\beta, f^*(\alpha))$ (см. (1.6)), то задача сводится к определению контравариантных координат вектора $f^*(\alpha)$ по базису $\widetilde{\Pi}$. Используя следствие 1 леммы 1.5, нетрудно выразить $f^*(\alpha)$ через веса ωf и тем самым решить задачу. Остается выписать выражения $f^*(\alpha)$ $(\alpha \in \Pi)$ через веса ωf для каждого из типов простых групп G. Эти выражения приведены в таблице 3, из которой видно, что в соответствии с теоремой 2.3 наша задача решается однозначно для $G = A_n$, B_n, C_n, G_2, F_4, E_6 и может иметь a priori два решения для $G = D_n$ и три решения для $G = E_7$ и E_8.

Аналогично можно было бы исследовать задачу реконструкции f по φf, где φ — какое угодно линейное представление G. И в общем случае мы получим конечное число решений; случай $\varphi = \omega$ выделяется лишь тем, что это число для него минимально.

Вместо одного представления φf можно рассмотреть несколько представлений $\varphi_1 f$, $\varphi_2 f, \ldots$. Мы остановимся на задаче реконструкции f по ωf и $\omega' f$ для случаев $G = D_n$, E_7 и E_8. Решение этой задачи дается таблицей 4 (M_i — веса представления ωf, M_i' — веса представления $\omega' f$).

n° 5. Возвратимся теперь к вопросу о соотношении между эквивалентностью и линейной эквивалентностью представлений $\widetilde{G}$ в G. Равносильность этих двух понятий для случая $G = A_n$ очевидна, для случая $G = B_n$ она вытекает из результатов Фробениуса [18], для $G = C_n$ — из результатов А. И. Мальцева [11].

Рассмотрим случай $G = D_n$. Из результатов Фробениуса вытекает что если два представления f_1 и f_2 алгебры $\widetilde{G}$ в D_n L-эквивалентны,

Таблица 3

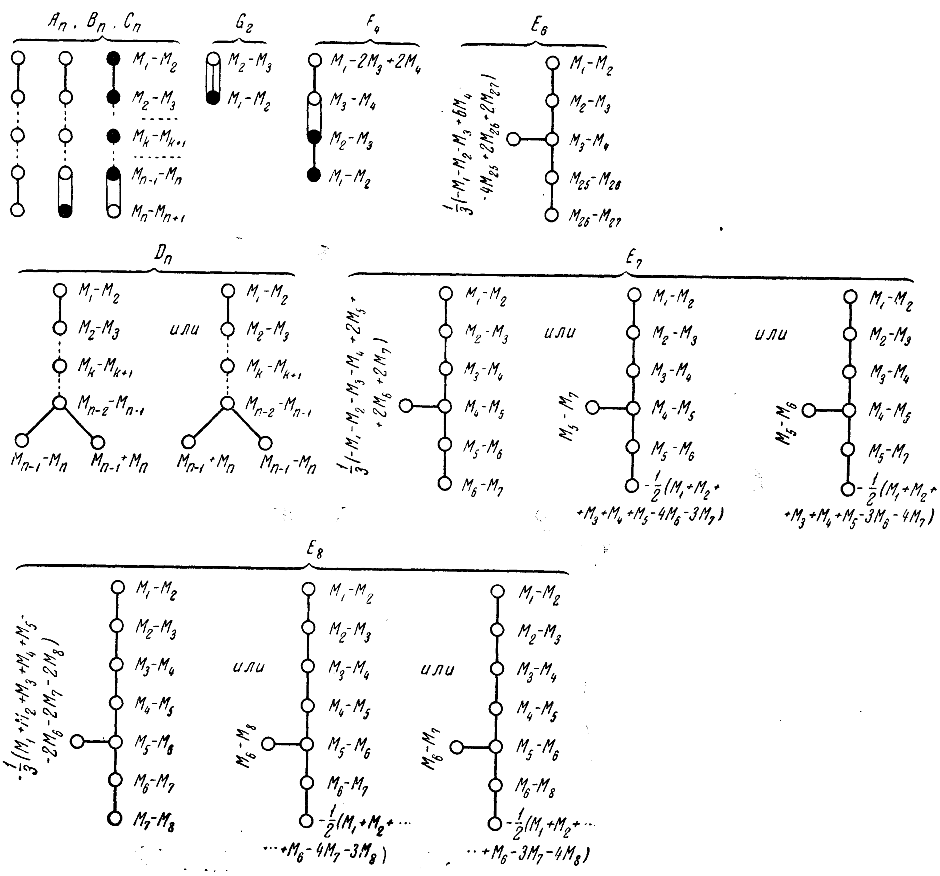
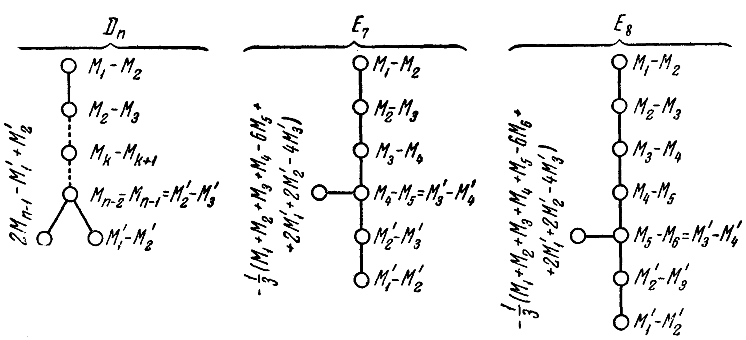


Таблица 4



но не эквивалентны, то $f_2 = Vf_1$, где V — внешний автоморфизм D_n, который соответствует внутреннему автоморфизму группы всех ортогональных матриц (включая и матрицы с детерминантом -1). Представления ωf_1 и $\omega V f_1$ всегда эквивалентны. Поэтому, в силу теоремы 1.3, для L-эквивалентности f_1 и Vf_1 необходима и достаточна эквивалентность $\omega' f_1$ и $\omega' Vf_1$, а для этого необходимо и достаточно, чтобы среди весов ωf_1 встречался нулевой вес. Для того чтобы f_1 и Vf_1 были не эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы ωf_1 разлагалось на четномерные неприводимые компоненты (см. [11], стр. 154). Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1.4. *Для того чтобы два представления f_1 и f_2 полупростой алгебры $\tilde{G}$ в алгебру D_n были L-эквивалентны, но не эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы:*

а) $f_2 = Vf_1$, *где V — внешний автоморфизм D_n, индуцированный внутренним автоморфизмом полной ортогональной группы;*

б) ωf_1 *разлагалось на четномерные неприводимые компоненты и содержало среди весов нулевой вес.*

Более сложен вопрос о связи между эквивалентностью и L-эквивалентностью представлений в особые алгебры Ли. В дальнейшем этот вопрос получит исчерпывающее решение для так называемых S-представлений, являющихся аналогом неприводимых представлений в A_n. Будет обнаружено, что линейно эквивалентные S-представления, как правило, эквивалентны. Исключения составляют только по одному классу L-эквивалентных представлений алгебр A_2 и G_2 в алгебру E_6, каждый из которых распадается на два подкласса эквивалентных представлений, переводимых друг в друга внешними автоморфизмами алгебры E_6. (См. теорему 1.1 главы IV, n° 35.)

n° 6. Обратимся теперь снова к задаче классификации подалгебр заданной полупростой алгебры G. Естественно назвать две такие подалгебры L-сопряженными, если при любом линейном представлении алгебры G они переходят в сопряженные подалгебры алгебры всех матриц. Все результаты относительно L-эквивалентности представлений, полученные в n°n° 2—5, легко переформулировать в терминах L-сопряженности подалгебр. Приведем в качестве примеров новые формулировки теоремы 1.1 и утверждения А) n° 3.

Теорема 1.5. *Пусть $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ — полупростые подалгебры полупростой алгебры G, и пусть $\tilde{\Pi}_1$ — возможная система простых корней для $\tilde{G}_1$, $\tilde{\Pi}_2$ — возможная система простых корней для $\tilde{G}_2$. Для того чтобы $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ были L-сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы были сопряжены в G системы $\tilde{\Pi}_1$ и $\tilde{\Pi}_2$.*

А') *Пусть $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ — полупростые подалгебры полупростой алгебры G. Если $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ L-сопряжены в алгебре G, то они L-сопряжены и в любой объемлющей G полупростой алгебре G^*.*

В соответствии с содержанием n° 2 мы черпаем инвариантные характеристики для подалгебр полупростой алгебры G, рассматривая линейные представления $\tilde{\varphi}$, которые индуцируются на подалгебрах линейными представлениями φ алгебры G. Особое значение будут при этом иметь линейное представление ω алгебры G в пространстве возможно меньшей размерности и присоединенное представление φ_G, которое действует в пространстве G по формуле

$$\varphi_G(x)\, y = x \circ y \quad (x, y \in G). \tag{1.22}$$

Линейное представление, которое индуцируется на подалгебре $\widetilde{G}$ простейшим представлением ω, мы будем обозначать через $\omega_{\widetilde{G}}$.

Представление, которое индуцируется на $\widetilde{G}$ присоединенным представлением φ_G, разлагается на компоненту, действующую в $\widetilde{G}$ и являющуюся присоединенным представлением подалгебры $\widetilde{G}$, и некоторую дополнительную компоненту, которую мы назовем **характеристическим представлением** подалгебры $\widetilde{G}$ и будем обозначать через $\chi_{\widetilde{G}}$.

Геометрическое значение характеристического представления видно из следующего. Перейдем к группам Ли $\mathfrak{G}$ и $\widetilde{\mathfrak{G}}$, отвечающим алгебрам G и $\widetilde{G}$, и рассмотрим однородную геометрию, определяемую парой $\mathfrak{G}$, $\widetilde{\mathfrak{G}}$. Группа $\mathfrak{G}$ истолковывается как группа преобразований некоторого многообразия $\mathfrak{M}$, а подгруппа $\widetilde{\mathfrak{G}}$ — как совокупность всех преобразований из $\mathfrak{G}$, оставляющих неподвижной некоторую точку M (стационарная подгруппа). Каждому преобразованию из $\widetilde{\mathfrak{G}}$ отвечает линейное преобразование в касательном пространстве к многообразию $\mathfrak{M}$ в точке M. Построенное таким образом линейное представление $\widetilde{G}$ совпадает с характеристическим представлением. Геометры называют соответствующую группу линейных преобразований **группой изотропии**.

Отметим очевидную теорему:

Теорема 1.6. *Если $\widetilde{G}$ — полупростая подалгебра алгебры G и подалгебра G' удовлетворяет включениям $\widetilde{G} \subset G' \subset G$, то характеристическое представление $\chi_{\widetilde{G}}$ подалгебры $\widetilde{G}$ содержит компоненту, размерность которой* * *равна $N(G') - N(\widetilde{G})$. Если G' — полупростая подалгебра, то эта компонента является ортогональным представлением.*

Задача, изучавшаяся в конце n° 4, может быть сформулирована в терминах подалгебр как задача реконструкции подалгебры $\widetilde{G}$ по представлению $\omega_{\widetilde{G}}$. Если обозначить через P операцию ортогонального проектирования идемпотента H алгебры G на идемпотент $\widetilde{H}$ подалгебры $\widetilde{G}$ (предполагается, что $\widetilde{H} \subseteq H$), то формулы таблицы 3 истолковываются, как дающие выражение для проекций $P\alpha$ простых корней α алгебры G через веса $\omega_{\widetilde{G}}$. Поскольку для любого простого корня β подалгебры $\widetilde{G}$ $(\beta, \alpha) = (\beta, P\alpha)$, формулы таблицы 3 позволяют легко вычислить скалярные произведения (β, α) и этим определить систему простых корней $\widetilde{G}$. То же самое можно повторить и для таблицы 4.

§ 2. Индексы представлений и подалгебр

n° 7. В простой алгебре Ли инвариантное относительно внутренних автоморфизмов скалярное произведение определено однозначно с точностью до численного множителя. В качестве нормирующего условия потребуем, чтобы квадрат длины наибольшего по длине корня

* Мы обозначаем через $N(R)$ размерность пространства R.

был равен 2. Условимся обозначать инвариантное скалярное произведение с указанной нормировкой через (x, y).

Пусть $\tilde{G}$ и G — простые алгебры, и пусть f — представление $\tilde{G}$ в G. Формула

$$(x, y)_1 = (f(x), f(y)) \tag{2.1}$$

определяет в $\tilde{G}$ новое инвариантное произведение $(x, y)_1$. Стало быть,

$$(f(x), f(y)) = j_f(x, y), \tag{2.2}$$

где j_f — численный множитель, не зависящий от x и y. Этот множитель мы будем называть *индексом представления* f.

Полагая в формуле (2.2) $x = y = \delta$, где δ — корень наибольшей длины, получим:

$$j_f = \frac{1}{2}(f(\delta), f(\delta)). \tag{2.3}$$

Пусть G_1, G_2, G_3 — три простые алгебры, и пусть f_1 — представление G_1 в G_2, f_2 — представление G_2 в G_3. Тогда, очевидно,

$$j_{f_2 f_1} = j_{f_2} j_{f_1}. \tag{2.4}$$

Если два представления $\tilde{G}$ в G переводятся одно в другое автоморфизмом $\tilde{G}$, то индексы этих представлений совпадают. Поэтому можно говорить *об индексе простой подалгебры в простой алгебре*. Если $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3$, то индекс G_1 в G_3 равен произведению индекса G_1 в G_2 на индекс G_2 в G_3.

n° 8. Лемма 2.1. *Пусть f — представление полупростой алгебры $\tilde{G}$ в полупростую алгебру G. Пусть $\tilde{K}$ и K — картановские подалгебры, соответственно, $\tilde{G}$ и G, выбранные так, чтобы $f(\tilde{K}) \subseteq K$. Если α — корень $\tilde{G}$ и Λ — вес какого-нибудь линейного представления φ алгебры G, то $(f(\alpha'), \Lambda)$ является целым числом* $\left(\alpha' = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}\right.$ согласно (0.5)$\left.\right)$.

Доказательство. Из соотношений (1.6) и (0.5) получим:

$$(f(\alpha'), \Lambda) = (\alpha', f^*(\Lambda)) = \frac{2(\alpha, f^*(\Lambda))}{(\alpha, \alpha)}. \tag{2.5}$$

Согласно лемме 1.1, $f^*(\Lambda)$ является весом линейного представления φf алгебры $\tilde{G}$ и, стало быть, $\frac{2(\alpha, f^*(\Lambda))}{(\alpha, \alpha)}$ — целое число (см., например, [9], добавление, n° 8).

Лемма 2.2. *Пусть f — представление полупростой алгебры $\tilde{G}$ в полупростую алгебру G, и пусть γ — произвольный корень $\tilde{G}$. Тогда $(f(\gamma'), f(\gamma'))$ является целым числом.*

Доказательство. Выберем картановские подалгебры $\tilde{K}$ и K алгебр $\tilde{G}$ и G так, чтобы $f(\tilde{K}) \subseteq K$. Пусть Π — система простых корней алгебры G. Имеем:

$$f(\gamma') = \sum_{\alpha \in \Pi} c_\alpha \cdot \alpha', \tag{2.6}$$

откуда

$$(f(\gamma'), f(\gamma')) = \sum_{\alpha \in \Pi} \frac{2}{(\alpha, \alpha)} c_\alpha (f(\gamma'), \alpha). \tag{2.7}$$

Пусть $\alpha \in \Pi$. Вектор $M \in K$, определенный формулами

$$\begin{aligned} &(M, \alpha') = 1, \\ &(M, \beta') = 0 \text{ для } \beta \neq \alpha, \ \beta \in \Pi, \end{aligned} \tag{2.8}$$

является старшим весом неприводимого представления алгебры G. Умножая соотношение (2.6) на M, получим: $c_\alpha = (f(\gamma'), M)$; в силу леммы 2.1, c_α — целые числа. Далее, корни α являются весами присоединенного представления G. Поэтому, в силу той же леммы, числа $(f(\gamma'), \alpha)$ также являются целыми. Наконец, $\frac{2}{(\alpha, \alpha)}$ (как отношение квадратов длин корней простой алгебры Ли (см. [3], n° 51)) может принимать только значения 1, 2 и 3. Таким образом, формула (2.7) показывает, что $(f(\gamma'), f(\gamma'))$ — целое число.

Из сопоставления леммы 2.2 с формулой (2.3) следует

Теорема 2.1. *Индекс j_f любого представления f является половиной целого числа.*

В действительности справедлива более сильная

Теорема 2.2. *Индекс j_f любого представления f является целым числом.*

Мы не знаем простого доказательства этого факта. Его справедливость устанавливается попутно из дальнейших довольно сложных рассмотрений. Здесь же мы сделаем только некоторые предварительные замечания. Прежде всего, безразлично, говорить ли об индексах представлений или подалгебр. Далее, в каждой алгебре имеется трехчленная подалгебра индекса 1, а именно, подалгебра, натянутая на векторы δ, e_δ, $e_{-\delta}$, где δ — какой-нибудь корень максимальной длины. Поэтому (см. n° 7) набор индексов всех простых подалгебр алгебры G совпадает с набором индексов одних только трехчленных подалгебр. В частности, для того чтобы убедиться, что индекс любой подалгебры является целым числом, достаточно проверить это для трехчленных подалгерб. Для случая, когда алгебра G является классической, такая проверка будет выполнена в n° 12, а для особых алгебр она вытекает из таблиц 16—20 главы III.

Теорема 2.3. *Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_s$ — представления простой алгебры $\widetilde{G}$ в простую алгебру G, и пусть*

$$f_i(x) \circ f_j(y) = 0 \quad (i \neq j; x, y \in \widetilde{G}). \tag{2.9}$$

Тогда $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_s$ также является представлением, и

$$j_f = j_{f_1} + j_{f_2} + \ldots + j_{f_s}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Утверждение, что f — представление, проверяется непосредственно. Далее, согласно (2.9) для любых $x, y, z \in \widetilde{G}$

$$(f_i(x \circ z), f_j(y)) = (f_i(x) \circ f_i(z), f_j(y)) = -(f_i(z), f_i(x) \circ f_j(y)) = 0.$$

Значит, $f_i(\widetilde{G} \circ \widetilde{G})$ ортогонально $f_j(\widetilde{G})$ $(i \neq j)$. Но, в силу простоты и некоммутативности $\widetilde{G}$, имеем: $\widetilde{G} \circ \widetilde{G} = \widetilde{G}$, и, стало быть, $f_i(\widetilde{G})$ ортогонально $f_j(\widetilde{G})$.

Пусть теперь δ — корень наибольшей длины для алгебры G. Из (2.3) находим:

$$j_f = \frac{1}{2}(f(\delta), f(\delta)) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}(f_k(\delta), f_k(\delta)) = \sum_{k=1}^{s} j_{f_k}. \tag{2.11}$$

n° 9. Исследуем вопрос о том, когда индекс j_f представления f алгебры $\widetilde{G}$ в G равен 1. Пусть e_δ — корневой вектор алгебры $\widetilde{G}$, соответствующий корню максимальной длины, и пусть

$$f(e_\delta) = \sum_{\alpha \in \Sigma} c_\alpha e_\alpha, \tag{2.12}$$

где Σ — система корней, а e_α — корневые векторы алгебры G. (Мы предполагаем, что идемпотенты $\widetilde{H}$ и H в $\widetilde{G}$ и G выбраны согласованным образом, т. е. $f(\widetilde{H}) \subseteq H$.) Из соотношения

$$\delta \circ e_\delta = (\delta, \delta)\, e_\delta = 2e_\delta \tag{2.13}$$

вытекает:

$$f(\delta) \circ f(e_\delta) = 2f(e_\delta). \tag{2.14}$$

Из (2.12) и (2.14) имеем:

$$\sum_{\alpha \in \Sigma} c_\alpha (\alpha, f(\delta))\, e_\alpha = 2\sum_{\alpha \in \Sigma} c_\alpha e_\alpha. \tag{2.15}$$

В силу равенства (2.15), из $c_\alpha \neq 0$ следует:

$$(\alpha, f(\delta)) = 2. \tag{2.16}$$

Из неравенства Буняковского и формулы (2.3) выводим:

$$(\alpha, f(\delta))^2 \leqslant (\alpha, \alpha)(f(\delta), f(\delta)) = 2(\alpha, \alpha)\, j_f, \tag{2.17}$$

причем равенство имеет место только в том случае, если α и $f(\delta)$ линейно зависимы. Из соотношений (2.16) и (2.17) вытекает:

$$j_f \geqslant \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \geqslant 1. \tag{2.18}$$

Следовательно, если $j_f = 1$, то из $c_\alpha \neq 0$ следует, что $(\alpha, \alpha) = 2$ и α пропорционально $f(\delta)$. Так как $(\alpha, f(\delta)) = (\alpha, \alpha) = 2$, то из пропорциональности α и $f(\delta)$ следует равенство

$$\alpha = f(\delta). \tag{2.19}$$

Итак, $c_\alpha \neq 0$ лишь для единственного значения α, и из (2.12) имеем:

$$f(e_\delta) = c_\alpha e_\alpha. \tag{2.20}$$

Аналогично выводится, что

$$f(e_{-\delta}) = c_{-\alpha} e_{-\alpha}. \tag{2.21}$$

Итак, если $j_f = 1$, то представление f переводит каждый корень максимальной длины из $\widetilde{G}$ в корень максимальной длины из G, а соответствующий корневой вектор в корневой вектор.

На языке подалгебр доказанное предложение можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2.4. *Пусть $\widetilde{G}$ — простая подалгебра простой алгебры G. Если индекс $\widetilde{G}$ в G равен 1, то корни максимальной длины из $\widetilde{G}$ и отвечающие им корневые векторы являются, соответственно, корнями и корневыми векторами и для алгебры G.*

n° 10. Пусть φ — линейное представление простой алгебры G. Легко видеть, что формула

$$(x, y)_1 = \operatorname{sp} \varphi(x) \varphi(y) \quad (x, y \in G) \tag{2.22}$$

определяет в G инвариантное скалярное произведение, и поэтому

$$\operatorname{sp} \varphi(x) \varphi(y) = l_\varphi (x, y), \tag{2.23}$$

где l_φ — численный множитель, не зависящий от x и y. Мы назовем l_φ индексом линейного представления φ. Легко доказываются формулы

$$l_{\varphi_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \varphi_s} = l_{\varphi_1} + l_{\varphi_2} + \ldots + l_{\varphi_s}, \tag{2.24}$$

$$l_{\varphi_1 \times \varphi_2} = N(\varphi_1) l_{\varphi_2} + N(\varphi_2) l_{\varphi_1} \tag{2.25}$$

($\varphi_1 \times \varphi_2$ обозначает кронекеровское произведение представлений φ_1 и φ_2, $N(\varphi)$ — размерность представления φ).

Пусть f — представление простой алгебры $\widetilde{G}$ в простую алгебру G, и пусть φ — линейное представление G. Очевидно,

$$j_f = \frac{l_{\varphi f}}{l_\varphi}. \tag{2.26}$$

Теорема 2.5. *Пусть φ — линейное неприводимое представление простой алгебры Ли G со старшим весом Λ. Имеем:*

$$l_\varphi = \frac{N(\varphi)}{N} (\Lambda, \Lambda + g), \tag{2.27}$$

где g — сумма всех положительных корней алгебры G, а N — размерность G.

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме:

Лемма 2.3. *Пусть φ — линейное неприводимое представление полупростой алгебры G со старшим весом Λ. Пусть Σ — система корней алгебры G, e_α ($\alpha \in \Sigma$) — корневые векторы и $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — ортогональный нормированный базис в идемпотенте H. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(h_i)^2 + \sum_{\alpha \in \Sigma} \frac{\varphi(e_\alpha) \varphi(e_{-\alpha})}{(e_\alpha, e_{-\alpha})} = (\Lambda, \Lambda + g) E. \tag{2.28}$$

Доказательство. Линейное преобразование, стоящее в левой части (2.28), перестановочно с $\varphi(x)$ при любом $x \in G$ (см., например, [17]) и, стало быть, по лемме Шура, имеет вид cE. Чтобы вычислить постоянную c, применим наше преобразование к вектору старшего веса ξ_Λ. Используя формулы

$$e_\alpha \circ e_{-\alpha} = (e_\alpha, e_{-\alpha})\,\alpha, \quad \varphi(\alpha)\,\xi_\Lambda = (\alpha, \Lambda)\,\xi_\Lambda, \quad \varphi(h_i)\,\xi_\Lambda = (h_i, \Lambda)\,\xi_\Lambda,$$
$$\varphi(e_\alpha)\,\xi_\Lambda = 0 \text{ при } \alpha > 0$$

(см., например, [9], добавление, n° 8), находим, что вектор ξ_Λ переходит при этом в вектор

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(h_i, \Lambda)^2 + \sum_{\substack{\alpha\in\Sigma\\ \alpha>0}}(\Lambda, \alpha)\right)\xi_\Lambda = (\Lambda, \Lambda + g)\,\xi_\Lambda, \tag{2.29}$$

откуда и следует соотношение (2.28).

Доказательство теоремы 2.5. Из формулы (2.23) выводим:

$$\operatorname{sp}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi(h_i)^2 + \sum_{\alpha\in\Sigma}\frac{\varphi(e_\alpha)\,\varphi(e_{-\alpha})}{(e_\alpha, e_{-\alpha})}\right) = l_\varphi N. \tag{2.30}$$

Сравнивая соотношения (2.30) и (2.28), получим (2.27).

Пример. Индексы неприводимых представлений трехчленной алгебры A_1.

Представлению φ, задаваемому схемой

$$\overset{k}{\circ}, \tag{2.31}$$

отвечает старший вес $\Lambda = \frac{k}{2}\alpha$, где α — единственный положительный корень алгебры A_1. Далее, $N = 3$, $N(\varphi) = k + 1$. Подставляя эти значения в формулу (2.27), получаем:

$$l_\varphi = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} = \binom{k+2}{3}. \tag{2.32}$$

Неприводимое представление φ простой алгебры G мы задаем набором чисел $\Lambda^\alpha = (\Lambda, \alpha')$ $\left(\alpha\right.$ пробегает простые корни G, Λ — старший вес φ, $\left.\alpha' = \frac{2}{(\alpha, \alpha)}\alpha\right)$. Поэтому для вычисления индексов представлений желательно преобразовать формулу (2.27) так, чтобы ее правая часть была выражена через числа Λ^α. В силу леммы 0.2 работы [9] (добавление, n° 31), для вектора g, участвующего в формуле (2.27),

$$g^\alpha = (g, \alpha') = 2 \quad (\alpha \in \Pi). \tag{2.33}$$

Сопоставляя формулы (2.27), (0.14) и (2.33), имеем:

$$l_\varphi = \frac{N(\varphi)}{N}\sum_{\alpha\in\Pi}\Lambda_\alpha(\Lambda^\alpha + 2). \tag{2.34}$$

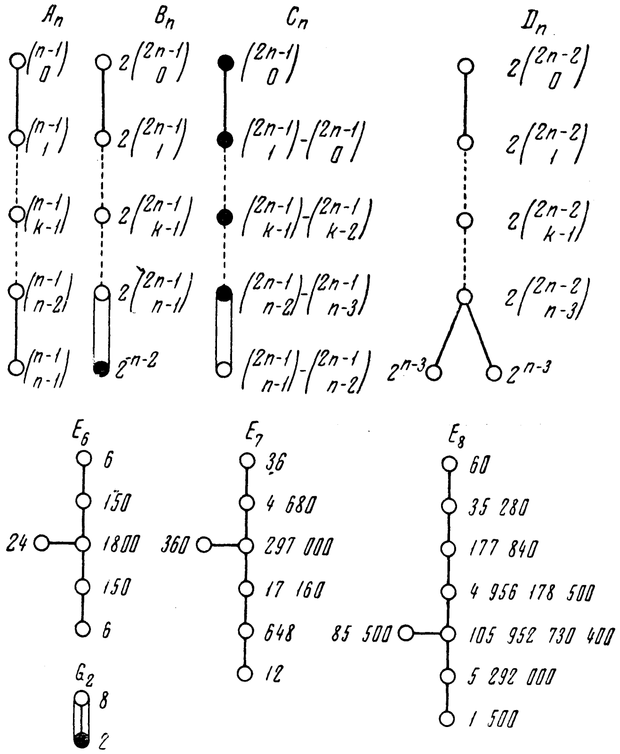
Числа Λ_α выражаются через Λ^α по формуле (0.13).

В таблице 5 указаны индексы базисных представлений простых алгебр Ли, вычисленные по формуле (2.34).

n° 11. Пусть G — одна из классических алгебр, и пусть ω — ее простейшее представление. В теории А. И. Мальцева представление f алгебры $\tilde{G}$ в G описывается линейным представлением $\omega f = \psi$ (ср. n°. 1).

Таблица 5

Индексы базисных представлений простых групп



Из таблицы 5 видно, что $l_\omega = 1$ для $G = A_n$ и C_n и $l_\omega = 2$ для $G = B_n$ и D_n. Из формулы (2.26) имеем:

$$j_f = \frac{l_{\omega f}}{l_\omega} = \begin{cases} l_\psi \text{ для } G = A_n \text{ и } C_n, \\ \dfrac{l_\psi}{2} \text{ для } G = B_n \text{ и } D_n. \end{cases} \tag{2.35}$$

Формула (2.35) вместе с формулами (2.34) и (2.24) в принципе решает вопрос об индексах представлений в классические алгебры.

Рассмотрим более детально тот случай, когда представляемая алгебра $\tilde{G}$ является трехчленной. Из соотношений (2.24), (2.32) и (2.35) выводим, что представлению $\psi = \psi_1 \dotplus \ldots \dotplus \psi_s$, где ψ_i задается схемой $\overset{k_i}{\circ}$, отвечает

$$j_f = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{k_i(k_i+1)(k_i+2)}{6} \quad \text{для } G = A_n \text{ и } C_n, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{k_i(k_i+1)(k_i+2)}{12} \quad \text{для } G = B_n \text{ и } D_n. \end{cases} \tag{2.36}$$

Отсюда нетрудно вывести, что индекс j_f всегда является *целым числом*: для случая $G = A_n$ и C_n является целым каждое из слагаемых в формуле (2.36); для случая B_n и D_n нужно учесть, что из ортогональности ψ вытекает, что среди чисел $k_1, k_2, \ldots, k_s$ каждое нечетное число встречается четное число раз.

§ 3. Целочисленные представления и подалгебры

n° 12. Пусть φ и ψ — неприводимые линейные представления полупростой алгебры G. Будем говорить, что φ и ψ **сравнимы между собой**, если для любого веса Λ представления φ и любого веса M представления ψ разность $\Lambda - \mathrm{M}$ выражается в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами через простые корни алгебры G. Поскольку каждый вес неприводимого представления может быть получен из старшего веса вычитанием простых корней (см., например, [9], добавление, n° 10), сформулированное условие равносильно требованию, чтобы разность старшего веса φ и старшего веса ψ выражалась с целыми коэффициентами через простые корни.

Пример. Присоединенное представление простой алгебры Ли сравнимо с нулевым представлением. Действительно, система весов присоединенного представления составляется из нуля и системы корней алгебры G. Каждый корень выражается с целыми коэффициентами через простые корни. Система весов нулевого представления состоит из одного нуля.

Теорема 3.1. *Пусть φ и ψ — неприводимые линейные представления простой алгебры Ли, Λ и M — их старшие веса. Положим* $a_i = \dfrac{2(\Lambda - \mathrm{M}, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ *(нумерация простых корней α_i — та же, что и в таблице 1). Для того чтобы φ было сравнимо с ψ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:*

для A_n: $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n \equiv 0 \pmod{n+1}$;

для B_n: $a_n \equiv 0 \pmod 2$;

для C_n: $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots \equiv 0 \pmod 2$;

для D_n: $a_{n-1} + a_n \equiv 0 \pmod 2$

и

$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{n-3} \equiv 0 \pmod 2$ *при четном* n,

$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{n-2} + \dfrac{a_{n-1} + a_n}{2} \equiv 0 \pmod 2$ *при нечетном* n;

для E_6: $a_1 + a_4 \equiv a_2 + a_5 \pmod 3$;

для E_7: $a_4 + a_6 + a_7 \equiv 0 \pmod 2$;

для E_8, F_4 *и* G_2 *все представления сравнимы между собой.*

Если G — произвольная полупростая алгебра и φ — ее неприводимое представление, то схема, задающая φ, распадается на связные компоненты, задающие неприводимые представления простых идеалов алгебры G. Для сравнимости двух неприводимых представлений алгебры G необходимо и достаточно, чтобы они индуцировали сравнимые представления на каждом простом идеале.

Доказательство. Пусть Π — система простых корней алгебры G. Согласно формулам (0.10) и (0.13),

$$\Lambda - \mathrm{M} = \sum_{\alpha \in \Pi} \frac{2(\Lambda_\alpha - \mathrm{M}_\alpha)}{(\alpha, \alpha)} \cdot \alpha, \quad \frac{2(\Lambda_\alpha - \mathrm{M}_\alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \sum_{\beta \in \Pi} g_{\alpha\beta} \frac{2(\Lambda - \mathrm{M}, \beta)}{(\beta, \beta)}.$$

Используя таблицу 2, убеждаемся, что для всех типов простых алгебр условия на $\frac{2(\Lambda - \mathrm{M}, \beta)}{(\beta, \beta)}$, перечисленные в формулировке теоремы, необходимы и достаточны для целочисленности всех значений $\frac{2(\Lambda_\alpha - \mathrm{M}_\alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ ($\alpha \in \Pi$). Далее, если система Π распадается на взаимно ортогональные подсистемы $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_s$, то $g_{\alpha\beta} = 0$ для $\alpha \in \Pi_i$, $\beta \in \Pi_j$ $(i \neq j)$. Поэтому, если $\alpha \in \Pi_i$, то $\frac{2(\Lambda_\alpha - \mathrm{M}_\alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ выражается только через $\frac{2(\Lambda - \mathrm{M}, \beta)}{(\beta, \beta)}$ $(\beta \in \Pi_i)$.

Линейное представление полупростой алгебры G мы назовем целочисленным, если все неприводимые компоненты сравнимы между собой, другими словами, если разность любых двух его весов разлагается по простым корням с целыми коэффициентами. В частности, неприводимое представление всегда целочисленно. Присоединенное представление полупростой алгебры также всегда целочисленно.

n° 13. Полупростую подалгебру $\tilde{G}$ полупростой алгебры G мы назовем целочисленной, если любое целочисленное представление алгебры G индуцирует целочисленное представление на $\tilde{G}$.

Теорема 3.2. *Пусть $\tilde{G}$ — полупростая подалгебра полупростой алгебры G, и пусть $\tilde{H} \subseteq H$ — их идемпотенты. Для того чтобы $\tilde{G}$ являлась целочисленной подалгеброй, необходимо и достаточно, чтобы корни алгебры G при ортогональном проектировании на $\tilde{H}$ переходили в целочисленные линейные комбинации простых корней $\tilde{G}$.*

Для доказательства достаточно заметить, что если представление φ алгебры G индуцирует на $\tilde{G}$ представление $\tilde{\varphi}$, то система весов представления $\tilde{\varphi}$ получается из системы весов представления φ посредством ортогонального проектирования на $\tilde{H}$ (см. [4], теорема 3 или [9], добавление, теорема 0.11).

Теорема 3.3. *Для целочисленности подалгебры $\tilde{G}$ достаточно, чтобы хоть одно точное целочисленное представление алгебры G индуцировало на $\tilde{G}$ целочисленное представление.*

Доказательство прямо вытекает из теоремы 3.2, если использовать следующую лемму:

Лемма 3.1. *Если φ — точное линейное представление полупростой алгебры G, то каждый корень G представляется как разность двух весов представления φ.*

Доказательство леммы 3.1. Если для некоторого корня δ утверждение леммы не выполняется, то для любого веса M элементы $\mathrm{M} + \delta$ и $\mathrm{M} - \delta$ не являются весами. Стало быть, $(\mathrm{M}, \delta) = 0$ (см., например, [9], добавление, n° 8) и $\varphi(\delta) = 0$, что противоречит точности φ.

Следствие из теоремы 3.3. *Для целочисленности подалгебры $\tilde{G}$ необходимо и достаточно, чтобы все неприводимые компоненты ее характеристического представления $\chi_{\tilde{G}}$ были сравнимы с нулевым представлением.*

Легко выводятся также следующие свойства целочисленных подалгебр:

А. Если $\tilde{\tilde{G}}$ — целочисленная подалгебра в $\tilde{G}$ и $\tilde{G}$ — целочисленная подалгебра в G, то $\tilde{\tilde{G}}$ — целочисленная подалгебра в G.

Б. Идеал всегда является целочисленной подалгеброй.

В. Если подалгебра разлагается в прямую сумму целочисленных подалгебр, то она также целочисленна.

Полезно ввести понятие целочисленности для представлений одних алгебр в другие. Представление f полупростой алгебры $\tilde{G}$ в полупростую алгебру G, мы назовем целочисленным, если целочисленна подалгебра $f(\tilde{G})$ алгебры G или (что равносильно) если для любого целочисленного линейного представления φ алгебры G целочисленно линейное представление φf.

§ 4. Две общие теоремы о полупростых подалгебрах

n° 14. Теорема 4.1. *Пусть элементы λ_i, u_{λ_i}, $u_{-\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ полупростой алгебры Ли G отличны от нуля и удовлетворяют соотношениям*

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i \circ \lambda_j &= 0, \\ \lambda_i \circ u_{\lambda_j} &= (\lambda_i, \lambda_j)\, u_{\lambda_j}, \\ \lambda_i \circ u_{-\lambda_j} &= -(\lambda_i, \lambda_j)\, u_{-\lambda_j}, \\ u_{\lambda_i} \circ u_{-\lambda_j} &= 0 \text{ при } i \neq j, \\ u_{\lambda_i} \circ u_{-\lambda_i} &= (u_{\lambda_i}, u_{-\lambda_i})\, \lambda_i, \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.1}$$

причем $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ линейно независимы и $(u_{\lambda_i}, u_{-\lambda_i}) \neq 0$ ((x, y) обозначает какое-нибудь инвариантное невырожденное скалярное произведение в алгебре G). Тогда минимальная подалгебра $\tilde{G}$ алгебры G, объемлющая эти элементы, является полупростой. Система $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ является возможной системой простых корней для $\tilde{G}$, а u_{λ_i}, $u_{-\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — соответствующие корневые векторы.

Доказательство. 1) Положим

$$\left.\begin{aligned} (u_{\lambda_{i_1}} \circ u_{\lambda_{i_2}}) \circ \ldots \circ u_{\lambda_{i_s}} &= u_{i_1 i_2 \ldots i_s}, \\ (u_{-\lambda_{i_1}} \circ u_{-\lambda_{i_2}}) \circ \ldots \circ u_{-\lambda_{i_s}} &= v_{i_1 i_2 \ldots i_s}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Из формул (4.1) выводим:

а) Если $h = \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda_i$, то

$$\begin{aligned} h \circ \lambda_i &= 0, \\ h \circ u_{i_1 i_2 \ldots i_s} &= (h, \lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_s})\, u_{i_1 i_2 \ldots i_s}, \\ h \circ v_{i_1 i_2 \ldots i_s} &= -(h, \lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_s})\, v_{i_1 i_2 \ldots i_s}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

б) Коммутаторы $u_{i_1i_2\ldots i_s} \circ u_{j_1j_2\ldots j_t}$, $v_{i_1\ldots i_s} \circ v_{j_1\ldots j_t}$ и $u_{i_1\ldots i_s} \circ v_{j_1\ldots j_t}$ выражаются в виде линейной комбинации λ_k, $u_{k_1k_2\ldots k_r}$, $v_{k_1k_2\ldots k_r}$.

Из утверждений а) и б) легко вытекает

в) В подалгебре $\widetilde{G}$ можно выбрать базис из векторов λ_i, $u_{i_1\ldots i_s}$, $v_{i_1\ldots i_s}$.

Положим

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \sum_{i=1}^{m} a_i\lambda_i, \\ u_\lambda &= \sum_{i=1}^{m} b_i u_{\lambda_i}, \\ u_{-\lambda} &= \sum_{i=1}^{m} c_i u_{-\lambda_i} \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

и подберем коэффициенты a_i, b_i, c_i так, чтобы

$$\left.\begin{aligned} (\lambda, \lambda_i) &= (\lambda, \lambda), \\ b_i c_i (u_{\lambda_i}, u_{-\lambda_i}) &= a_i. \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Тогда

$$\lambda \circ u_\lambda = (\lambda, \lambda)\, u_\lambda, \quad \lambda \circ u_{-\lambda} = -(\lambda, \lambda)\, u_{-\lambda}, \quad u_\lambda \circ u_{-\lambda} = \lambda.$$

Следовательно, линейная оболочка $\widetilde{G}_0$ элементов λ, u_λ, $u_{-\lambda}$ является трехчленной простой алгеброй, и элемент λ — корень этой алгебры.

Рассмотрим линейное представление φ, которое индуцируется на G_0 присоединенным представлением $\widetilde{G}$. Из предложения а) вытекает:

$$\left.\begin{aligned} \lambda \circ \lambda_i &= 0, \\ \lambda \circ u_{i_1\ldots i_s} &= (\lambda, \lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_s})\, u_{i_1\ldots i_s}, \\ \lambda \circ v_{i_1\ldots i_s} &= -(\lambda, \lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_s})\, v_{i_1\ldots i_s}. \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Стало быть, векторы λ_i, $u_{i_1\ldots i_s}$ и $v_{i_1\ldots i_s}$ (те, которые не равны нулю) являются весовыми векторами для представления φ. При этом векторы λ_i имеют вес 0, а векторы $u_{i_1\ldots i_s}$, $v_{i_1\ldots i_s}$ имеют вес

$$\pm \frac{(\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_s}, \lambda)}{(\lambda, \lambda)} \lambda. \tag{4.7}$$

В силу соотношений (4.5), это выражение равно

$$\pm s\lambda, \tag{4.8}$$

и, следовательно, веса векторов $u_{i_1\ldots i_s}$ не равны нулю. Отметим, что все веса представления φ оказались целочисленными кратными корня λ.

Пусть теперь I — ненулевой идеал алгебры $\widetilde{G}$. Пространство I инвариантно относительно представления φ. Система весов представления φ в этом подпространстве является подсистемой полной системы весов в пространстве $\widetilde{G}$, и, следовательно, она также состоит из целочисленных кратных вектора λ. Заметим теперь, что если некоторое линейное представление трехчленной простой алгебры имеет вес вида $s\lambda$, где s — целое число, то оно имеет и вес 0. Тем самым доказано, что всякий ненулевой идеал I алгебры $\widetilde{G}$ содержит отличный от нуля элемент вида $\sum_{i=1}^{m} a_i\lambda_i$.

2) Докажем, что если I — идеал в алгебре $\widetilde{G}$ и $h = \sum_{i=1}^{m} a_i\lambda_i \in I$, то из $(h, \lambda_i) \neq 0$ вытекает, что $\lambda_i, u_{\lambda_i}, u_{-\lambda_i} \in I$. Действительно, вместе с h к идеалу I принадлежат $\frac{h \circ u_{\lambda_i}}{(h, \lambda_i)} = u_{\lambda_i}$ и $\frac{h \circ u_{-\lambda_i}}{-(h, \lambda_i)} = u_{-\lambda_i}$, а вместе с u_{λ_i} и $u_{-\lambda_i}$ принадлежит $\frac{u_{\lambda_i} \circ u_{-\lambda_i}}{(u_{\lambda_i}, u_{-\lambda_i})} = \lambda_i$.

3) Из пунктов 1) и 2) вытекает, что если система $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ не распадается на две ортогональные подсистемы, то подалгебра $\widetilde{G}$ является простой. Действительно, согласно пункту 1), всякий ненулевой идеал I алгебры $\widetilde{G}$ содержит не равный нулю элемент $h = \sum_{i=1}^{m} a_i\lambda_i$. Хотя бы для одного номера i произведение (h, λ_i) не равно нулю, и, согласно пункту 2), $\lambda_i, u_{\lambda_i}, u_{-\lambda_i} \in I$. Далее, для любого значения j найдется цепочка $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_s}$, такая, что

$$(\lambda_i, \lambda_{i_1}) \neq 0, \quad (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}) \neq 0, \ldots, (\lambda_{i_s}, \lambda_j) \neq 0, \tag{4.9}$$

и, повторно применяя утверждение пункта 2), мы докажем, что $\lambda_j, u_{\lambda_j}, u_{-\lambda_j} \in I$ при $j = 1, 2, \ldots, m$. Значит, $I = \widetilde{G}$, и простота $\widetilde{G}$ доказана.

4) Докажем теперь, что если $(\lambda_i, \lambda_j) = 0$, то $u_{\lambda_i} \circ u_{\lambda_j} = u_{-\lambda_i} \circ u_{-\lambda_j} = 0$. Имеем:

$$u_{\lambda_k} \circ (u_{-\lambda_i} \circ u_{-\lambda_j}) = (u_{\lambda_k} \circ u_{-\lambda_i}) \circ u_{-\lambda_j} + u_{-\lambda_i} \circ (u_{\lambda_k} \circ u_{-\lambda_j}). \tag{4.10}$$

Используя формулы (4.1) и условие $(\lambda_i, \lambda_j) = 0$, выводим, что это выражение равно нулю при любом k. Следовательно, $u_\lambda \circ (u_{-\lambda_i} \circ u_{-\lambda_j})$ также равно нулю, откуда вытекает, что $u_{-\lambda_i} \circ u_{-\lambda_j} = 0$, ибо в противном случае этот вектор являлся бы крайним для представления φ, имея вес -2λ, что невозможно (определение крайних векторов см. в [9], добавление n° 9). Аналогично доказывается, что $u_{\lambda_i} \circ u_{\lambda_j} = 0$.

5) Пусть система $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ распадается на взаимно ортогональные подсистемы $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ и $\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_m$. Тогда, согласно пункту 4), каждый из векторов $\lambda_i, u_{\lambda_i}, u_{-\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ перестановочен с каждым из векторов $\lambda_j, u_{\lambda_j}, u_{-\lambda_j}$ $(j = s + 1, \ldots, m)$. Обозначим через $\widetilde{G}_1$ подалгебру, порождаемую $\lambda_i, u_{\lambda_i}, u_{-\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, а через $\widetilde{G}_2$ — подалгебру, порождаемую $\lambda_j, u_{\lambda_j}, u_{-\lambda_j}$ $(j = s + 1, \ldots, m)$. Очевидно, что алгебра $\widetilde{G}$ разлагается в прямую сумму $\widetilde{G}_1$ и $\widetilde{G}_2$.

6) Из сопоставления пунктов 3) и 5) вытекает, что подалгебра $\widetilde{G}$ всегда является полупростой.

7) Из утверждения 1 а) и 1 в) видно, что: а) векторы вида $\Sigma a_i\lambda_i$ образуют картановскую подалгебру алгебры $\widetilde{G}$, б) векторы $u_{i_1 \ldots i_s}, v_{i_1 \ldots i_s}$, отличные от нуля, являются корневыми векторами, в) все корни $\widetilde{G}$ имеют вид $\pm(\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_s})$.

Отсюда легко усмотреть, что относительно лексикографического упорядочения по базису $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ система простых корней алгебры $\tilde{G}$ совпадает с системой $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

n°15. Теорема 4.2. *Пусть G_0 — полупростая подалгебра полупростой алгебры G. Пусть $H_0 \subseteq H$ — их идемпотенты и*

$$G = [H] \dotplus \sum_{\beta \in \Sigma} G_\beta \tag{4.11}$$

— каноническое разложение G. Если

$$e_\lambda = h + \sum_{\beta \in \Gamma} e_\beta \quad \left(h \in [H], \quad \Gamma \subseteq \Sigma, \quad e_\beta \in G_\beta, \quad e_\beta \neq 0\right) \tag{4.12}$$

*— корневой вектор подалгебры G_0, отвечающий корню λ, то $h = 0$ и при ортогональном проектировании на H_0 система Γ проектируется в λ**.

Доказательство этой теоремы вытекает из общей алгебраической леммы о том, что если сумма линейно независимых собственных векторов некоторого линейного преобразования A также является собственным вектором для A, то все эти векторы принадлежат одному и тому же собственному значению преобразования A. Эту лемму следует применить к преобразованию A_x, определяемому формулой

$$A_x y = x \circ y, \tag{4.13}$$

где $x \in H_0$. Векторы e_λ и e_β $(\beta \in \Gamma)$ являются собственными для A_x, и соответствующие собственные значения равны (x, λ) и (x, β). Если $h \neq 0$, то h — также собственный вектор для A_x, причем соответствующее собственное значение равно нулю. Отсюда, если $h \neq 0$, то $(x, \lambda) = 0$ для любого $x \in H_0$, что невозможно, ибо $(\lambda, \lambda) \neq 0$. Итак, $h = 0$. Далее, имеем: $(x, \lambda) = (x, \beta)$ для любых $x \in H_0$ и $\beta \in \Gamma$, и, стало быть, $\lambda - \beta$, ортогонально H_0.

Следствие. *Если Γ_λ — совокупность всех корней алгебры G, которые при ортогональном проектировании на H_0 проектируются в λ, то λ представляется в виде*

$$\lambda = \sum_{\alpha \in \Gamma_\lambda} c_\alpha \alpha. \tag{4.14}$$

Действительно, пусть

$$\left.\begin{aligned} e_\lambda &= \sum_{\alpha \in \Gamma_1} e_\alpha, \\ e_{-\lambda} &= \sum_{\alpha \in \Gamma_2} e'_{-\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

---

* Для случая, когда G_0 изоморфно A_1, эта теорема содержится в работе А. И. Мальцева [11].

($\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Sigma$, $e_\alpha \in G_\alpha$, $e'_{-\alpha} \in G_{-\alpha}$, e_α, $e'_{-\alpha} \neq 0$). Перемножая эти равенства и сохраняя при этом только члены, принадлежащие $[H]$ (ср. разложение (4.11)), получим:

$$(e_\lambda, e_{-\lambda})\lambda = \sum_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} (e_\alpha, e'_{-\alpha})\alpha. \tag{4.16}$$

Согласно теореме 4.2, $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_\lambda$, $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_\lambda$, и, стало быть, разложение (4.16) имеет вид (4.14).

Глава II

Регулярные подалгебры. *R*-подалгебры и *S*-подалгебры

§ 5. Перечисление регулярных подалгебр

n°16. Пусть G — полупростая алгебра Ли. Подалгебру $\widetilde{G}$ алгебры G мы называем регулярной, если для нее можно построить базис из элементов некоторой картановской подалгебры K алгебры G и корневых векторов алгебры G относительно K.

С каждой картановской подалгеброй K алгебры G связано каноническое разложение G:

$$G = K \dot{+} \sum_{\alpha \in \Sigma}{}^{\cdot} G_\alpha, \tag{5.1}$$

где Σ — система корней G и G_α — корневые подпространства. Пусть $\widetilde{G}$ — регулярная подалгебра алгебры G. Согласно определению, при надлежащем выборе картановской подалгебры K будем иметь:

$$\widetilde{G} = \widetilde{K} \dot{+} \sum_{\alpha \in \widetilde{\Sigma}}{}^{\cdot} G_\alpha, \tag{5.2}$$

где $\widetilde{K} \subseteq K$, $\widetilde{\Sigma} \subseteq \Sigma$.

Для того чтобы подпространство $\widetilde{G}$, задаваемое формулой (5.2), являлось подалгеброй, необходимо и достаточно, чтобы

A_1) если $\alpha, \beta \in \widetilde{\Sigma}$ и $\alpha + \beta \in \Sigma$, то $\alpha + \beta \in \widetilde{\Sigma}$;

A_2) если $\alpha \in \widetilde{\Sigma}$ и $-\alpha \in \widetilde{\Sigma}$, то $\alpha \in \widetilde{K}$ (или $(\Sigma) \cap (-\Sigma) \subset \widetilde{K}$).

Для того чтобы подалгебра $\widetilde{G}$ была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы дополнительно выполнялись условия

P_1) если $\alpha \in \widetilde{\Sigma}$, то $-\alpha \in \widetilde{\Sigma}$

и

P_2) $\widetilde{K}$ является линейной оболочкой $\widetilde{\Sigma}$.

(Условие A_2) следует из P_1) — P_2).)

Из сказанного видно, что для отыскания всех регулярных подалгебр алгебры G достаточно найти все подсистемы $\widetilde{\Sigma}$ системы Σ, удовлетворяющие условию A_1). Из них полупростым подалгебрам отвечают те и только те системы $\widetilde{\Sigma}$, которые удовлетворяют условию P_1); при этом $\widetilde{\Sigma}$ является системой корней для соответствующей подалгебры $\widetilde{G}$. Таким образом, задача перечисления всевозможных регулярных подалгебр в заданной полупростой алгебре G представляет собой чисто комбинаторную задачу. Решение этой задачи является важным этапом в изучении произвольных подалгебр полупростых алгебр Ли. В настоящей работе нас интересуют исключительно полупростые подалгебры *. Полная классификация регулярных полупростых подалгебр дается таблицами 9 и 11.

n°17. Полупростые алгебры Ли удобнее описывать не полными системами корней, а системами простых корней. Пусть Σ — система корней полупростой алгебры G. Подсистему Γ системы Σ мы будем называть П-системой, если

B_1) из $\alpha \in \Gamma$, $\beta \in \Gamma$ вытекает $\alpha - \beta \overline{\in} \Sigma$,

B_2) Γ — линейно независимая система.

Теорема 5.1. *Пусть корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ полупростой алгебры G образуют П-систему. Рассмотрим минимальную подалгебру $\tilde{G}$ алгебры G, содержащую корневые векторы $e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_m}$, $e_{-\alpha_1}, \ldots, e_{-\alpha_m}$. Подалгебра $\tilde{G}$ является регулярной полупростой подалгеброй и система $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ является возможной системой простых корней для G. Всякая регулярная полупростая подалгебра алгебры G сопряжена одной из подалгебр, получаемых этой конструкцией.*

Доказательство. Согласно теореме 4.1, $\tilde{G}$ — полупростая подалгебра и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — возможная система простых корней для $\tilde{G}$. Регулярность $\tilde{G}$ очевидна. Остается доказать последнее утверждение теоремы.

Пусть $\tilde{G}_1$ — произвольная полупростая регулярная подалгебра алгебры G. Найдется подалгебра $\tilde{G}_2$, сопряженная $\tilde{G}_1$ и такая, что $\tilde{\Sigma} \subseteq \Sigma$, где $\tilde{\Sigma}$ — система корней $\tilde{G}_2$, Σ — система корней G. Пусть Γ — система простых корней алгебры $\tilde{G}_2$. Согласно [3] (n°35), система Γ линейно независима и из $\alpha, \beta \in \Gamma$ вытекает, что $\alpha - \beta \overline{\in} \tilde{\Sigma}$. Принимая во внимание условие A_1) n°16, имеем отсюда: $\alpha - \beta \overline{\in} \Sigma$. Итак, выполнены требования B_1) и B_2), и, стало быть, Γ является П-системой.

В силу теоремы 5.1, задача классификации полупростых регулярных подалгебр в полупростой алгебре G сводится к задаче перечисления всевозможных подмножеств системы корней Σ, являющихся П-системами.

Теорема 5.2. *Если G — полупростая алгебра ранга n, то всякая П-система содержится в П-системе, состоящей из n элементов.*

Доказательство. Если П-система Γ состоит менее чем из n элементов, то существуют корни, не выражающиеся линейно через элементы Γ. Присоединяя к Γ наименьший из этих элементов, получим снова П-систему. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не придем к П-системе из n элементов.

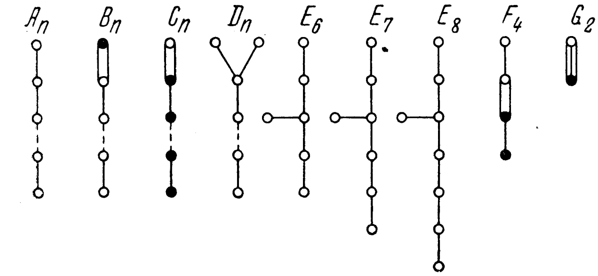
Очевидно, что всякая подсистема П-системы сама является П-системой, и из теоремы 5.2 вытекает, что в алгебре ранга n достаточно найти П-системы из n элементов.

В [2] (см. также [3]) доказано, что всякой П-системе, не распадающейся на две ортогональные подсистемы, соответствует одна из схем таблицы 6.

---

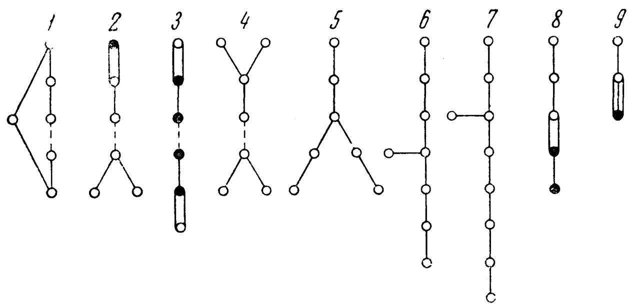
* Изучение неполупростых регулярных подалгебр проводилось В. В. Морозовым [12], который нашел все максимальные среди таких подалгебр. Новое более простое описание неполупростых максимальных подалгебр было предложено Ф. И. Карпелевичем [10].

Таблица 6



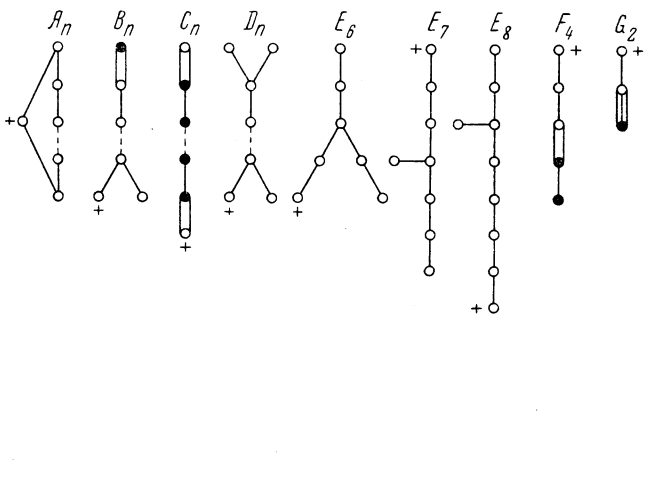
Совершенно аналогично можно доказать, что если некоторое множество корней не распадается и удовлетворяет условию B_1), то соответствующая схема содержится или в таблице 6, или в таблице 7.

Таблица 7



Будем говорить, что корень δ выражается через корни $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$, если $\delta = \gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} + \ldots + \gamma_{i_s}$ и для $k = 1, 2, \ldots, s$ $\gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} + \ldots + \gamma_{i_k} \in \Sigma$. Пусть корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ образуют нераспадающуюся П-систему. Упорядочим Σ так, чтобы они были положительны, и присоединим к ним наименьший из корней, выражающихся через $\pm\alpha_1, \ldots, \pm\alpha_m$. Мы получим нераспадающуюся систему $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \delta)$, которую назовем **расширением** системы $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Полученная система удовлетворяет условию B_1), но не удовлетворяет условию B_2), и поэтому ее схема содержится в таблице 7. В таблице 8 указаны найденные прямым вычислением расширения для каждой из схем таблицы 6 (присоединяемый корень отмечен знаком $+$).

Таблица 8



Поскольку каждая из схем таблицы 7 находит свое место в таблице 8, имеем следующую лемму:

Лемма 5.1. *Всякая нераспадающаяся система корней, удовлетворяющая условию* B_1), *получается расширением некоторой нераспадающейся* П-*системы.*

Пусть теперь П-система Г распадается на s взаимно ортогональных нераспадающихся подсистем. Схемы этих компонент содержатся в таблице 6. Расширением Г мы назовем систему, получающуюся расширением одной из ее компонент. Таким образом, систему Г можно расширить s различными способами. Если из расширенной системы Г вычеркнуть один из элементов той компоненты, которая подверглась расширению, то получится новая П-система Г′, состоящая из того же числа элементов, что и Г. Мы будем говорить, что Г′ получена из Г элементарным преобразованием. Нетрудно усмотреть, что если $\widetilde{G}$ и $\widetilde{G}'$ — подалгебры, отвечающие системам Г и Г′, то $\widetilde{G} \supseteq \widetilde{G}'$ и равенство $\widetilde{G} = \widetilde{G}'$ возможно лишь в случае $\Gamma = \Gamma'$.

Теорема 5.3. *Пусть G — полупростая алгебра ранга n. Всякая* П-*система, состоящая из n элементов, может быть получена из некоторой системы простых корней алгебры G цепочкой элементарных преобразований.*

Доказательство. Пусть $\Gamma_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — некоторая П-система, и пусть δ — наименьший из корней, не выражающихся через $\pm\alpha_1, \ldots, \pm\alpha_n$. Легко видеть, что система $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \delta)$ удовлетворяет условию B_1) и, следовательно, распадается на компоненты перечисленных в таблице 6 типов. Поскольку среди $n+1$ векторов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \delta)$ имеется n линейно независимых, то только одна из этих компонент принадлежит таблице 7, а остальные содержатся в таблице 6. Используя лемму 5.1, замечаем, что система $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \delta)$ является расширением некоторой П-системы Γ_2. Очевидно, что Γ_1 получается из Γ_2 элементарным преобразованием и $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$. Продолжая тот же процесс, построим П-системы $\Gamma_3, \Gamma_4, \ldots$, причем Γ_{k-1} получается элементарным преобразованием из Γ_k и $\Gamma_{k-1} \neq \Gamma_k$. Если $\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \widetilde{G}_3, \ldots$ — подалгебры, отвечающие системам $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$, то $\widetilde{G}_1 \subset \widetilde{G}_2 \subset \widetilde{G}_3 \subset \ldots$ (включение строгое). Поэтому указанный процесс должен оборваться. Но он может оборваться лишь на $\widetilde{G}_r = G$. Тогда при надлежащем упорядочении $\Sigma \quad \Gamma_r$ является системой простых корней для G, и теорема доказана.

Разыскание регулярных подалгебр в полупростых алгебрах сводится к аналогичной задаче для простых алгебр при помощи следующей очевидной теоремы:

Теорема 5.4. *Пусть G — полупростая алгебра Ли и*

$$G = G_1 \dotplus \ldots \dotplus G_r \tag{5.3}$$

— ее разложение в прямую сумму простых идеалов. Если для $k = 1, 2, \ldots, r$ $\widetilde{G}_k$ — регулярная подалгебра алгебры G_k, то

$$\widetilde{G} = \widetilde{G}_1 \dotplus \ldots \dotplus \widetilde{G}_r \tag{5.4}$$

— регулярная подалгебра алгебры G. Описанным способом могут быть получены все регулярные подалгебры алгебры G.

Теоремы 5.2 и 5.3 дают алгоритм, позволяющий, отправляясь от системы простых корней алгебры, найти всевозможные системы простых корней для ее регулярных полупростых подалгебр. Двум таким системам отвечают сопряженные подалгебры тогда и только тогда, когда эти системы получаются одна из другой преобразованием из вейлевской группы (S) (см. [21]). Устраняя подобные повторения, приходим к следующим результатам.

Для классических алгебр A_n, B_n, C_n, D_n типы регулярных полупростых подалгебр даются таблицей 9. Все подалгебры одного и того

Таблица 9

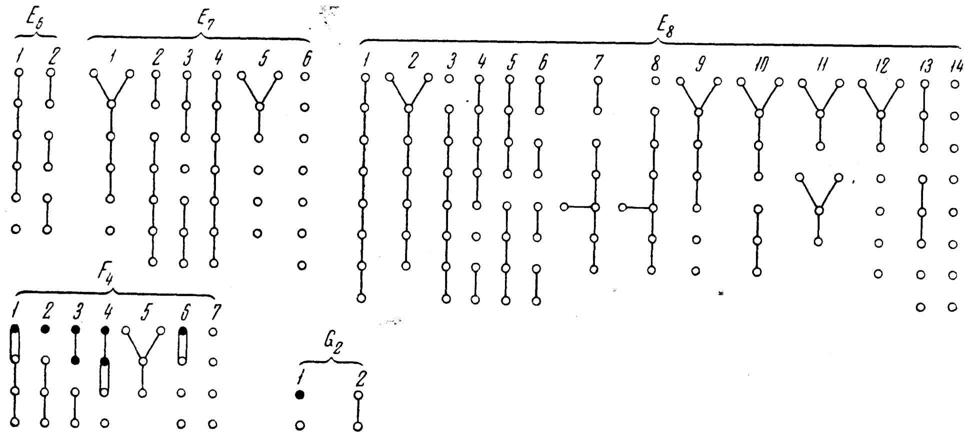
Регулярные полупростые подалгебры классических алгебр

Алгебра	Типы подалгебр	
A_n	$A_{k_1}+\ldots+A_{k_s}$	$\left(\sum_{i=1}^{s}(k_i+1)=n+1\right)$
B_n	$A_{k_1}+\ldots+A_{k_s}+D_{m_1}+\ldots+D_{m_r}+B_m$	$\left(\sum_{i=1}^{s}(k_i+1)+\sum_{i=1}^{r}m_i+m=n\right)$
C_n	$A_{k_1}+\ldots+A_{k_s}+C_{l_1}+\ldots+C_{l_r}$	$\left(\sum_{i=1}^{s}(k_i+1)+\sum_{i=1}^{r}l_i=n\right)$
D_n	$A_{k_1}+\ldots+A_{k_s}+D_{m_1}+\ldots+D_{m_r}$	$\left(\sum_{i=1}^{s}(k_i+1)+\sum_{i=1}^{r}m_i=n\right)$

$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_s \geqslant 0, \quad l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_r > 0, \quad m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_r > 1, \quad m \geqslant 0$

же типа сопряжены. Исключением являются только типы подалгебр алгебры D_n, отвечающие нечетным $k_1, k_2, \ldots, k_s$ и $r=0$. Каждому типу соответствуют два класса сопряженных подалгебр, переводимых друг в друга внешним автоморфизмом D_n.

Таблица 10



Для особых алгебр таблица 10 указывает типы подалгебр наивысшего ранга. Каждому из этих типов отвечает один класс сопряженных подалгебр. Для того чтобы определить типы подалгебр меньшего ранга, достаточно (в силу теоремы 5.2) рассмотреть всевозможные подсхемы каждой из схем таблицы 10. Вычисление показывает, что подсхемам одинакового вида отвечают сопряженные подалгебры. Единственными исключениями являются: для алгебры E_7 схемы

1) ○—○—○—○—○ ○, 2) ○—○—○—○—○, 3) ○—○—○ ○ ○,

4) ○—○—○ ○, 5) ○ ○ ○ ○, 6) ○ ○ ○

и для алгебры E_8 схемы

1) ○—○—○—○—○—○—○, 2) ○—○—○—○—○ ○,

3) ○—○—○ ○—○—○, 4) ○—○—○ ○ ○, 5) ○ ○ ○ ○,

каждой из которых отвечают 2 класса сопряженных подалгебр.

Мы будем задавать регулярные полупростые подалгебры, указывая их тип (например, подалгебры алгебры E_7, указанные в таблице 10, принадлежат типам D_6+A_1, A_5+A_2, $2A_3+A_1$, A_7, D_4+3A_1, $7A_1$ *). Вообще говоря, этого достаточно, ибо, как правило, все подалгебры одного типа сопряжены между собой. Дополнительно примем следующие соглашения. Подалгебру, отвечающую сплошь зачерненной схеме, будем обозначать знаком, снабженным волной (например, в отличие от знака A_2, отвечающего схеме ○—○, знак $\tilde{A}_2$ отвечает схеме ●—● и т. п.). В перечисленных выше исключительных случаях, когда одной схеме отвечают две несопряженные подалгебры, будем отличать их, снабжая одну штрихом, другую двумя штрихами: например, $[A_5+A_1]'$, $[A_5+A_1]''$, $[4A_1]'$, $[4A_1]''$ и т. п. В таблице 11 перечислены все регулярные подалгебры особых простых алгебр Ли, отличные от нулевой подалгебры и всей алгебры **. Как видно из таблицы, их число равно 4 для G_2, 22 для F_4, 19 для E_6, 45 для E_7 и 75 для E_8.

n°18. Максимальные регулярные подалгебры.

Теорема 5.5. *Пусть G — полупростая алгебра Ли, Σ — система ее корней, Π — система простых корней, Π_α — система, получающаяся из Π отбрасыванием элемента α, δ — наименьший корень*

---

* Ради краткости, мы пишем $7A_1$ вместо $A_1+A_1+A_1+A_1+A_1+A_1+A_1$, $2A_3$ вместо A_3+A_3 и т. д.

** Обозначения $[\ ]'$ и $[\ ]''$ уточняются следующим образом: в случае алгебры E_7 подалгебры, снабженные одним штрихом, содержатся в подалгебре A_7, а снабженные двумя штрихами — не содержатся в ней; в случае алгебры E_8 подалгебры, снабженные одним штрихом, содержатся в A_8, а снабженные двумя штрихами — не содержатся в ней.

Таблица 11

Регулярные полупростые подалгебры особых простых алгебр Ли

G_2

A_2	A_1
$A_1+\widetilde{A}_1$	$\widetilde{A}_1$

F_4

B_4	$2A_1+\widetilde{A}_1$
$A_3+\widetilde{A}_1$	$A_1+\widetilde{A}_2$
$A_2+\widetilde{A}_2$	C_3
C_3+A_1	$3A_1$
D_4	A_2
B_2+2A_1	B_2
$4A_1$	$A_1+\widetilde{A}_1$
B_3	$2A_1$
B_2+A_1	$\widetilde{A}_2$
$A_2+\widetilde{A}_1$	$\widetilde{A}_1$
A_3	A_1

E_6

A_5+A_1	A_2+2A_1
$3A_2$	$4A_1$
A_5	D_4
$2A_2+A_1$	A_3
A_4+A_1	A_2+A_1
D_5	$3A_1$
A_3+2A_1	A_2
A_4	$2A_1$
A_3+A_1	A_1
$2A_2$	

E_7

D_6+A_1	$3A_2$	D_4
A_5+A_2	$2A_3$	A_4
$2A_3+A_1$	A_6	$[A_3+A_1]'$
A_7	$6A_1$	$[A_3+A_1]''$
D_4+3A_1	D_5	$2A_2$
$7A_1$	A_4+A_1	A_2+2A_1
E_6	$2A_2+A_1$	$[4A_1]'$
D_5+A_1	$[A_5]'$	$[4A_1]''$
A_4+A_2	$[A_5]''$	A_3
$A_3+A_2+A_1$	D_4+A_1	A_2+A_1
$[A_5+A_1]'$	A_3+A_2	$[3A_1]'$
$[A_5+A_1]''$	$5A_1$	$[3A_1]''$
D_6	A_2+3A_1	A_2
D_4+2A_1	$[A_3+2A_1]'$	$2A_1$
A_3+3A_1	$[A_3+2A_1]''$	A_1

E_8

A_8	$A_4+A_2+A_1$	A_4+A_3	A_4+2A_1	A_2+3A_1
D_8	A_5+A_2	A_5+2A_1	A_6	$2A_2+A_1$
A_7+A_1	$3A_2+A_1$	$[A_7]'$	$A_3+A_2+A_1$	D_4
$A_5+A_2+A_1$	E_6+A_1	$[A_7]''$	$[A_5+A_1]'$	$[4A_1]'$
$2A_4$	E_7	$3A_2$	$[A_5+A_1]''$	$[4A_1]''$
$4A_2$	D_7	E_6	A_4+A_2	A_2+2A_1
A_6+A_2	D_5+2A_1	D_6	$2A_2+2A_1$	$2A_2$
A_7+A_1	D_4+3A_1	D_4+2A_1	D_5	A_3+A_1
D_6+2A_1	$2A_3+A_1$	$[2A_3]'$	$[A_3+2A_1]'$	A_4
D_5+A_3	$7A_1$	$[2A_3]''$	$[A_3+2A_1]''$	A_3
$2D_4$	D_6+A_1	D_5+A_1	A_3+A_2	A_2+A_1
D_4+4A_1	D_5+A_2	A_3+3A_1	A_5	$3A_1$
$2A_3+2A_1$	$A_3+A_2+2A_1$	D_4+A_2	$5A_1$	A_2
$8A_1$	D_4+A_3	$6A_1$	A_4+A_1	$2A_1$
A_6+A_1	A_3+4A_1	A_2+4A_1	D_4+A_1	A_1

алгебры G. Обозначим через $G(\alpha)$ подалгебру, порождаемую элементами e_β, $e_{-\beta}$ ($\beta \in \Pi_\alpha$) и e_δ, $e_{-\delta}$. Обозначим через $G[\alpha]$ подалгебру, порождаемую элементами e_β, $e_{-\beta}$ ($\beta \in \Pi_\alpha$) и α, e_α. Каждая из подалгебр $G[\alpha]$ ($\alpha \in \Pi$), а также каждая из подалгебр $G(\alpha)$ ($\alpha \in \Pi$), отличная от G, является максимальной регулярной подалгеброй алгебры G. Любая максимальная регулярная подалгебра сопряжена одной из перечисленных подалгебр.

Доказательство. Ф. И. Карпелевич [10] доказал, что подалгебры $G[\alpha]$ ($\alpha \in \Pi$) исчерпывают неполупростые максимальные регулярные подалгебры. Из алгоритма, развитого в n°17, легко видеть, что подалгебры $G(\alpha)$ ($\alpha \in \Pi$) исчерпывают все полупростые максимальные регулярные подалгебры.

Замечание. *Подалгебры $G(\alpha)$ и $G[\alpha]$ являются максимальными не только среди регулярных подалгебр, но и среди всех вообще подалгебр алгебры G.*

Действительно, пусть G^* — произвольная подалгебра, объемлющая $G(\alpha)$ или $G[\alpha]$. Тогда G^* содержит идемпотент алгебры G и, в силу следствия теоремы 6.1, регулярна.

В таблице 12 для каждой простой алгебры G перечисляются типы подалгебр $G(\alpha)$, отличных от G (нумерация простых корней — та же, что и в таблице 1). Для каждой подалгебры указана ее размерность N.

Таблица 12

Регулярные полупростые максимальные подалгебры простых алгебр Ли

G	$G(\alpha)$	N	G	$G(\alpha)$	N
B_n	$G(\alpha_k)=D_k+B_{n-k}$ $(k=2, 3,\ldots, n)$	$k(2k-1)+$ $+(n-k)\times$ $\times(2n-2k+1)$	E_6	$G(\alpha_2)=G(\alpha_4)=G(\alpha_6)=A_5+A_1$ $G(\alpha_3)=3A_2$	38 24
C_n	$G(\alpha_k)=C_k+C_{n-k}$ $(k=1, 2,\ldots, n)$	$k(2k+1)+$ $+(n-k)\times$ $\times(2n-2k+1)$	E_7	$G(\alpha_1)=G(\alpha_5)=D_6+A_1$ $G(\alpha_2)=G(\alpha_4)=A_5+A_2$ $G(\alpha_3)=2A_3+A_1$ $G(\alpha_7)=A_7$	69 43 33 63
D_n	$G(\alpha_k)=D_k+D_{n-k}$ $(k=2, 3,\ldots, n-2)$	$k(2k-1)+$ $+(n-k)\times$ $\times(2n-2k-1)$	E_8	$G(\alpha_1)=A_1+E_7$ $G(\alpha_2)=A_2+E_6$ $G(\alpha_3)=A_3+D_5$ $G(\alpha_4)=2A_4$ $G(\alpha_5)=A_5+A_2+A_1$ $G(\alpha_6)=A_7+A_1$ $G(\alpha_7)=D_8$ $G(\alpha_8)=A_8$	136 86 60 48 46 66 136 80
G_2	$G(\alpha_1)=A_1+\widetilde{A}_1$ $G(\alpha_2)=A_2$	6 8			
F_4	$G(\alpha_1)=A_1+C_3$ $G(\alpha_2)=A_2+\widetilde{A}_2$ $G(\alpha_3)=A_3+\widetilde{A}_1$ $G(\alpha_4)=B_4$	24 16 18 36			

Для некоторых задач полезно знать максимальные регулярные полупростые подалгебры, т. е. такие собственные регулярные полупростые подалгебры $\widetilde{G}$ алгебры G, для которых не существует *регулярной полупростой* подалгебры G^*, удовлетворяющей включениям $\widetilde{G} \subset G^* \subset G$. Полный перечень таких подалгебр получится, если к регулярным полупростым максимальным подалгебрам, перечисленным в таблице 12, присоединить регулярные подалгебры, перечисленные в таблице 12а.

Таблица 12а

G	$\widetilde{G}$	N	G	$\widetilde{G}$	N
A_n	$A_k + A_{n-1-k}$	$k(k+2)+$	D_n	D_{n-1}	$(n-1)(2n-3)$
	$(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$	$+(n-1+k)(n+1+k)$		A_{n-1}	$(n-1)(n+1)$
B_n	B_{n-1}	$(n-1)(2n-1)$	E_6	D_5	45
C_n	A_{n-1}	$(n-1)(n+1)$	E_7	E_6	78

Алгебры B_n, C_n и D_n могут быть описаны как алгебры всех линейных преобразований A пространства R, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{sp} A = 0, \qquad Q(A\xi, \eta) + Q(\xi, A\eta) = 0, \tag{5.5}$$

где $Q(\xi, \eta)$ — заданная в R невырожденная билинейная форма, симметрическая или кососимметрическая. При этом каждая из подалгебр $G(\alpha_k)$ может быть описана как совокупность матриц, переводящих в себя некоторое невырожденное подпространство $\widetilde{R}$ (размерности $2k$). (В силу условия (5.5), эта совокупность автоматически оставляет инвариантным и ортогональное дополнение $\widetilde{R}$.)

Аналогичное описание допускают и подалгебры $G[\alpha]$ классических алгебр. Именно: подалгебра $G[\alpha_k]$ может быть описана как совокупность всех матриц из алгебры, оставляющих инвариантным фиксированное подпространство размерности k. В случае B_n, C_n и D_n дополнительно требуется, чтобы это подпространство было изотропно.

§ 6. Признаки регулярности. Способы построения регулярных подалгебр

n°19. Простым видоизменением определения регулярности является следующий необходимый и достаточный признак:

Подалгебра $\widetilde{G}$ полупростой алгебры G регулярна тогда и только тогда, когда при надлежащем выборе картановской подалгебры K алгебры G из

$$h + \sum_{\alpha \in \Sigma} e_\alpha \in \widetilde{G} \tag{6.1}$$

($h \in K$, e_α принадлежит корневому подпространству G_α) вытекает:

$$h \in \widetilde{G}, \qquad e_\alpha \in \widetilde{G} \quad (\alpha \in \Sigma). \tag{6.2}$$

Ниже выводятся более содержательные достаточные признаки. При этом используется следующая лемма из линейной алгебры:

Лемма 6.1. *Пусть векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ принадлежат попарно различным собственным значениям линейного преобразования A, и пусть $\tilde{R}$ — какое-нибудь инвариантное подпространство пространства R, где действует A. Если $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \in \tilde{R}$, то $x_i \in \tilde{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.*

Элемент x полупростой алгебры G назовем регулярным, если линейное преобразование A_x, определенное формулой

$$A_x y = x \circ y, \tag{6.3}$$

имеет максимальное возможное число различных характеристических корней. В этом случае совокупность G_x всех элементов из G, перестановочных с x, является картановской подалгеброй. Таким образом, регулярный элемент включается (и притом единственным образом) в некоторую картановскую подалгебру. Далее, легко видеть, что если элемент h принадлежит картановской подалгебре K, то для его регулярности необходимо и достаточно, чтобы скалярные произведения (h, α) (α пробегает корни алгебры G) были отличны от нуля и попарно различны между собой.

Теорема 6.1. *Если подалгебра $\tilde{G}$ полупростой алгебры G содержит регулярный элемент x алгебры G, то она регулярна.*

Доказательство. Рассмотрим каноническое разложение алгебры G относительно картановской подалгебры $K = G_x$ (ср. (0.1)):

$$G = K \dot{+} \sum_{\alpha \in \Sigma}{}^{\boldsymbol{\cdot}} G_\alpha. \tag{6.4}$$

Пусть

$$h + \sum_{\alpha \in \Sigma} e_\alpha \in \tilde{G} \quad (h \in K,\ e_\alpha \in G_\alpha). \tag{6.5}$$

Рассмотрим линейное преобразование A_x, определенное формулой (6.3). Векторы e_α $(\alpha \in \Sigma)$ и h принадлежат попарно различным собственным значениям преобразования A_x. В силу леммы 6.1, из (6.5) вытекает: $h \in \tilde{G}$, $e_\alpha \in \tilde{G}$ $(\alpha \in \Sigma)$, и регулярность $\tilde{G}$ доказана.

Следствие. *Если ранг подалгебры $\tilde{G}$ равен рангу алгебры G, то $\tilde{G}$ — регулярная подалгебра.*

Действительно, $\tilde{G}$ содержит некоторый идемпотент алгебры G и, стало быть, заведомо содержит регулярный элемент алгебры G.

Из теоремы 2.4 непосредственно вытекает следующая

Теорема 6.2. *Если подалгебра $\tilde{G}$ простой алгебры G принадлежит одному из типов A_n, E_6, E_7 или E_8 и если индекс $\tilde{G}$ в G равен 1, то $\tilde{G}$ регулярна.*

Теорема 6.3. *Пусть $\tilde{G}$ — регулярная подалгебра полупростой алгебры G. Тогда радикал $\tilde{G}_0$ и максимальная полупростая подалгебра $\tilde{G}'$ алгебры $\tilde{G}$ также регулярны в G. Более точно, если*

$$G = K \dot{+} \sum_{\alpha \in \Sigma}{}^{\boldsymbol{\cdot}} G_\alpha \tag{6.6}$$

— каноническое разложение полупростой алгебры G и если

$$\widetilde{G} = \widetilde{K} \dotplus \sum_{\alpha \in \widetilde{\Sigma}}{}^{\cdot} G_\alpha \qquad (\widetilde{K} \subseteq K, \quad \widetilde{\Sigma} \subseteq \Sigma), \tag{6.7}$$

то

$$\widetilde{G}_0 = \widetilde{K}_0 \dotplus \sum_{\alpha \in \widetilde{\Sigma}_0}{}^{\cdot} G_\alpha, \quad \widetilde{G}' \text{ сопряжена } \widetilde{K}' \dotplus \sum_{\alpha \in \widetilde{\Sigma}'}{}^{\cdot} G_\alpha, \tag{6.8}$$

где $\widetilde{\Sigma}' = (\widetilde{\Sigma}) \cap (-\widetilde{\Sigma})$, $\widetilde{\Sigma}_0 = \widetilde{\Sigma} \setminus \widetilde{\Sigma}'$, $\widetilde{K}'$ — линейная оболочка $\widetilde{\Sigma}'$, $\widetilde{K}_0$ — ортогональное дополнение $\widetilde{K}'$ в $\widetilde{K}$. Если система $\widetilde{\Sigma}$ содержит вместе с каждым элементом α и элемент $-\alpha$, то

$$\widetilde{G}_0 \circ \widetilde{G} = 0. \tag{6.9}$$

Доказательство. Согласно теореме Н. Г. Чеботарева ([14], теорема 3), подалгебра $\widetilde{K}_0 + \sum_{\alpha \in \widetilde{\Sigma}_0} G_\alpha$ является разрешимой. Подалгебра $\widetilde{K}' \dotplus \sum_{\alpha \in \widetilde{\Sigma}'}{}^{\cdot} G_\alpha$ удовлетворяет условиям P_1) — P_2) n°16, и, следовательно, она — полупростая. Эти две подалгебры в сумме дают $\widetilde{G}$, а их пересечение равно нулю. Отсюда вытекает, что первая из них — радикал, а вторая — максимальная полупростая подалгебра алгебры $\widetilde{G}$. Остается заметить, что, по теореме А. И. Мальцева [11], все максимальные полупростые подалгебры сопряжены между собой.

Если из $\alpha \in \widetilde{\Sigma}$ следует, что $-\alpha \in \widetilde{\Sigma}$, то $\widetilde{\Sigma}' = \Sigma$, $\widetilde{\Sigma}_0$ пусто и $\widetilde{G}_0 = \widetilde{K}_0$. Отсюда легко вывести справедливость соотношения (6.9).

n°20. Пусть G — линейная полупростая алгебра Ли, действующая в пространстве R. Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_s$ — подпространства пространства R. Условимся обозначать через $(G; R_1, R_2, \ldots, R_s)$ совокупность всех линейных преобразований из G, оставляющих инвариантным каждое из подпространств $R_1, R_2, \ldots, R_s$, и через $(G; R_1, R_2, \ldots, R_s)_0$ — совокупность элементов из $(G; R_1, R_2, \ldots, R_s)$, имеющих в каждом из подпространств $R_1, R_2, \ldots, R_s$ след, равный нулю. Очевидно, $(G; R_1, R_2, \ldots, R_s)$ и $(G; R_1, R_2, \ldots, R_s)_0$ — подалгебры.

Теорема 6.4. *Пусть G — линейная полупростая алгебра Ли, действующая в пространстве R. Пусть Δ — система весов G и R_Λ — подпространство, составленное из всех векторов веса Λ. Положим*

$$R_{\widetilde{\Delta}} = \sum_{\Lambda \in \widetilde{\Delta}} R_\Lambda \qquad (\widetilde{\Delta} \subset \Delta). \tag{6.10}$$

Подалгебры $\widetilde{G} = (G; R_{\widetilde{\Delta}_1}, \ldots, R_{\widetilde{\Delta}_s})$ и $\widetilde{G}_0 = (G; R_{\widetilde{\Delta}_1}, \ldots, R_{\widetilde{\Delta}_s})_0$ являются регулярными.

Доказательство. Заметим, что, в силу леммы 6.1, если векторы $\xi_{\Lambda_1}, \xi_{\Lambda_2}, \ldots, \xi_{\Lambda_k}$ принадлежат попарно различным весам $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$, то из

$$\sum_{j=1}^{k} \xi_{\Lambda_j} \in R_{\widetilde{\Delta}} \tag{6.11}$$

вытекает:

$$\xi_{\Lambda_j} \in R_{\widetilde{\Delta}} \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{6.12}$$

Для того чтобы элемент

$$h + \sum_{\alpha \in \Sigma} e_\alpha \tag{6.13}$$

принадлежал $\widetilde{G}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $i = 1, 2, \ldots, s$ и для любого $\xi_\Lambda \in R_\Lambda$ $(\Lambda \in \widetilde{\Delta}_i)$

$$\Big(h + \sum_{\alpha \in \Sigma} e_\alpha\Big) \xi_\Lambda = h\xi_\Lambda + \sum_{\alpha \in \Sigma} e_\alpha \xi_\Lambda \in R_{\widetilde{\Delta}_i}. \tag{6.14}$$

Те из векторов $h\xi_\Lambda$, $e_\alpha \xi_\Lambda$, которые отличны от нуля, имеют попарно различные веса, и поэтому

$$h\xi_\Lambda \in R_{\widetilde{\Delta}_i}, \quad e_\alpha \xi_\Lambda \in R_{\widetilde{\Delta}_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, s;\ \alpha \in \Sigma), \tag{6.15}$$

а следовательно,

$$h \in \widetilde{G}, \quad e_\alpha \in \widetilde{G} \quad (\alpha \in \Sigma). \tag{6.16}$$

Тем самым регулярность $\widetilde{G}$ доказана.

Далее, пусть

$$h + \sum_{\alpha \in \Sigma} e_\alpha \in \widetilde{G}_0. \tag{6.17}$$

Тогда, по доказанному выше,

$$h \in \widetilde{G}, \quad e_\alpha \in \widetilde{G} \quad (\alpha \in \Sigma). \tag{6.18}$$

Легко видеть, что в каждом из подпространств $R_{\widetilde{\Delta}_i}$ любое преобразование e_α имеет след, равный нулю. Стало быть, $e_\alpha \in \widetilde{G}_0$ $(\alpha \in \Sigma)$ и, в силу включения (6.17), имеем также: $h \in \widetilde{G}_0$. Таким образом, регулярность $\widetilde{G}_0$ доказана.

Следствие. 1. *Нормализатор регулярной подалгебры является регулярной подалгеброй.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{G}$ — нормализатор подалгебры G' в алгебре G. Рассмотрим присоединенное линейное представление алгебры G. Тогда $\widetilde{G} = (G; G')$.

Следствие 2. *Пусть G — линейная полупростая алгебра, действующая в пространстве R, и пусть все веса G имеют кратность 1. Пусть $R_1, \ldots, R_s$ — подпространства пространства R, причем можно выбрать в R базис из весовых векторов так, чтобы его подсистемы образовали базисы в $R_1, \ldots, R_s$. Тогда $(G; R_1, \ldots, R_s)$ и $(G; R_1, \ldots, R_s)_0$ являются регулярными подалгебрами в G.*

Следствие 3. *Пусть G — алгебра всех линейных преобразований пространства R, имеющих след нуль, и пусть $R_1, R_2, \ldots, R_s$ — независимые подпространства пространства R. Подалгебры $(G; R_1, \ldots, R_s)$ и $(G; R_1, \ldots, R_s)_0$ алгебры G регулярны.*

Доказательство вытекает из того, что все веса G имеют кратность 1 и всякий базис пространства R можно рассматривать, как базис из весовых векторов (если в качестве картановской подалгебры алгебры G принять совокупность всех преобразований, записывающихся по выбранному базису диагональными матрицами).

Пусть в пространстве R задана невырожденная билинейная форма $Q(\xi, \eta)$, симметрическая или кососимметрическая. Набор подпространств $R_1, \ldots, R_s$ пространства R назовем допустимым, если:

а) пространства $R_1, \ldots, R_s$ независимы и попарно ортогональны (относительно Q),

б) каждое из пространств R_i либо изотропно (т. е. $Q(x, y) = 0$ для любых $x, y \in R_i$), либо невырождено (т. е. если для некоторого $x \in R_i$ и всех $y \in R_i$ $Q(x, y) = 0$, то $x = 0$),

в) среди подпространств $R_1, \ldots, R_s$ нет нечетномерных невырожденных, если R четномерно, и имеется не более одного нечетномерного невырожденного подпространства, если R нечетномерно.

Следствие 4. *Пусть в пространстве R задана невырожденная билинейная форма $Q(\xi, \eta)$, симметрическая или кососимметрическая, и пусть G — совокупность всех линейных преобразований A пространства R, удовлетворяющих условиям*

$$\mathrm{sp}\, A = 0, \quad Q(A\xi, \eta) + Q(\xi, A\eta) = 0. \tag{6.19}$$

Если $R_1, \ldots, R_s$ — допустимый набор подпространств пространства R, то $(G; R_1, \ldots, R_s)$ и $(G; R_1, \ldots, R_s)_0$ являются регулярными подалгебрами алгебры G.

Доказательство вытекает из того, что все веса G имеют кратность 1 и можно рассматривать как базис из весовых векторов любой базис $\xi_1, \ldots, \xi_N$, удовлетворяющий условиям

$$(\xi_i, \xi_j) = \begin{cases} 0, \text{ если } & i + j \neq N + 1, \\ 1, \text{ если } & i + j = N + 1, \ i \leqslant j. \end{cases} \tag{6.20}$$

Сопоставляя следствия 3 и 4 теоремы 6.4 с таблицей 9, нетрудно доказать следующие теоремы:

Теорема 6.5. *Пусть G — алгебра всех линейных преобразований со следом нуль, действующих в пространстве R. Совокупность всех полупростых регулярных подалгебр алгебры G дается формулой*

$$(G; R_1, \ldots, R_s)_0, \tag{6.21}$$

где $(R_1, \ldots, R_s)$ пробегает всевозможные наборы подпространств пространства R, образующие прямое разложение R.

Теорема 6.6. *Пусть в пространстве R задана невырожденная форма $Q(\xi, \eta)$, симметрическая или кососимметрическая, и пусть G — алгебра всех линейных преобразований, подчиненных условиям*

$$\mathrm{sp}\, A = 0, \quad Q(A\xi, \eta) + Q(\xi, A\eta) = 0. \tag{6.22}$$

Совокупность всех полупростых регулярных подалгебр алгебры G дается формулой

$$(G;\ R_1, \ldots, R_s)_0, \tag{6.23}$$

где $(R_1, \ldots, R_s)$ пробегает всевозможные допустимые наборы подпространств пространства R, удовлетворяющие условию: сумма размерностей невырожденных подпространств плюс удвоенная сумма размерностей изотропных подпространств равна размерности R.

n° 21. Пусть G — линейная полупростая алгебра, действующая в пространстве R, и пусть $\widetilde{R}$ — подпространство пространства R. Мы будем обозначать через $[G; \widetilde{R}]$ совокупность всех линейных преобразований из G, переводящих в нуль подпространство $\widetilde{R}$.

Теорема 6.7. *Если в подпространстве $\widetilde{R}$ можно построить базис из весовых векторов линейной полупростой алгебры G, то $\widetilde{G} = [\widetilde{G}; R]$ является регулярной подалгеброй алгебры G.*

Доказательство. Если ξ_Λ — вектор веса Λ, то из

$$\Big(h + \sum_{\alpha \in \Sigma} e_\alpha\Big)\xi_\Lambda = 0 \tag{6.24}$$

(h — элемент картановской подалгебры, e_α — корневые элементы алгебры G) вытекает:

$$h\xi_\Lambda = 0, \quad e_\alpha\xi_\Lambda = 0 \quad (\alpha \in \Sigma). \tag{6.25}$$

Действительно, если бы среди векторов $h\xi_\Lambda$, $e_\alpha\xi_\Lambda$ $(\alpha \in \Sigma)$ имелись отличные от нуля, то, принадлежа к попарно различным весам, они были бы линейно независимы. Из доказанного следует, что если $h + \sum_{\alpha \in \Sigma} e_\alpha \in \widetilde{G}$, то $h \in \widetilde{G}$ и $e_\alpha \in \widetilde{G}$ $(\alpha \in \Sigma)$, что доказывает теорему.

Следствие 1. *Централизатор регулярной подалгебры регулярен.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{G}$ — централизатор подалгебры G' в алгебре G. Рассмотрим присоединенное линейное представление алгебры G. Тогда, по определению централизатора, $\widetilde{G} = [G; G']$.

Следствие 2. *Идеал полупростой алгебры является всегда регулярной подалгеброй.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{G}$ — идеал алгебры G. Существует дополнительный идеал G', такой, что $G = \widetilde{G} \dotplus G'$. Рассмотрим присоединенное линейное представление алгебры G. Имеем:

$$\widetilde{G} = [G; G'].$$

Следствие 3. *Пусть G — полупростая алгебра Ли и h — ее семирегулярный элемент*. Централизатор $\widetilde{G}$ элемента h является регулярной подалгеброй.*

Доказательство вытекает из сопоставления следствия 2 с теоремой Ф. Р. Гантмахера ([1], теорема 11), согласно которой семирегулярный элемент можно включить в картановскую подалгебру и, следовательно, порождаемая им прямая является регулярной подалгеброй.

---

* Элемент x называется семирегулярным, если линейное преобразование A_x, определенное формулой (6.3), приводится к диагональной форме.

n° 22. Вычисление нормализатора и централизатора регулярной полупростой подалгебры.

Теорема 6.8. *Нормализатор $(G; G')$ регулярной полупростой подалгебры G' в полупростой алгебре G разлагается в прямую сумму:*

$$(G; G') = G' \dot{+} \tilde{G} \dot{+} G_0, \tag{6.26}$$

где $\tilde{G}$ — полупростая и G_0 — коммутативная регулярные подалгебры. Централизатор подалгебры G' дается при этом формулой

$$[G; G'] = \tilde{G} \dot{+} G_0. \tag{6.27}$$

Всякая полупростая подалгебра, имеющая G' своим идеалом, сопряжена некоторой подалгебре алгебры $G' \dot{+} \tilde{G}$. Если ранг G равен n, а ранги подалгебр G' и $\tilde{G}$ равны, соответственно, r и s, то размерность G_0 равна $n - r - s$.

Теорема 6.8 указывает простой алгоритм для определения типа нормализатора и централизатора. В таблице 9 или 11 выделяем все подалгебры заданной алгебры G, в которые входит в качестве прямого слагаемого подалгебра G', и среди выделенных подалгебр берем подалгебру наибольшей размерности. Если ранг этой подалгебры равен n_1, то, добавляя к ней в качестве прямого слагаемого коммутативную подалгебру размерности $n - n_1$, получим нормализатор G', а отбрасывая от полученного нормализатора прямое слагаемое G', получим централизатор G'.

Доказательство теоремы 6.8 опирается на следующую лемму:

Лемма 6.2. *Если G' — полупростая подалгебра полупростой алгебры G, то*

$$(G; G') = G' \dot{+} [G; G']. \tag{6.28}$$

Доказательство леммы. Прежде всего из полупростоты G' следует, что ее центр $G' \cap [G; G']$ равен нулю. Далее, если $x \in (G; G')$, то формула

$$A_x u = x \circ u \quad (u \in G') \tag{6.29}$$

определяет линейное преобразование G' в себя, удовлетворяющее соотношению

$$A_x (u \circ v) = (A_x u) \circ v + u \circ (A_x v) \quad (u, v \in G'). \tag{6.30}$$

Всякое такое преобразование полупростой алгебры записывается по теореме Картана ([15], стр. 37—38; см. также [1]) в виде

$$A_x u = y \circ u, \tag{6.31}$$

где $y \in G'$. Положим $x - y = z$. Легко видеть, что $z \circ u = 0$ для всех $u \in G'$. Стало быть, $z \in [G; G']$. Итак, всякий элемент x из $(G; G')$ представляется в виде

$$x = y + z \quad (y \in G', \ z \in [G; G']). \tag{6.32}$$

Этим лемма доказана.

Доказательство теоремы 6.8. В силу следствия 1 теоремы 6.7, централизатор $[G; G']$ является регулярной подалгеброй. Автоморфизм алгебры G, переводящий каждый корень α в $-\alpha$, переводит в себя G' и, следовательно, переводит в себя $[G; G']$. Поэтому из теоремы 6.3 имеем:

$$[G; G'] = \tilde{G} + G_0, \quad \tilde{G} \circ G_0 = 0, \tag{6.33}$$

где $\tilde{G}$ — регулярная полупростая подалгебра, G_0 — регулярная коммутативная подалгебра. Итак, разложение (6.27) доказано. В силу леммы 6.2, из него следует разложение (6.26). Заметим, что $G' \dot{+} \tilde{G}$ — максимальная полупростая подалгебра алгебры $(G; G')$. Если G^* — любая полупростая подалгебра, имеющая G' своим идеалом, то $G^* \subseteq (G; G')$ и, следовательно, G^* сопряжена некоторой подалгебре алгебры $G' \dot{+} \tilde{G}$.

§ 7. R-подалгебры и S-подалгебры

n° 23. В линейной алгебре важнейшую роль играет понятие неприводимости системы матриц. Аналог этого понятия призван сыграть важную роль и в общей теории полупростых алгебр Ли. Мы начинаем настоящий параграф с определения понятия S-системы. При дальнейшем изучении обнаруживается родственность этого понятия с понятием неприводимой системы матриц.

Определение. Пусть G — полупростая алгебра Ли. Совокупность M элементов из G называется R-системой, если существует собственная регулярная подалгебра алгебры G, содержащая M. Всякая система элементов, не являющаяся R-системой, называется S-системой. Подалгебра, являющаяся R-системой, будет называться R-подалгеброй, а подалгебра, являющаяся S-системой, — S-подалгеброй. Представление f алгебры $\tilde{G}$ в полупростую алгебру G называется R-представлением, если $f(\tilde{G})$ является R-подалгеброй, и называется S-представлением, если $f(\tilde{G})$ — S-подалгебра.

Теорема 7.1. *При любом точном линейном представлении полупростой алгебры G всякая R-система M представляется приводимой системой матриц.*

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме:

Лемма 7.1. *Пусть Σ — система корней полупростой алгебры Ли. Если $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k \in \Sigma$ и $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k \in \Sigma$, то существует номер i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, такой, что $\delta - \delta_i \in \Sigma$.*

Доказательство. Если $\delta - \delta_i \bar{\in} \Sigma$, то, согласно формуле (65) работы [3], $(\delta, \delta_i) \leqslant 0$. Если это условие выполнено для $i = 1, 2, \ldots, k$, то $(\delta, \delta) = \sum_{i=1}^{k} (\delta, \delta_i) \leqslant 0$, что невозможно.

Доказательство теоремы 7.1. Очевидно, достаточно доказать теорему для того частного случая, когда система M совпадает с некоторой собственной регулярной подалгеброй $\tilde{G}$ алгебры G. По известной теореме Картана (см., например, [3], стр. 84), всякое точное представление неполупростой алгебры матрицами со следом нуль является приводимым. Поэтому можно предполагать, что подалгебра $\tilde{G}$ является полупростой.

Пусть

$$G = K \dot{+} \sum_{\alpha \in \Sigma}' G_\alpha \tag{7.1}$$

— каноническое разложение G, и пусть

$$\widetilde{G} = \widetilde{K} \dotplus \sum_{\alpha \in \widetilde{\Sigma}}^{\cdot} G_\alpha \tag{7.2}$$

(ср. (5.1) и (5.2)). Сопоставляя лемму 7.1 с условием A_1) n°16, выводим посредством индукции по k, что если $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k \in \widetilde{\Sigma}$ и $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k \in \Sigma$, то $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k \in \widetilde{\Sigma}$.

Пусть φ — линейное представление алгебры G, неприводимое относительно $\widetilde{G}$, и Δ_φ — система его весов. Рассмотрим представление $\widetilde{\varphi}$, индуцированное представлением φ на подалгебре $\widetilde{G}$. Пусть ξ — старший вектор представления φ. Каждый вектор из пространства R_φ, где действуют представления φ и $\widetilde{\varphi}$, представляется в виде линейной комбинации векторов вида

$$E_{\beta_s} \ldots E_{\beta_2} E_{\beta_1} \xi, \tag{7.3}$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_s \in \widetilde{\Sigma}$. Стало быть, каждый элемент M из Δ_φ имеет вид

$$M = \Lambda + \beta_1 + \ldots + \beta_s, \tag{7.4}$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_s \in \widetilde{\Sigma}$, Λ — вес вектора ξ (относительно φ).

Согласно лемме 3.1, всякий корень δ алгебры G представляется в виде

$$\delta = M_1 - M_2, \tag{7.5}$$

где $M_1, M_2 \in \Delta_\varphi$. Согласно соотношению (7.4),

$$M_1 = \Lambda + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_s, \tag{7.6}$$

$$M_2 = \Lambda + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_t, \tag{7.7}$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t \in \widetilde{\Sigma}$. Из (7.5), (7.6) и (7.7) следует:

$$\delta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_s - \gamma_1 - \gamma_2 - \ldots - \gamma_t. \tag{7.8}$$

Элементы $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, -\gamma_1, -\gamma_2, \ldots, -\gamma_t$ принадлежат $\widetilde{\Sigma}$. Поэтому $\delta \in \widetilde{\Sigma}$. Итак, если $\widetilde{\varphi}$ неприводимо, то $\widetilde{\Sigma} = \Sigma$, т. е. $\widetilde{G} = G$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 7.2. *Пусть G — одна из классических алгебр A_n, B_n, C_n или D_n, и пусть M — приводимая система элементов из G. Тогда M является R-системой в G. Исключением является только случай, когда $G = D_n$ и пространство R разлагается на два нечетномерных невырожденных подпространства, инвариантных и неприводимых относительно M.*

Доказательство. Пусть нетривиальное подпространство $\widetilde{R}$ пространства R инвариантно относительно M.

Пусть сначала $G = A_n$. Поскольку M содержится в подалгебре $(G; \widetilde{R})$, являющейся собственной регулярной подалгеброй алгебры G (см. теорему 6.4), то M является R-системой.

Пусть теперь $G = B_n$, C_n или D_n. Определим подпространство R_0 условием: $\xi \in R_0$, если $\xi \in \widetilde{R}$ и $Q(\xi, \eta) = 0$ для всех $\eta \in \widetilde{R}$. Подпространство R_0 инвариантно относительно M и изотропно. Если $R_0 \neq 0$, то

M содержится в собственной регулярной подалгебре $(G; R_0)$ алгебры R и, стало быть, является R-системой. Если же $R_0 = 0$, то $\tilde{R}$ невырождено, алгебра $(G; \tilde{R})$ является снова собственной регулярной подалгеброй алгебры G, кроме, быть может, случая когда $G = D_n$, и размерность R — нечетная. Итак, единственным случаем, когда приводимая система M может оказаться S-системой, является случай, когда $G = D_n$ и каждое инвариантное относительно M нетривиальное подпространство пространства R невырождено и нечетномерно. Легко видеть, что последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда R разлагается в прямую сумму двух нечетномерных невырожденных подпространств R' и R'', инвариантных и неприводимых относительно M.

Докажем теперь, что если это условие выполнено, то множество M действительно является S-системой. В самом деле, если это условие выполняется для множества M, то оно выполняется и для любой объемлющей M собственной регулярной подалгебры G' алгебры G. Между тем ни одна максимальная регулярная подалгебра алгебры D_n не удовлетворяет поставленному условию (см. n° 18).

n° 24. Т е о р е м а 7.3. *Пусть G — полупростая алгебра Ли. Всякая неполупростая подалгебра $\tilde{G}$ алгебры G является R-подалгеброй.*

Эта теорема является распространением на общий случай известной теоремы Картана о том, что всякая неполупростая подалгебра алгебры A_n приводима.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 7.3. Достаточно доказать теорему для случая, когда $\tilde{G}$ — максимальная среди неполупростых подалгебр алгебры G (т. е. не существует неполупростой подалгебры, содержащей $\tilde{G}$). Пусть G_0 — минимальная полупростая подалгебра, содержащая $\tilde{G}$ (т. е. такая подалгебра, что не существует полупростой подалгебры G_0', удовлетворяющей включениям $\tilde{G} \subset G_0' \subset G_0$). Подалгебра, $\tilde{G}$ является максимальной подалгеброй в G_0 и, по теореме В. В. Морозова (см. [12]), $\tilde{G}$ — регулярная подалгебра в G_0. Выберем в G и $\tilde{G}$ идемпотенты H и H_0 так, чтобы $H_0 \subseteq H$, и пусть Σ и Σ_0 — системы корней соответственно, для G и G_0. Пусть $\tilde{\Sigma}_0$ — подсистема системы Σ_0, определяющая $\tilde{G}$ (ср. n° 16). Согласно теореме Ф. И. Карпелевича (см. [10]) $\tilde{\Sigma}_0$ может быть описана, как система всех элементов из Σ_0, которые при разложении по системе Π простых корней алгебры G_0 имеют неотрицательную координату при некотором фиксированном простом корне α. Рассмотрим теперь подсистему $\tilde{\Sigma}$ системы Σ, определенную условием: β из Σ принадлежит $\tilde{\Sigma}$, если ортогональная проекция β на H_0 имеет при разложении по базису Π неотрицательную координату при α. Очевидно, что $\tilde{\Sigma}$ удовлетворяет условию A_1) n° 16 и, стало быть,

$$G' = [H] \dot{+} \sum_{\gamma \in} G_\gamma \tag{7.9}$$

является регулярной подалгеброй алгебры G. Согласно теореме 4.2, эта подалгебра содержит $\tilde{G}$. Очевидно, что G' не совпадает с G.

Т е о р е м а 7.4. (Обобщенная лемма Шура.) *Элемент полупростой алгебры Ли, перестановочный с каждым элементом S-системы M, равен нулю.*

Доказательство. Допустим, что элемент v, отличный от нуля, коммутирует с каждым элементом из M. Рассмотрим централизатор v, т. е. совокупность G_v всех элементов, перестановочных с v. Если бы алгебра G_v была неполупростой, то, согласно теореме 7.3, она содержалась бы в регулярной подалгебре и, следовательно, M была бы R-системой. Остается рассмотреть случай, когда G_v — полупростая подалгебра. Обозначим через G' централизатор G_v. По теореме В. В. Морозова (см. [13]), G' разлагается в прямую сумму полупростой подалгебры и коммутативной подалгебры, составленной из семирегулярных элементов алгебры G. Подалгебра G' содержит v и, стало быть, отлична от нуля. В G' можно выбрать отличный от нуля семирегулярный элемент w. Согласно следствию 3 теоремы 6.7, централизатор w регулярен. Этот централизатор содержит M, и мы пришли к противоречию с предположением, что M является S-системой.

Теорема 7.4 в известном смысле дополняется следующей теоремой:

Теорема 7.5. *Пусть G — полупростая алгебра Ли и $\widetilde{G}$ — ее регулярная полупростая подалгебра. Централизатор $\widetilde{G}$ равен нулю тогда и только тогда, когда ранг $\widetilde{G}$ равен рангу G.*

Доказательство. Выберем в алгебрах G и $\widetilde{G}$ идемпотенты H и $\widetilde{H}$ так, чтобы $\widetilde{H} \subseteq H$. Если $\widetilde{H} \neq H$, то элемент h из H, ортогональный к $\widetilde{H}$, перестановочен с каждым элементом из $\widetilde{G}$. Если $\widetilde{H} = H$, то централизатор $\widetilde{G}$ содержится в централизаторе H, который совпадает с H. Однако, как легко видеть из условия P_2) n° 16, ни один ненулевой элемент из H в этом случае не коммутирует со всеми элементами $\widetilde{G}$.

n° 25. Теорема 7.6. *Всякая S-подалгебра является целочисленной подалгеброй.*

Доказательство. Пусть H и $\widetilde{H}$ — идемпотенты алгебры G и подалгебры $\widetilde{G}$, причем $\widetilde{H} \subseteq H$. Пусть Σ и $\widetilde{\Sigma}$ — системы корней для G и $\widetilde{G}$. Ортогональная проекция Σ' системы Σ на $\widetilde{H}$ составляется из системы $\widetilde{\Sigma}$ и системы Δ весов характеристического представления $\widetilde{G}$. Обозначим через Γ совокупность всех векторов из $\widetilde{H}$, выражающихся с целыми коэффициентами через простые корни $\widetilde{G}$. Система $\Sigma' \cap \Gamma$ содержит $\widetilde{\Sigma}$. Обозначим через Σ_0 совокупность всех элементов из Σ, проекция которых принадлежит $\Sigma' \cap \Gamma$. Эта система удовлетворяет условию A_1) n° 16 и, согласно теореме 4.2, регулярная подалгебра

$$G_0 = [H] \dot{+} \sum_{\beta \in \Sigma_0} G_\beta \tag{7.10}$$

содержит $\widetilde{G}$. Если $\widetilde{G}$ — S-подалгебра, то $G_0 = G$ и $\Sigma_0 = \Sigma$; следовательно, $\Delta \subseteq \Sigma' \subseteq \Gamma$, и теорема доказана.

Теорема 7.7. *Всякая полупростая R-подалгебра полупростой алгебры G содержится в некоторой полупростой регулярной собственной подалгебре G' алгебры G.*

Для доказательства достаточно сослаться на теорему 6.3.

Теорема 7.8. *Пусть G — полупростая алгебра Ли и*

$$G = G_1 \dot{+} G_2 \dot{+} \ldots \dot{+} G_r \tag{7.11}$$

— ее разложение в прямую сумму простых идеалов. Для того

чтобы подалгебра $\tilde{G}$ алгебры G являлась S-подалгеброй, необходимо и достаточно, чтобы ее проекция в каждую алгебру G_k $(k=1, 2, \ldots, r)$ являлась S-подалгеброй алгебры G_k. (Проекции $x_1, x_2, \ldots, x_r$ элемента $x \in G$ в подалгебры $G_1, G_2, \ldots, G_r$ определяются равенством

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_r \quad (x_k \in G_k;\ k = 1, 2, \ldots, r).) \tag{7.12}$$

Доказательство. Регулярные подалгебры G, согласно теореме 5.4, имеют вид

$$G_1' \dot{+} G_2' \dot{+} \ldots \dot{+} G_r', \tag{7.13}$$

где G_k' — регулярная подалгебра в G_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$. Легко видеть, что подалгебра (7.13) содержит подалгебру $\tilde{G}$ тогда и только тогда, когда она содержит проекции $\tilde{G}$ в каждое из подпространств $G_1, G_2, \ldots$ $\ldots, G_r$. Доказательство теоремы следует отсюда без всякого труда.

Глава III

Трехчленные простые подалгебры полупростых алгебр Ли

§ 8. Определяющий вектор и характеристика трехчленной подалгебры

n° 26. В этой главе вычисляются все трехчленные (т. е. трехмерные) простые подалгебры полупростых алгебр Ли. Все трехчленные полупростые алгебры Ли изоморфны между собой. В каждой из них можно выбрать канонический базис f, e_+, e_-, для которого правила коммутирования имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} f \circ e_+ &= 2e_+, \\ f \circ e_- &= -2e_-, \\ e_+ \circ e_- &= f. \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Прямая вектора f является картановской подалгеброй трехчленной алгебры, векторы e_+ и e_- — корневыми векторами. Корни даются формулой

$$\pm \frac{2}{(f, f)} f \tag{8.2}$$

или, в обозначениях (0.5),

$$\pm f'. \tag{8.3}$$

Их значение зависит от способа выбора в алгебре инвариантного скалярного произведения.

Пусть $\tilde{G}$ — трехчленная подалгебра полупростой алгебры G. Вектор f из $\tilde{G}$, который может быть дополнен векторами e_+ и e_- до канонического базиса $\tilde{G}$, мы назовем **определяющим вектором** подалгебры $\tilde{G}$. Целесообразность такого способа выражения обосновывается следующей теоремой:

Теорема 8.1. *Пусть $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ — трехчленные подалгебры полупростой алгебры G, и пусть f_1 и f_2 — их определяющие векторы. Для того чтобы $\tilde{G}_1$ можно было перевести в $\tilde{G}_2$ автоморфизмом алгебры G, необходимо и достаточно, чтобы f_1 можно было перевести в f_2 автоморфизмом G. Для того чтобы $\tilde{G}_1$ было сопряжено $\tilde{G}_2$, необходимо и достаточно, чтобы f_1 было сопряжено f_2.*

Доказательство. Пусть f_1, e_+, e_- и f_2, d_+, d_- — канонические базисы в $\widetilde{G}_1$ и $\widetilde{G}_2$. Пусть известно, что

$$\widetilde{G}_2 = U\widetilde{G}_1, \tag{8.4}$$

где U — автоморфизм алгебры G. Определим линейное отображение V алгебры $\widetilde{G}_2$ на себя формулами:

$$\left.\begin{aligned} V(Uf_1) &= f_2, \\ V(Ue_+) &= d_+, \\ V(Ue_-) &= d_-. \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Отображение V является автоморфизмом $\widetilde{G}_2$. Поскольку $\widetilde{G}_2$ не имеет внешних автоморфизмов, V — внутренний автоморфизм, и, следовательно, он однозначно продолжается во внутренний автоморфизм всей алгебры G. Обозначим продолженный автоморфизм снова через V. Автоморфизм VU переводит f_1 в f_2. Этот автоморфизм является внутренним, если U — внутренний автоморфизм. Пусть теперь известно, что

$$f_2 = Wf_1, \tag{8.6}$$

где W — автоморфизм G. Тогда две трехчленные подалгебры $W\widetilde{G}_1$ и $\widetilde{G}_2$ имеют общий определяющий элемент. По теореме А. И. Мальцева ([11], § 3, теорема 2,), существует внутренний автоморфизм T, такой, что $T(W\widetilde{G}_1) = \widetilde{G}_2$. Таким образом, автоморфизм TW переводит $\widetilde{G}_1$ в $\widetilde{G}_2$. Этот автоморфизм является внутренним, если W — внутренний автоморфизм.

Выберем идемпотент H алгебры G, содержащий f. Нижеследующие утверждения являются частными случаями общих предложений главы I (соответственно, леммы 2.1 и теоремы 4.2 с ее следствием):

А. Для любого веса Λ любого линейного представления алгебры G произведение (Λ, f) является целым числом.

Б. Пусть

$$G = [H] \dotplus \sum_{\alpha \in \Sigma}{}^{\cdot} G_\alpha \tag{8.7}$$

— каноническое разложение алгебры G, и пусть Γ — совокупность всех $\alpha \in \Sigma$, удовлетворяющих условию

$$(\alpha, f) = 2. \tag{8.8}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} e_+ &= \sum_{\alpha \in \Gamma} e_\alpha, \\ e_- &= \sum_{\alpha \in \Gamma} e_{-\alpha}, \\ f &= \sum_{\alpha \in \Gamma} c_\alpha \alpha \end{aligned}\right\} \quad (e_\alpha \in G_\alpha,\ e_{-\alpha} \in G_{-\alpha}). \tag{8.9}$$

n° 27. Пусть f — определяющий вектор трехчленной подалгебры $\widetilde{G}$ полупростой алгебры G. Выберем идемпотент H алгебры G так, чтобы $f \in H$, и упорядочим H так, чтобы из $(h, f) < 0$ вытекало $h < 0$. Пусть Π — система простых корней алгебры G относительно этого упорядочения. Рассмотрим схему простых корней алгебры G. Между точками этой схемы и элементами системы Π устанавливается взаимно однозначное соответствие. Отнесем точке, соответствующей элементу α, число (f, α). Полученную этим путем схему с числовыми отметками назовем **характеристикой** подалгебры $\widetilde{G}$.

Теорема 8.2. *Для того чтобы две трехчленные подалгебры полупростой алгебры G переводились одна в другую автоморфизмом G, необходимо и достаточно, чтобы их характеристики совпадали. Для того чтобы подсчитать, на сколько классов сопряженных подалгебр распадается совокупность всех подалгебр с заданной характеристикой, надо разделить число автоморфизмов схемы простых корней на число автоморфизмов характеристики* *.

При доказательстве этой теоремы будут использованы следующие две леммы:

Лемма 8.1. *Пусть Π_1 и Π_2 — две возможные системы простых корней алгебры G, и пусть элемент f выражается линейно как через Π_1, так и через Π_2, причем $(f, \alpha) \geqslant 0$ для всех $\alpha \in \Pi_1 \cup \Pi_2$. Тогда существует внутренний автоморфизм алгебры G, оставляющий на месте f и переводящий Π_1 в Π_2.*

Доказательство. Обозначим линейную оболочку Π_i через K_i; совокупность элементов из Π_i, ортогональных f, — через $\widetilde{\Pi}_i$; совокупность элементов из K_i, ортогональных к $\widetilde{\Pi}_i$, — через $\widetilde{K}_i$; регулярную полупростую подалгебру, отвечающую системе $\widetilde{\Pi}_i$, — через G_i. Множество G' всех элементов из G, перестановочных с f, равно прямой сумме

$$\widetilde{K}_i \dot{+} G_i. \tag{8.10}$$

Отсюда видно, что радикал алгебры G' равен $\widetilde{K}_i$. Следовательно, $\widetilde{K}_1 = \widetilde{K}_2$. Далее, из разложения (8.10) видно, что G_1 и G_2 являются максимальными полупростыми подалгебрами в G'. По теореме А. И. Мальцева ([11], стр. 171), существует внутренний автоморфизм U алгебры G', такой, что $UG_1 = G_2$. Заметим далее, что $U\widetilde{\Pi}_1$ и $\widetilde{\Pi}_2$ — возможные системы простых корней в G_2. Стало быть, существует внутренний автоморфизм V алгебры G_2, такой, что $VU\widetilde{\Pi}_1 = \widetilde{\Pi}_2$. Распространим внутренние автоморфизмы V и U на всю алгебру G и обозначим их произведение через W. Очевидно, $Wf = f$, $WK_1 = K_2$, $W\widetilde{\Pi}_1 = \widetilde{\Pi}_2$.

Докажем, что $W\Pi_1 = \Pi_2$. Обозначим полную систему корней алгебры G, отвечающую системе простых корней Π_i, через Σ_i, а систему положительных корней — через Σ_i^+. Из $WK_1 = K_2$ вытекает $W\Sigma_1 = \Sigma_2$. Чтобы убедиться в справедливости соотношения $W\Pi_1 = \Pi_2$, достаточно доказать, что $W\Sigma_1^+ = \Sigma_2^+$, а для этого достаточно доказать, что

* Мы называем **автоморфизмами схемы простых корней** перестановки точек схемы, при которых каждая точка переходит в точку того же цвета и каждая пара точек переходит в пару точек, соединенную таким же образом. Характеристика представляет собой схему простых корней, снабженную числовыми отметками. Автоморфизм схемы простых корней, при котором каждая точка переходит в точку с равной числовой отметкой, мы называем **автоморфизмом характеристики**.

$W\Pi_1 \subseteq \Sigma_2^+$. Прежде всего, имеем: $W\widetilde{\Pi}_1 = \widetilde{\Pi}_2 \subseteq \Sigma_2^+$. Далее, если $\alpha \in \Pi_1 \setminus \widetilde{\Pi}_1$, то $(\alpha, f) > 0$; стало быть, $(W\alpha, Wf) = (W\alpha, f) > 0$ и $W\alpha \in \Sigma_2^+$.

Лемма 8.2. *Пусть* Π — *система простых корней полупростой алгебры* G. *Пусть элементы* f_1 *и* f_2 *выражаются линейно через* Π *и* $(f_i, \alpha) \geqslant 0$ $(i = 1, 2;\ \alpha \in \Pi)$. *Если* f_1 *и* f_2 *сопряжены, то* $f_1 = f_2$.

Доказательство. Пусть U — внутренний автоморфизм G, такой, что $Uf_1 = f_2$. К вектору f_2 и системам $U\Pi$ и Π применима лемма 8.1. В силу этой леммы, существует внутренний автоморфизм W алгебры G, такой, что

$$Wf_2 = f_2, \quad W(U\Pi) = \Pi. \tag{8.11}$$

Внутренний автоморфизм WU сохраняет систему Π и переводит f_1 в f_2. В силу леммы 1 работы [7], WU оставляет на месте каждый элемент из Π и, следовательно, оставляет на месте f_1. Итак $f_1 = f_2$.

Доказательство теоремы 8.2. Пусть f_1 и f_2 — определяющие векторы двух трехчленных подалгебр $\widetilde{G}_1$ и $\widetilde{G}_2$, и пусть H_1 и H_2 — идемпотенты, Π_1 и Π_2 — системы простых корней алгебры G, построенные описанным выше способом, соответственно, по f_1 и f_2. Если $\widetilde{G}_1$ переводится в $\widetilde{G}_2$ некоторым автоморфизмом G, то, согласно теореме 8.1, существует автоморфизм W алгебры G, такой, что $Wf_1 = f_2$. К вектору f_2 и системам $W\Pi_1$ и Π_2 применима лемма 8.1. В силу этой леммы, существует внутренний автоморфизм U алгебры G, оставляющий на месте f_2 и переводящий $W\Pi_1$ в Π_2. Автоморфизм $T = UW$ отображает Π_1 на Π_2 так, что выполняются соотношения

$$(f_1, \alpha) = (f_2, T\alpha) \quad (\alpha \in \Pi_1,\ T\alpha \in \Pi_2). \tag{8.12}$$

Отсюда видно, что характеристики $\widetilde{G}_1$ и $\widetilde{G}_2$ совпадают.

Пусть теперь, обратно, известно, что характеристики $\widetilde{G}_1$ и $\widetilde{G}_2$ совпадают. Это означает, что описанное выше построение систем Π_1 и Π_2 можно провести так, чтобы существовало изометрическое отображение P системы Π_1 на Π_2, удовлетворяющее соотношениям

$$(f_1, \alpha) = (f_2, P\alpha). \tag{8.13}$$

Согласно теореме XVI работы [3], изометрическое отображение P определяет автоморфизм U алгебры G и, в силу инвариантности скалярного произведения,

$$(f_1, \alpha) = (Uf_1, U\alpha) = (Uf_1, P\alpha) \quad (\alpha \in \Pi_1). \tag{8.14}$$

Сравнивая равенства (8.13) и (8.14), замечаем, что

$$f_2 = Uf_1, \tag{8.15}$$

и, в силу теоремы 8.1, подалгебра $\widetilde{G}_2$ может быть получена автоморфизмом из подалгебры $\widetilde{G}_1$.

Для доказательства заключительной части теоремы мы используем теорему 1 работы [7]. Согласно этой теореме, всякий автоморфизм алгебры G разлагается на произведение внутреннего автоморфизма и автоморфизма, переставляющего между собой простые корни алгебры G.

В силу этой теоремы, нам достаточно показать, что автоморфизм U алгебры G, переставляющий между собой простые корни, переводит трехчленную подалгебру $\widetilde{G}$ в сопряженную тогда и только тогда, когда он сохраняет характеристику $\widetilde{G}$. Заметим теперь, что если f — определяющий элемент $\widetilde{G}$, то из соотношений $(f, \alpha) \geqslant 0$ $(\alpha \in \Pi)$ вытекают соотношения $(Uf, \alpha) \geqslant 0$ $(\alpha \in \Pi)$. Согласно лемме 8.2, Uf сопряжено f тогда и только тогда, когда $Uf = f$. С другой стороны, $Uf = f$ тогда и только тогда, когда U сохраняет характеристику $\widetilde{G}$.

n°28. Теорема 8.3. *Каждая из числовых отметок, входящих в характеристику произвольной трехчленной подалгебры, может иметь только одно из трех значений*: 0, 1 *или* 2. *Для того чтобы подалгебра была целочисленной, необходимо и достаточно, чтобы каждая числовая отметка была равна* 0 *или* 2.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующая

Лемма 8.3. *Пусть* Π — *система простых корней полупростой алгебры* G, *и пусть*

$$h = \sum_{\alpha \in \Pi} p_\alpha \alpha, \tag{8.16}$$

где p_α — *вещественные числа. Если* $(h, \alpha) \geqslant 0$ *для всех* $\alpha \in \Pi$, *то* $p_\alpha \geqslant 0$ *для всех* $\alpha \in \Pi$. *Если* $(h, \alpha) > 0$ *для всех* $\alpha \in \Pi$, *то* $p_\alpha > 0$ *для всех* $\alpha \in \Pi$.

Доказательство леммы. Положим $\alpha \in \Pi^+$, если $p_\alpha > 0$ и $\alpha \in \Pi^-$, если $p_\alpha \leqslant 0$. Положим

$$u^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} p_\alpha \alpha, \quad u^- = \sum_{\alpha \in \Pi^-} p_\alpha \alpha. \tag{8.17}$$

Очевидно,

$$(u^+, u^-) \geqslant 0, \quad (u^-, u^-) \geqslant 0, \tag{8.18}$$

и потому

$$(h, u^-) = (u^+, u^-) + (u^-, u^-) \geqslant 0. \tag{8.19}$$

С другой стороны, если $(h, \alpha) \geqslant 0$ для всех $\alpha \in \Pi$, то

$$(h, u^-) \leqslant 0. \tag{8.20}$$

Из сопоставления соотношений (8.19) и (8.20) следует: $(h, u^-) = 0$ и, в силу (8.18), $(u^+, u^-) = (u^-, u^-) = 0$. Стало быть, $u^- = 0$ и $p_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in \Pi^-$.

Выберем теперь какой-нибудь элемент β из Π^- и умножим на него равенство (8.16). Поскольку $p_\beta = 0$ и для $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta) \leqslant 0$, имеем:

$$(h, \beta) = \sum_{\substack{\alpha \in \Pi \\ \alpha \neq \beta}} p_\alpha (\alpha, \beta) \leqslant 0. \tag{8.21}$$

Поэтому если $(h, \beta) > 0$ для всех $\beta \in \Pi$, то Π^- пусто и $p_\alpha > 0$ для всех $\alpha \in \Pi$ *.

Доказательство теоремы 8.3. Пусть f — определяющий вектор трехчленной подалгебры и Π — построенная по нему система простых корней алгебры. Нам надо доказать, что для $\alpha \in \Pi$ значение

* Другое доказательство леммы 8.3 можно дать, опираясь на таблицу 2.

(α, f) равно 0, 1 или 2. Прежде всего заметим, что, в силу утверждения А n°26, (α, f) — целое число. Далее, $(\alpha, f) \geqslant 0$, ибо $\alpha > 0$. Обозначим через Π_1 совокупность всех элементов α из Π, для которых (α, f) равно 0, 1 или 2. Обозначим через Σ_1 совокупность всех корней вида

$$\delta = \sum_{\alpha \in \Pi_1} a_\alpha \alpha. \tag{8.22}$$

Каждый положительный корень δ представляется в виде

$$\delta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha, \tag{8.23}$$

где k_α — неотрицательные целые числа. Поэтому если положительный корень δ не принадлежит Σ_1, то $(\delta, f) > 2$. Всякий отрицательный корень имеет вид

$$-\sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha \tag{8.24}$$

(k_α — неотрицательные целые числа). Поэтому если отрицательный корень γ не принадлежит Σ_1, то $(\gamma, f) < 0$. Таким образом, система Γ, описанная в предложении Б n°26, содержится в Σ_1, и, в силу этого предложения, f выражается линейно через систему Π_1:

$$f = \sum_{\alpha \in \Pi_1} u_\alpha \alpha. \tag{8.25}$$

Поскольку скалярные произведения f с каждым элементом из Π_1 неотрицательны, коэффициенты u_α также неотрицательны (см. лемму 8.3). Предположим, что $\beta \in \Pi \setminus \Pi_1$. Тогда для всех $\alpha \in \Pi_1$ $(\beta, \alpha) \leqslant 0$. Следовательно,

$$(\beta, f) = \sum_{\alpha \in \Pi_1} u_\alpha (\beta, \alpha) \leqslant 0. \tag{8.26}$$

С другой стороны, мы знаем, что $(\beta, f) \geqslant 0$. Следовательно, $(\beta, f) = 0$ и $\beta \in \Pi_1$, что противоречит сделанному предположению. Тем самым доказано, что $\Pi_1 = \Pi$.

Переходим к доказательству заключительной части теоремы. Для того чтобы трехчленная подалгебра $\widetilde{G}$ алгебры G была целочисленна, необходимо и достаточно, чтобы при ортогональном проектировании на прямую вектора f корни алгебры G переходили в целочисленные кратные корня

$$f' = \frac{2}{(f, f)} f \tag{8.27}$$

подалгебры $\widetilde{G}$. Ортогональная проекция элемента α на прямую вектора f равна

$$\frac{(\alpha, f)}{(f, f)} f = \frac{(\alpha, f)}{2} f'. \tag{8.28}$$

Отсюда видно, что для целочисленности $\widetilde{G}$ необходима и достаточна четность (α, f) для любого корня α алгебры G. Очевидно, достаточно, чтобы это условие выполнялось для простых корней. Доказательство теоремы 8.3 закончено.

Согласно теореме 8.2, для того чтобы классифицировать трехчленные подалгебры полупростой алгебры G, достаточно перечислить возможные значения их характеристик. В силу теоремы 8.3, общее число таких значений не превосходит 3^n, где n — ранг алгебры G. Необходимо среди этих 3^n значений отобрать те значения, которым действительно отвечают подалгебры. В последующих параграфах настоящей главы мы проведем такой отбор для всех типов особых простых алгебр Ли. Результаты отбора даются таблицами 16—20, в которых перечислены характеристики всех трехчленных подалгебр и, кроме того, для каждой трехчленной подалгебры $\widetilde{G}$ указаны все минимальные объемлющие регулярные подалгеры, а также индекс $\widetilde{G}$ и коэффициенты разложения по простым корням определяющего элемента f.

§ 9. Трехчленные S-подалгебры полупростых алгебр Ли

n°29. Главные трехчленные подалгебры. Пусть G — произвольная полупростая алгебра Ли. Рассмотрим схему простых корней G и отнесем каждой точке этой схемы числовую отметку 2. Как будет сейчас показано, всегда существует трехчленная подалгебра алгебры G, для которой построенная схема является характеристикой. Эту трехчленную подалгебру мы назовем главной трехчленной подалгеброй * алгебры G и будем обозначать через (a_0). Согласно теореме 8.3, главная подалгебра определена однозначно с точностью до сопряженности.

Проведем построение главной трехчленной подалгебры. Для каждого элемента α системы Π простых корней алгебры G выберем корневые векторы e_α и $e_{-\alpha}$ так, чтобы

$$(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1. \tag{9.1}$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} f &= \sum_{\alpha\in\Pi} p_\alpha \alpha, \\ e_+ &= \sum_{\alpha\in\Pi} u_\alpha e_\alpha, \\ e_- &= \sum_{\alpha\in\Pi} v_\alpha e_{-\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

Выберем p_α так, чтобы для всех $\alpha \in \Pi$

$$(f, \alpha) = 2, \tag{9.3}$$

и пусть $u_\alpha v_\alpha = p_\alpha$. Тогда, как легко видеть, выполняются соотношения (8.1). Стало быть, элементы вида $af + be_+ + ce_-$ образуют в алгебре G трехчленную полупростую подалгебру, и векторы f, e_+, e_- представляют собой канонический базис этой подалгебры. В силу (9.3), все

* Впервые это понятие было использовано нами в заметке [4]. Почти одновременно и независимо от нас оно рассматривалось также Зибенталем [20].

числовые отметки, составляющие характеристику построенной подалгебры, равны 2.

Теорема 9.1. *Главная трехчленная подалгебра $\widetilde{G}$ полупростой алгебры G является S-подалгеброй.*

Доказательство. Пусть регулярная полупростая подалгебра G' алгебры G содержит $\widetilde{G}$. Пусть Σ — система корней алгебры G и Σ' — ее подсистема, отвечающая G'. Обозначим через Γ совокупность всех элементов α из Σ', удовлетворяющих условию

$$(f, \alpha) = 2. \tag{9.3}$$

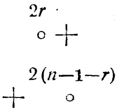
Как легко видеть, этому условию удовлетворяют те и только те элементы системы Σ, которые принадлежат Π. Поэтому $\Gamma \subseteq \Pi$. Согласно утверждению Б n°26, вектор f выражается линейно через Γ. Если бы Γ не совпадало с Π, то при разложении f по системе Π некоторые из коэффициентов разложения равнялись бы нулю. Однако это противоречило бы лемме 8.3, ибо $(f, \alpha) > 0$ для всех $\alpha \in \Pi$. Итак $\Gamma = \Pi$) Отсюда вытекает, что $\Pi \subseteq \Sigma'$ и, стало быть, $\Sigma' = \Sigma$, $G' = G$.

В таблицах 13 и 14 мы приводим основные данные относительно главных трехчленных подалгебр $\widetilde{G}$ простых алгебр Ли: значения индекса, представления* $\chi_{\widetilde{G}}$ и $\omega_{\widetilde{G}}$ и координаты p_α определяющего вектора f по базису Π; при этом X_k обозначает неприводимое представление со схемой $\overset{k}{\circ}$.

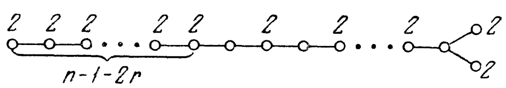
n°30. Описание трехчленных S-подалгебр простых алгебр Ли дается следующими теоремами 9.2 и 9.3.

Теорема 9.2. *В алгебрах A_n, B_n и C_n всякая трехчленная S-подалгебра является главной.*

В алгебре D_n помимо главных подалгебр существуют $\left[\frac{n-2}{2}\right]$ попарно несопряженных трехчленных S-подалгебр, которые отвечают линейным представлениям


$$\left(r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-2}{2}\right]\right) \tag{9.4}$$

*трехчленной алгебры Ли.*** *Их характеристики имеют вид****

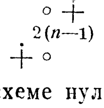

(9.5)

* Для алгебры E_8 простейшее представление ω совпадает с присоединенным представлением, и поэтому для любой подалгебры $\widetilde{G}$ алгебры E_8 имеет место соотношение

$$\omega_{\widetilde{G}} = \chi_{\widetilde{G}} + \varphi_{\widetilde{G}},$$

где $\varphi_{\widetilde{G}}$ — присоединенное представление $\widetilde{G}$. В силу этой простой связи, представления $\omega_{\widetilde{G}}$ и $\chi_{\widetilde{G}}$ легко вычисляются одно по другому, и нет необходимости указывать их оба. Поэтому в таблице 14 оставлено не заполненным одно поле.

** Главная подалгебра (a_0) отвечает представлению



*** Как всегда, мы опускаем на схеме нулевые числовые отметки.

Таблица 13

Главные трехчленные подалгебры классических алгебр Ли

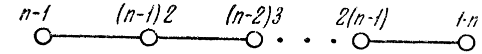
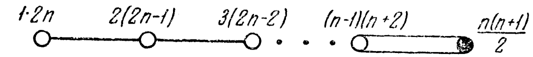
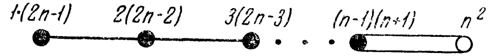
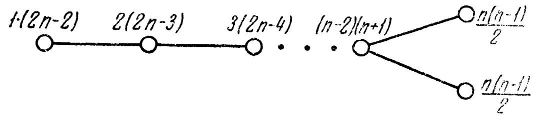
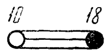
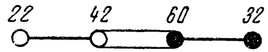
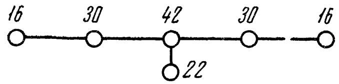
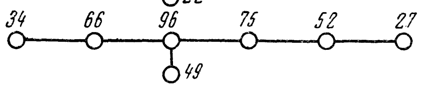
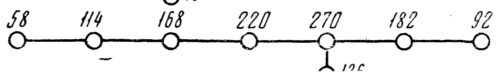
G	Индекс $\widetilde{G}$	$\chi_{\widetilde{G}}$	$\omega_{\widetilde{G}}$	Координаты p_α определяющего вектора
A_n	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	$X_4+X_6+\cdots+X_{2n}$	X_n	
B_n	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$X_6+X_{10}+\cdots+X_{4n-2}$	X_{2n}	
C_n	$\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$	$X_6+X_{10}+\cdots+X_{4n-2}$	X_{2n-1}	
D_n	$\frac{(n-1)n(2n-1)}{3}$	$X_6+X_{10}+\cdots+X_{4n-6}+X_{2n-2}$	$X_{2n-2}+X_0$	

Таблица 14

Главные трехчленные подалгебры особых алгебр Ли

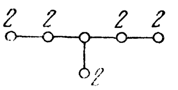
G	Индекс $\widetilde{G}$	$\chi_{\widetilde{G}}$	$\omega_{\widetilde{G}}$	Координаты p_α определяющего вектора
G_2	28	X_{10}	X_6	
F_4	156	$X_{22}+X_{14}+X_{10}$	$X_{16}+X_8$	
E_6	156	$X_{22}+X_{16}+X_{14}+X_{10}+X_8$	$X_{16}+X_8+X_0$	
E_7	399	$X_{34}+X_{26}+X_{22}+X_{18}+X_{14}+X_{10}$	$X_{27}+X_{17}+X_9$	
E_8	1240	$X_{58}+X_{46}+X_{38}+X_{32}+X_{26}+X_{22}+X_{14}$		

Подалгебра, определяемая представлением (9.4) или схемой (9.5), будет обозначаться через (a_r).

Доказательство. Если исключить D_n, то для остальных классических алгебр S-подалгебрами являются те и только те подалгебры, которые неприводимы (см. теорему 7.2). Утверждение теоремы, относящееся к случаю A_n, B_n и C_n, вытекает из того, что трехчленная алгебра имеет по одному неприводимому представлению каждой размерности и это представление ортогонально в случае нечетной и симплектично в случае четной размерности.

Обратимся теперь к случаю D_n. Согласно теореме 7.2, подалгебра алгебры D_n является S-подалгеброй тогда и только тогда, когда задающее ее линейное представление разлагается на две нечетномерные неприводимые компоненты. Утверждение теоремы следует отсюда немедленно. Для получения значений характеристики необходимо провести соответствующую выкладку.

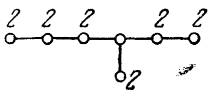
Теорема 9.3. *В алгебрах G_2 и F_4 всякая трехчленная S-подалгебра является главной. В алгебре E_6 помимо главных подалгебр имеется один класс сопряженных трехчленных S-подалгебр с характеристикой*



. (a_1)

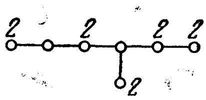
В алгебрах E_7 и E_8 имеется по 2 таких класса, а именно:

в E_7



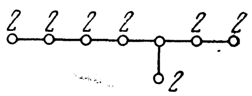
(a_1)

и



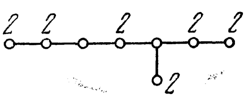
(a_2)

в E_8



(a_1)

и



. (a_2)

По одной подалгебре из каждого класса указано в таблице 15.

Таблица 15

Неглавные трехчленные S-подалгебры особых алгебр Ли

$A_1^{84}\subset E_6 \qquad (a_1)$	$\frac{1}{84}\begin{bmatrix}12&22&30&22&12\\&&16&&\end{bmatrix} \qquad \frac{1}{84}\begin{bmatrix}2&2&0&2&2\\&&2&&\end{bmatrix}$
χ: $\overset{16}{\circ}+\overset{14}{\circ}+2\overset{10}{\circ}+\overset{8}{\circ}+$ $+\overset{6}{\circ}+\overset{4}{\circ}$ ω: $\overset{12}{\circ}+\overset{8}{\circ}+\overset{4}{\circ}$	$e_x=\frac{1}{\sqrt{84}}\left[\sqrt{12}(e_1+e_5)+\sqrt{8}(e_2+e_4)+i\sqrt{7}(e_{23}+e_{34})+\right.$ $\left.+4i\,e_{36}\right],$ $e_{-x}=e'_x$
$A_1^{231}\subset E_7 \qquad (a_1)$	$\frac{1}{231}\begin{bmatrix}26&50&72&57&40&21\\&&37&&&\end{bmatrix} \qquad \frac{1}{231}\begin{bmatrix}2&2&0&2&2&2\\&&2&&&\end{bmatrix}$
χ: $\overset{26}{\circ}+\overset{22}{\circ}+\overset{18}{\circ}+\overset{16}{\circ}+$ $+\overset{14}{\circ}+2\overset{10}{\circ}+\overset{6}{\circ}$ ω: $\overset{21}{\circ}+\overset{15}{\circ}+\overset{11}{\circ}+\overset{5}{\circ}$	$e_x=\frac{1}{\sqrt{231}}\left[\sqrt{26}e_1+\sqrt{50}e_2+\sqrt{6,6}\,e_4+\sqrt{40}e_5+\sqrt{21}e_6+\right.$ $\left.+\sqrt{15,4}e_7+i\sqrt{50,4}e_{34}+i\sqrt{21,6}e_{73}\right],$ $e_{-x}=e'_x$
$A_1^{159}\subset E_7 \qquad (a_2)$	$\frac{1}{159}\begin{bmatrix}22&42&60&47&32&17\\&&31&&&\end{bmatrix} \qquad \frac{1}{159}\begin{bmatrix}2&2&0&2&0&2\\&&2&&&\end{bmatrix}$
χ: $\overset{22}{\circ}+\overset{18}{\circ}+\overset{16}{\circ}+2\overset{14}{\circ}+$ $+2\overset{10}{\circ}+\overset{8}{\circ}+\overset{6}{\circ}+\overset{2}{\circ}$ ω: $\overset{17}{\circ}+\overset{15}{\circ}+\overset{9}{\circ}+\overset{7}{\circ}+\overset{3}{\circ}$	$e_x=\frac{1}{\sqrt{159}}\left[\sqrt{22}e_1+\sqrt{42}e_2+i\sqrt{30}(e_{34}-e_{37})+\right.$ $\left.+4i(e_{54}-e_{56})+e_4+e_6+e_7\right],$ $e_{-x}=e'_x$
$A_1^{520}\subset E_8 \qquad (a_2)$	$\frac{1}{520}\begin{bmatrix}38&74&108&142&174&118&60\\&&&&88&&\end{bmatrix} \qquad \frac{1}{520}\begin{bmatrix}2&2&0&2&0&2&2\\&&&&2&&\end{bmatrix}$
χ: $\overset{38}{\circ}+\overset{34}{\circ}+\overset{28}{\circ}+\overset{26}{\circ}+2\overset{22}{\circ}+$ $+\overset{18}{\circ}+\overset{16}{\circ}+\overset{14}{\circ}+\overset{10}{\circ}+\overset{6}{\circ}$	$e_x=\frac{1}{\sqrt{520}}\left[\sqrt{38}e_1+i\sqrt{54}(e_{23}+e_{34})+i\sqrt{87}(e_{45}+e_{58})+\right.$ $\left.+\sqrt{118}e_6+\sqrt{60}e_7+e_2+e_4+e_8\right],$ $e_{-x}=e'_x$
$A_1^{760}\subset E_8 \qquad (a_1)$	$\frac{1}{760}\begin{bmatrix}46&90&132&172&210&142&72\\&&&&106&&\end{bmatrix} \qquad \frac{1}{760}\begin{bmatrix}2&2&2&2&0&2&2\\&&&&2&&\end{bmatrix}$
χ: $\overset{46}{\circ}+\overset{38}{\circ}+\overset{34}{\circ}+\overset{28}{\circ}+\overset{26}{\circ}+$ $+\overset{22}{\circ}+\overset{18}{\circ}+\overset{14}{\circ}+\overset{10}{\circ}$	$e_x=\frac{1}{\sqrt{760}}\left[\sqrt{46}e_1+\sqrt{90}e_2+\sqrt{32}e_3+\sqrt{\frac{1976}{53}}\,e_4+\right.$ $+\sqrt{\frac{3536}{53}}\,e_6+\sqrt{72}e_7+\sqrt{106}e_8+$ $\left.+i\sqrt{\frac{7140}{53}}\,e_{45}+i\sqrt{\frac{3990}{53}}\,e_{56}\right],$ $e_{-x}=e'_x$

Обозначения, принятые в таблице 15. Простые корни алгебры $G\,(=E_6, E_7$ или $E_8)$ нумеруются как в таблице 1. Корневой вектор, отвечающий простому корню α_i, обозначается через e_i, а корневой вектор, отвечающий корню $-\alpha_i$, — через e'_i. Векторы e_i, e'_i считаем выбранными так, чтобы $(e_i, e'_i)=1$. Полагаем

$$\left.\begin{aligned}&((e_{i_1}\circ e_{i_2})\circ e_{i_3})\circ\dots\circ e_{i_s}=e_{i_1i_2\dots i_s},\\&((e'_{i_1}\circ e'_{i_2})\circ e'_{i_3})\circ\dots\circ e'_{i_s}=e'_{i_1i_2\dots i_s}.\end{aligned}\right\}\tag{9.6}$$

Далее, если

$$c=\Sigma\, a_{i_1\dots i_s}e_{i_1\dots i_s},\tag{9.7}$$

то под c' понимается

$$\Sigma\, a_{i_1\dots i_s}e'_{i_1\dots i_s}.\tag{9.8}$$

Корень x подалгебры $\widetilde{G}$ задается своими ко- и контравариантными координатами по базису $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Для корневых векторов e_x и e_{-x} дано выражение через $e_{i_1\dots i_s}$, $e'_{i_1\dots i_s}$. В левом столбце таблицы для каждой подалгебры $\widetilde{G}$ указано ее характеристическое представление $\chi_{\widetilde{G}}$ и представление $\omega_{\widetilde{G}}$, которое индуцируется на $\widetilde{G}$ простейшим представлением алгебры. Индекс подалгебры указан в качестве верхнего индекса при символе A_1.

Для алгебр, у которых все корни имеют одинаковую длину, в частности для алгебр E_6, E_7, E_8, имеем соотношения

$$\left.\begin{aligned}&e_{i_1i_2\dots i_k}\circ e'_{i_k}=e_{i_1i_2\dots i_{k-1}}, &(9.9)\\&(e_{i_1i_2\dots i_k}, e'_{i_1i_2\dots i_k})=(-1)^{k-1} &(9.10)\end{aligned}\right\}\ (\text{если } e_{i_1i_2\dots i_k}\neq 0)$$

(в соответствии с n°7 мы нормируем скалярное произведение так, чтобы квадраты длин корней были равны 2) *.

Используя формулы (9.9) — (9.10), убеждаемся в том, что выполнены соотношения

$$x\circ e_x=(x, x)\,e_x,\qquad x\circ e_{-x}=-(x, x)\,e_{-x},\qquad e_x\circ e_{-x}=x.\tag{9.11}$$

Доказательство теоремы 9.3 будет дано в § 10.

n° 31. В предыдущем n° описаны трехчленные S-подалгебры простых алгебр. Опираясь на нижеследующую теорему 9.4, мы можем перечислить трехчленные S-подалгебры в произвольной полупростой алгебре Ли.

Теорема 9.4. *Пусть*

$$G=G_1+G_2+\dots+G_s\tag{9.12}$$

---

* Доказательство формул (9.9) — (9.10). Согласно тождеству (76) работы [3],

$$e_{i_1\dots i_k}\circ e'_{i_k}=E_{-i_k}E_{i_k}e_{i_1\dots i_{k-1}}=-\frac{(p-1)\,q}{2}(\alpha_{i_k}, \alpha_{i_k})(e_{i_k}, e'_{i_k})\,e_{i_1\dots i_{k-1}}\tag{$*$}$$

Положим $\beta=\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_{k-1}}$. Поскольку $\beta-\alpha_{i_k}$ — не корень, то $p=0$. Поскольку $e_{i_1\dots i_k}\neq 0$, то $\beta+\alpha_{i_k}$ — корень. Корни β, α_{i_k} порождают подалгебру типа A_2. Поэтому $\beta+2\alpha_{i_k}$ — не корень и $q=1$. Подставляя в соотношение $(*)$ значения $p=0$, $q=1$, $(\alpha_{i_k}, \alpha_{i_k})=2$, $(e_{i_k}, e'_{i_k})=1$, получим формулу (9.9). Формула (9.10) выводится из (9.9) при помощи тождества

$$(u, v\circ w)=-(u\circ w, v).$$

— разложение полупростой алгебры G на простые идеалы. Пусть $\widetilde{G}_k$ — трехчленная S-подалгебра в алгебре G_k ($k = 1, 2, \ldots, s$). Обозначим через P_k изоморфное отображение $\widetilde{G}_1$ на $\widetilde{G}_k$. Тогда

$$\widetilde{G} = (E + P_2 + \ldots + P_s)\,\widetilde{G}_1 \tag{9.13}$$

является трехчленной S-подалгеброй в G. Если, не меняя подалгебр $\widetilde{G}_k$, изменить изоморфные отображения P_k, то $\widetilde{G}$ заменится на сопряженную подалгебру. Все трехчленные S-подалгебры алгебры G получаются описанным путем.

Доказательство. Прямое утверждение теоремы непосредственно вытекает из теоремы 7.8, если учесть, что проекция подалгебры $\widetilde{G}$, заданной формулой (9.13), на подалгебру G_k равна $\widetilde{G}_k$.

Если P_k и P'_k — два изоморфизма $\widetilde{G}_1$ на $\widetilde{G}_k$, то $P'_k P_k^{-1} = T$ является автоморфизмом $\widetilde{G}_k$. Поскольку $\widetilde{G}$ не имеет внешних автоморфизмов, автоморфизм T — внутренний и, стало быть, естественно продолжается на всю алгебру G. Легко видеть, что замена P_k на P'_k приводит к замене $\widetilde{G}$ на $T\widetilde{G}$.

Для доказательства обратного утверждения достаточно доказать, что проектирование G на G_k определяет изоморфное отображение $\widetilde{G}$ в G_k. Это отображение является во всяком случае гомоморфизмом. Если бы этот гомоморфизм был нулевым, то подалгебра $\widetilde{G}$ содержалась бы в регулярной подалгебре $G_1 + \ldots + G_{k-1} + G_{k+1} + \ldots + G_s$, а это противоречит предположению о том, что $\widetilde{G}$ является S-подалгеброй. В силу простоты $\widetilde{G}$, отсюда следует, что ядро гомоморфизма равно нулю. Доказательство закончено.

Теорема 9.4 устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами сопряженных трехчленных S-подалгебр полупростой алгебры G и наборами классов сопряженных трехчленных S-подалгебр в идеалах $G_1, G_2, \ldots, G_s$. Мы будем обозначать через $(a_{i_1 i_2 \ldots i_s})$ подалгебру, проекция которой в идеал G_k принадлежит классу (a_{i_k}). В частности, символ $(a_{0, 0, \ldots, 0})$ отвечает главной подалгебре алгебры G.

§ 10. Таблица трехчленных подалгебр особых простых алгебр Ли. Доказательство теоремы 9.3

n° 32. Пусть G — произвольная полупростая алгебра Ли. Возьмем по одной подалгебре из каждого класса сопряженных регулярных подалгебр и в каждой избранной подалгебре рассмотрим полный набор несопряженных трехчленных S-подалгебр. Вычисляя характеристики этих подалгебр (по отношению к алгебре G), мы получим полный набор характеристик всех трехчленных подалгебр алгебры G. Описанное построение может быть произведено вполне эффективным образом, поскольку нам известны регулярные подалгебры и трехчленные S-подалгебры во всех полупростых алгебрах Ли. Выполняя это построение для особых простых алгебр, мы приходим к следующей теореме:

Теорема 10.1. *Полный перечень характеристик трехчленных подалгебр особых простых алгебр Ли дается таблицами* 16—20. *Во второй графе этих таблиц для каждой трехчленной подалгебры $\tilde{G}$ приводится полный перечень минимальных объемлющих ее регулярных подалгебр.*

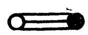
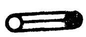
Во всех тех случаях, когда $\tilde{G}$ не является главной подалгеброй в минимальной объемлющей регулярной подалгебре G', в таблицах указан тип $(a_{i_1 i_2 \ldots i_s})$ включения $\tilde{G} \subseteq G'$. Далее, для каждой подалгебры $\tilde{G}$ приводятся коэффициенты разложения по простым корням ее определяющего вектора f и индекс $\tilde{G}$ относительно G.

Из таблицы 16—20 мы видим, что, как правило, каждому значению индекса отвечает единственная, с точностью до сопряженности, трехчленная подалгебра. Поэтому удобно задавать трехчленные подалгебры особых простых алгебр их индексами. В тех редких случаях, когда одному значению индекса соответствуют две несопряженные подалгебры, мы будем для различения этих подалгебр снабжать индекс одной из них штрихом, а индекс другой — двумя штрихами.

Теорема 8.3 позволяет легко выделить целочисленные среди трехчленных подалгебр, перечисленных в таблицах 16—20. В таблице 21 для каждой из них указано характеристическое представление (X_k обозначает, как в таблицах 13 и 14, неприводимую компоненту со схемой $\overset{k}{\circ}$).

Таблица 16

Трехчленные подалгебры алгебры G_2

Индекс	Минимальные объемлющие регулярные подалгебры	Характеристика		Координаты определяющего вектора	
					
1	A_1	1	0	2	3
3	$\tilde{A}_1$	0	1	3	6
4	$A_1 + \tilde{A}_1$	2	0	4	6
28	G_2	2	2	10	18

Теорема 10.1 выведена нами из теоремы 9.3, которая еще не доказана. Покажем, что обе теоремы 10.1 и 9.3 вытекают из следующего ослабленного варианта теоремы 9.3:

Таблица 17

Трехчленные подалгебры алгебры F_4

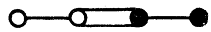
Индекс	Минимальные объемлющие регулярные подалгебры	Характеристика				Координаты определяющего вектора			
									
1	A_1	1	0	0	0	2	3	4	2
2	$2A_1$; $\widetilde{A}_1$	0	0	0	1	2	4	6	4
3	$3A_1$	0	1	0	0	3	6	8	4
4	$4A_1$; $2A_1+\widetilde{A}_1$; A_2	2	0	0	0	4	6	8	4
6	$A_2+\widetilde{A}_1$	0	0	1	0	4	8	12	6
8	$\widetilde{A}_2$	0	0	0	2	4	8	12	8
9	$\widetilde{A}_2+A_1$	0	1	0	1	5	10	14	8
10	A_3; B_2	2	0	0	1	6	10	14	8
11	B_2+A_1	1	0	1	0	6	11	16	8
12	$A_3+\widetilde{A}_1$; B_2+2A_2; $A_2+\widetilde{A}_2$	0	2	0	0	6	12	16	8
28	D_4; B_3	2	2	0	0	10	18	24	12
35	C_3	1	0	1	2	10	19	28	16
36	C_3+A_1	0	2	0	2	10	20	28	16
60	B_4	2	2	0	2	14	26	36	20
156	F_4	2	2	2	2	22	42	60	32

Таблица 18

Трехчленные подалгебры алгебры E_6

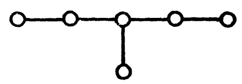
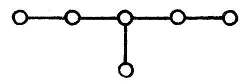
Индекс	Минимальные объемлющие регулярные подалгебры	Характеристика	Координаты определяющего вектора
			
1	A_1	0 0 0 0 0 1	1 2 3 2 1 2
2	$2A_1$	1 0 0 0 1 0	2 3 4 3 2 2
3	$3A_1$	0 0 1 0 0 0	2 4 6 4 2 3
4	$4A_1$; A_2	0 0 0 0 0 2	2 4 6 4 2 4
5	$A_2 + A_1$	1 0 0 0 1 1	3 5 7 5 3 4
6	$A_2 + 2A_1$	0 1 0 1 0 0	3 6 8 6 3 4
8	$2A_2$	2 0 0 0 2 0	4 6 8 6 4 4
9	$2A_2 + A_1$	1 0 1 0 1 0	4 7 10 7 4 5
10	A_3	1 0 0 0 1 2	4 7 10 7 4 6
11	$A_3 + A_1$	0 1 0 1 0 1	4 8 11 8 4 6
12	$A_3 + 2A_1$; $3A_2$; $D_4(a_1)$	0 0 2 0 0 0	4 8 12 8 4 6
20	A_4	2 0 0 0 2 2	6 10 14 10 6 8
21	$A_4 + A_1$	1 1 0 1 1 1	6 11 15 11 6 8
28	D_4	0 0 2 0 0 2	6 12 18 12 6 10
30	D_5 (a_1)	1 1 0 1 1 2	7 13 18 13 7 10
35	A_5	2 1 0 1 2 1	8 14 19 14 8 10
36	$A_5 + A_1$	2 0 2 0 2 0	8 14 20 14 8 10
60	D_5	2 0 2 0 2 2	10 18 26 18 10 14
84	E_6 (a_1)	2 2 0 2 2 2	12 22 30 22 12 16
156	E_6	2 2 2 2 2 2	16 30 42 30 16 22

Таблица 19

Трехчленные подалгебры алгебры E_7

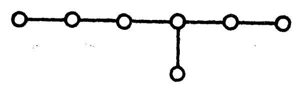
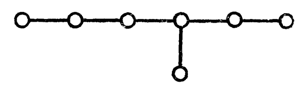
Индекс	Минимальные объемлющие регулярные подалгебры	Характеристика	Координаты определяющего вектора
			
1	A_1	0 0 0 0 0 1 0	1 2 3 4 3 2 2
2	$2A_1$	0 1 0 0 0 0 0	2 4 5 6 4 2 3
3′	$[3A_1]'$	0 0 0 0 1 0 0	2 4 6 8 6 3 4
3″	$[3A_1]''$	2 0 0 0 0 0 0	3 4 5 6 4 2 3
4′	$[4A_1]'$; A_2	0 0 0 0 0 2 0	2 4 6 8 6 4 4
4″	$[4A_1]''$	1 0 0 0 0 0 1	3 5 7 9 6 3 5
5	$5A_1$; A_2+A_1	0 1 0 0 0 1 0	3 6 8 10 7 4 5
6	$6A_1$; A_2+2A_1	0 0 0 1 0 0 0	3 6 9 12 8 4 6
7	$7A_1$; A_2+3A_1	0 0 0 0 0 0 2	3 6 9 12 8 4 7
8	$2A_2$	0 2 0 0 0 0 0	4 8 10 12 8 4 6
9	$2A_2+A_1$	0 1 0 0 1 0 0	4 8 11 14 10 5 7
10	A_3	0 1 0 0 0 2 0	4 8 11 14 10 6 7
11′	$[A_3+A_1]'$	0 0 0 1 0 1 0	4 8 12 16 11 6 8
11″	$[A_3+A_1]''$	2 0 0 0 0 2 0	5 8 11 14 10 6 7
12′	$3A_2$; $[A_3+2A_1]'$; $D_4(a_1)$	0 0 0 0 2 0 0	4 8 12 16 12 6 8
12″	$[A_3+2A_1]''$	1 0 1 0 0 1 0	5 9 13 16 11 6 8
13	A_3+3A_1; $D_4+A_1\ (a_{1,0})$	1 0 0 0 1 0 1	5 9 13 17 12 6 9
14	A_3+A_2; $D_4+2A_1\ (a_{1,0,0})$	0 1 0 1 0 0 0	5 10 14 18 12 6 9
15	$A_3+A_2+A_1$; $D_4+3A_1\ (a_{1,0,0,0})$	0 0 2 0 0 0 0	5 10 15 18 12 6 9

Таблица 19 (продолжение)

Индекс	Минимальные объемлющие регулярные подалгебры	Характеристика	Координаты определяющего вектора
20	A_4; $2A_3$	$\begin{matrix}0&2&0&0&0&2\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}6&12&16&20&14&8\\&&&10&&\end{matrix}$
21	A_4+A_1; $2A_3+A_1$	$\begin{matrix}0&1&0&1&0&1\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}6&12&17&22&15&8\\&&&11&&\end{matrix}$
24	A_4+A_2	$\begin{matrix}0&0&0&2&0&0\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}6&12&18&24&16&8\\&&&12&&\end{matrix}$
28	D_4	$\begin{matrix}0&0&0&0&2&2\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}6&12&18&24&18&10\\&&&12&&\end{matrix}$
29	D_4+A_1	$\begin{matrix}1&0&0&0&1&2\\&&&1&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}7&13&19&25&18&10\\&&&13&&\end{matrix}$
30	D_4+2A_1; $D_5\ (a_1)$	$\begin{matrix}0&1&0&1&0&2\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}7&14&20&26&18&10\\&&&13&&\end{matrix}$
31	D_4+3A_1; $D_5+A_1\ (a_{1,\,0})$	$\begin{matrix}0&0&2&0&0&2\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}7&14&21&26&18&10\\&&&13&&\end{matrix}$
35′	$[A_5]'$	$\begin{matrix}0&2&0&1&0&1\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}8&16&22&28&19&10\\&&&14&&\end{matrix}$
35″	$[A_5]''$	$\begin{matrix}2&2&0&0&0&2\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}9&16&21&26&18&10\\&&&13&&\end{matrix}$
36′	$[A_5+A_1]'$	$\begin{matrix}0&2&0&0&2&0\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}8&16&22&28&20&10\\&&&14&&\end{matrix}$
36″	$[A_5+A_1]''$	$\begin{matrix}2&1&0&1&0&1\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}9&16&22&28&19&10\\&&&14&&\end{matrix}$
38	$D_6\,(a_2)$	$\begin{matrix}2&0&1&0&1&0\\&&&1&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}9&16&23&29&20&10\\&&&15&&\end{matrix}$
39	A_5+A_2; $D_6+A_1\ (a_{2,\,0})$	$\begin{matrix}2&0&0&2&0&0\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}9&16&23&30&20&10\\&&&15&&\end{matrix}$
56	A_6	$\begin{matrix}0&2&0&2&0&0\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}10&20&28&36&24&12\\&&&18&&\end{matrix}$
60	D_5	$\begin{matrix}0&2&0&0&2&0\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}10&20&28&36&26&14\\&&&18&&\end{matrix}$
61	D_5+A_1	$\begin{matrix}0&1&1&0&1&2\\&&&1&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}10&20&29&37&26&14\\&&&19&&\end{matrix}$
62	$D_6\ (a_1)$	$\begin{matrix}2&0&1&0&1&2\\&&&1&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}11&20&29&37&26&14\\&&&19&&\end{matrix}$
63	$D_6+A_1\ (a_{1,\,0})$	$\begin{matrix}2&0&0&2&0&2\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}11&20&29&38&26&14\\&&&19&&\end{matrix}$
84	A_7; $E_6\ (a_1)$	$\begin{matrix}0&2&0&2&0&2\\&&&0&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}12&24&34&44&30&16\\&&&22&&\end{matrix}$
110	D_6	$\begin{matrix}2&2&1&0&1&2\\&&&1&&\end{matrix}$	$\begin{matrix}15&28&39&49&34&18\\&&&25&&\end{matrix}$

Таблица 19 (продолжение)

Индекс	Минимальные объемлющие регулярные подалгебры	Характеристика	Координаты определяющего вектора
111	$D_6 + A_1$	2 2 0 2 0 2 0	15 28 39 50 34 18 25
156	E_6	0 2 0 2 2 2 0	16 32 46 60 42 22 30
159	$E_7\ (a_2)$	2 0 2 0 2 2 2	17 32 47 60 42 22 31
231	$E_7\ (a_1)$	2 2 2 0 2 2 2	21 40 57 72 50 26 37
399	E_7	2 2 2 2 2 2 2	27 52 75 96 66 34 49

Теорема 10.2. *Характеристика любой трехчленной S-подалгебры особой алгебры Ли содержится в таблицах* 16—20.

Действительно, теорему 9.3 можно расчленить следующим образом:

1) Каждая из пяти схем, приведенных в формулировке теоремы 9.3, задает характеристику некоторой трехчленной подалгебры в соответствующей особой алгебре Ли.

2) Все эти подалгебры являются S-подалгебрами.

3) Любая неглавная трехчленная S-подалгебра особой алгебры Ли имеет одну из пяти перечисленных характеристик.

Далее теорему 10.1 можно расчленить так:

А) Каждой характеристике из таблиц 16—20 отвечает некоторая трехчленная подалгебра $\widetilde{G}$ в соответствующей особой алгебре Ли.

Б) Подалгебра $\widetilde{G}$ содержится во всех регулярных подалгебрах, указанных во второй графе таблиц.

В) В таблицы попала каждая минимальная среди объемлющих $\widetilde{G}$ регулярных подалгебр.

Г) Каждая из указанных в таблицах регулярных подалгебр является минимальной среди объемлющих $\widetilde{G}$ регулярных подалгебр.

Д) Характеристика любой трехчленной подалгебры особых алгебр Ли содержится в таблицах 16—20.

Справедливость утверждения 1) уже доказана тем, что соответствующие подалгебры построены в таблице 15. Анализируя способ

Таблица 20

Трехчленные подалгебры алгебры E_8

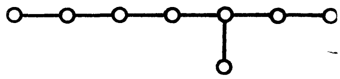
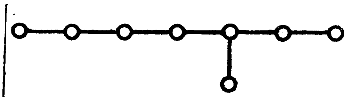
Индекс	Минимальные объемлющие регулярные подалгебры	Характеристика							Координаты определяющего вектора						
															
1	A_1	1	0	0	0	0 0	0	0	2	3	4	5	6 3	4	2
2	$2A_1$	0	0	0	0	0 0	0	1	2	4	6	8	10 5	7	4
3	$3A_1$	0	1	0	0	0 0	0	0	3	6	8	10	12 6	8	4
4′	$[4A_1]'$	0	0	0	0	0 1	0	0	3	6	9	12	15 8	10	5
4″	$[4A_1]''$; A_2	2	0	0	0	0 0	0	0	4	6	8	10	12 6	8	4
5	$5A_1$; A_2+A_1	1	0	0	0	0 0	0	1	4	7	10	13	16 8	11	6
6	$6A_1$; A_2+2A_1	0	0	1	0	0 0	0	0	4	8	12	15	18 9	12	6
7	$7A_1$; A_2+3A_1	0	0	0	0	0 0	1	0	4	8	12	16	20 10	14	7
8	$8A_1$; A_2+4A_1; $2A_2$	0	0	0	0	0 0	0	2	4	8	12	16	20 10	14	8
9	$2A_2+A_1$	0	1	0	0	0 0	0	1	5	10	14	18	22 11	15	8
10′	A_3	2	0	0	0	0 0	0	1	6	10	14	18	22 11	15	8
10″	$2A_2+2A_1$	0	0	0	1	0 0	0	0	5	10	15	20	24 12	16	8
11	A_3+A_1	1	0	1	0	0 0	0	0	6	11	16	20	24 12	16	8
12′	$[A_3+2A_1]'$	0	2	0	0	0 0	0	0	6	12	16	20	24 12	16	8
12″	$[A_3+2A_1]''$; $3A_2$; $D_4\ (a_1)$	1	0	0	0	0 0	1	0	6	11	16	21	26 13	18	9
13	A_3+3A_1; $3A_2+A_1$; $D_4+A_1\ (a_{1,0})$	0	1	0	0	0 1	0	0	6	12	17	22	27 14	18	9
14	A_3+4A_1; A_3+A_2; $D_4+2A_1\ (a_{1,0,0})$	0	0	1	0	0 0	0	1	6	12	18	23	28 14	19	10
15	$D_4+3A_1\ (a_{1,0,0,0})$; $A_3+A_2+A_1$	0	0	0	0	1 0	0	0	6	12	18	24	30 15	20	10

Таблица 20 (продолжение)

Индекс	Минимальные объемлющие регулярные подалгебры	Характеристика	Координаты определяющего вектора
16	$A_3+A_2+2A_1$; $4A_2$; $D_4+4A_1\ (a_{1,0,0,0,0})$ $D_4+A_2\ (a_{1,0})$	0 0 0 0 0 0 0 2	6 12 18 24 30 20 10 16
20″	A_4; $[2A_3]''$	2 0 0 0 0 0 2 0	8 14 20 26 32 22 12 16
20′	$[2A_3]'$	0 0 0 1 0 0 1 0	7 14 21 28 34 23 12 17
21	$2A_3+A_1$; A_4+A_1	1 0 1 0 0 0 1 0	8 15 22 28 34 23 12 17
22	$2A_3+2A_1$; A_4+2A_1; $D_4+A_3\ (a_{1,0})$	1 0 0 0 1 0 0 0	8 15 22 29 36 24 12 18
24	A_4+A_2; $D_4+D_4\ (a_{1,1})$	0 0 2 0 0 0 0 0	8 16 24 30 36 24 12 18
25	$A_4+A_2+A_1$	0 0 1 0 0 1 0 0	8 16 24 31 38 26 13 19
28	D_4	2 2 0 0 0 0 0 0	10 18 24 30 36 24 12 18
29	D_4+A_1	2 1 0 0 0 0 0 1	10 18 25 32 39 26 13 20
30′	D_4+2A_1; $D_5\ (a_1)$	2 0 1 0 0 0 1 0	10 18 26 33 40 27 14 20
30″	A_4+A_3; $D_5+D_3\ (a_{2,0})$	0 1 0 0 1 0 0 0	9 18 26 34 42 28 14 21
31	D_4+3A_1; $D_5+A_1\ (a_{1,0})$	2 0 0 0 1 0 0 0	10 18 26 34 42 28 14 21
32	D_4+4A_1; D_4+A_2; $D_5+2A_1\ (a_{1,0,0})$	2 0 0 0 0 0 0 2	10 18 26 34 42 28 14 22
34	$D_5+A_2\ (a_{1,0})$	1 0 1 0 0 1 0 0	10 19 28 36 44 30 15 22
35	A_5	1 0 1 0 0 0 2 0	10 19 28 36 44 30 16 22
36′	$[A_5+A_1]'$	1 0 0 0 1 0 1 0	10 19 28 37 46 31 16 23
36″	$[A_5+A_1]''$	0 2 0 0 0 0 2 0	10 20 28 36 44 30 16 22
37	A_5+2A_1	0 1 0 1 0 0 1 0	10 20 29 38 46 31 16 23

Таблица 20 (продолжение)

Индекс	Минимальные объемлющие регулярные подалгебры	Характеристика	Координаты определяющего вектора
38	D_4+A_3; D_6 (a_2)	0 1 0 0 0 1 0 1	10 20 29 38 47 32 16 24
39	A_5+A_2; $D_6+A_1\,(a_{2,0})$	0 0 1 0 1 0 0 0	10 20 30 39 48 32 16 24
40	$A_5+A_2+A_1$; $2A_4$; D_6+2A_1 $(a_{2,0,0})$; D_5+A_3 $(a_{1,0})$; $2D_4$ $(a_{1,2})$	0 0 0 2 0 0 0 0	10 20 30 40 48 32 16 24
56	$2D_4$; A_6	0 0 2 0 0 0 2 0	12 24 36 46 56 38 20 28
57	A_6+A_1	0 0 1 0 1 0 1 0	12 24 36 47 58 39 20 29
60	D_5	2 2 0 0 0 0 2 0	14 26 36 46 56 38 20 28
61	D_5+A_1	2 1 0 1 0 0 1 0	14 26 37 48 58 39 20 29
62	D_5+2A_1; $D_6\,(a_1)$	2 1 0 0 0 1 0 1	14 26 37 48 59 40 20 30
63	D_6+A_1 $(a_{1,0})$	2 0 1 0 1 0 0 0	14 26 38 49 60 40 20 30
64	D_5+A_2; $D_6+2A_1\,(a_{1,0,0})$	2 0 0 2 0 0 0 0	14 26 38 50 60 40 20 30
70	D_5+A_3; D_7 (a_2)	1 0 1 0 1 0 1 0	14 27 40 52 64 43 22 32
84′	$[A_7]'$	0 1 1 0 1 0 1 0	15 30 44 57 70 47 24 35
84″	$[A_7]''$; E_6 (a_1)	2 0 2 0 0 0 2 0	16 30 44 56 68 46 24 34
85	A_7+A_1; $E_6+A_1(a_{1,0})$	2 0 1 0 1 0 1 0	16 30 44 57 70 47 24 35
88	$E_6+A_2\,(a_{1,0})$; D_8 (a_3)	2 0 0 0 2 0 0 0	16 30 44 58 72 48 24 36
110	D_6	2 1 0 0 0 1 2 1	18 34 49 64 79 54 28 40
111	D_6+A_1	2 0 1 0 1 0 2 0	18 34 50 65 80 54 28 40
112	D_6+2A_1; D_7 (a_1)	2 0 0 2 0 0 2 0	18 34 50 66 80 54 28 40
120	A_8; D_8 (a_2)	0 2 0 0 2 0 0 0	18 36 52 68 84 56 28 42

Таблица 20 (продолжение)

Индекс	Минимальные объемлющие регулярные подалгебры	Характеристика	Координаты определяющего вектора
156	E_6	2 2 2 0 0 0 2 0	22 42 60 76 92 62 32 46
157	E_6+A_1	2 2 1 0 1 0 1 0	22 42 60 77 94 63 32 47
159	$E_7\ (a_2)$	2 2 0 1 0 1 0 1	22 42 60 78 95 64 32 48
160	$E_7+A_1\ (a_{2,0})$	2 2 0 0 2 0 0 0	22 42 60 78 96 64 32 48
166	E_6+A_2	2 2 0 0 1 1 1 0	22 42 60 78 96 65 33 48
182	D_7	1 0 1 1 0 1 2 1	22 43 64 84 103 70 36 52
184	$D_8\ (a_1)$	0 2 0 0 2 0 2 0	22 44 68 84 104 70 36 52
231	$E_7\ (a_1)$	2 2 0 1 0 1 2 1	26 50 72 94 115 78 40 58
232	$E_7+A_1\ (a_{1,0})$	2 2 0 0 2 0 2 0	26 50 76 94 116 78 40 58
280	D_8	2 0 2 0 2 0 2 0	28 54 80 104 128 86 44 64
399	E_7	2 2 2 1 0 1 2 1	34 66 96 124 151 102 52 76
400	E_7+A_1	2 2 2 0 2 0 2 0	34 66 96 124 152 102 52 76
520	$E_8\ (a_2)$	2 2 0 2 0 2 2 2	38 74 108 142 174 118 60 88
760	$E_8\ (a_1)$	2 2 2 2 0 2 2 2	46 90 132 172 210 142 72 106
1240	E_8	2 2 2 2 2 2 2 2	58 114 168 220 270 182 92 136

Таблица 21

Характеристические представления целых трехчленных подалгебр в особых алгебрах

Подалгебра	Характеристическое представление
	В алгебре G_2:
4	$X_4 + 2X_2$
28	X_{10}
	В алгебре F_4:
4	$X_4 + 12X_2 + 8X_0$
8	$7X_4 + 14X_0$
12	$2X_6 + 4X_4 + 5X_2$
28	$X_{10} + 5X_6 + 3X_0$
36	$2X_{10} + X_8 + X_6 + X_4 + 2X_2$
60	$X_{14} + 2X_{10} + X_6 + X_4$
156	$X_{22} + X_{14} + X_{10}$
	В алгебре E_6:
4	$X_4 + 18X_2 + 16X_0$
8	$8X_4 + 7X_2 + 14X_0$
12	$2X_6 + 7X_4 + 8X_2 + 2X_0$
20	$X_8 + 5X_6 + 3X_4 + 4X_2 + 4X_0$
28	$X_{10} + 8X_6 + 8X_0$
36	$2X_{10} + 2X_8 + 2X_6 + 3X_4 + 2X_2$
60	$X_{14} + 3X_{10} + X_8 + X_6 + 2X_4 + X_0$
84	$X_{16} + X_{14} + 2X_{10} + X_8 + X_6 + X_4$
156	$X_{22} + X_{16} + X_{14} + X_{10} + X_8$
	В алгебре E_7:
3″	$26X_2 + 52X_0$
4′	$X_4 + 30X_2 + 35X_0$
7	$7X_4 + 27X_2 + 14X_0$
8	$10X_4 + 21X_2 + 17X_0$
11″	$X_6 + 15X_4 + 9X_2 + 21X_0$
12′	$2X_6 + 13X_4 + 14X_2 + 9X_0$
15	$5X_6 + 10X_4 + 14X_2 + 3X_0$
20	$X_8 + 7X_6 + 9X_4 + 6X_2 + 9X_0$
24	$3X_8 + 5X_6 + 10X_4 + 5X_2 + 3X_0$
28	$X_{10} + 14X_6 + 21X_0$
31	$X_{10} + 3X_8 + 8X_6 + 3X_4 + 6X_2 + 3X_0$
35″	$X_{10} + 7X_8 + X_6 + 7X_4 + 14X_0$
36′	$2X_{10} + 4X_8 + 4X_6 + 7X_4 + 2X_2 + 3X_0$
39	$3X_{10} + 3X_8 + 5X_6 + 4X_4 + 5X_2$
56	$3X_{12} + X_{10} + 3X_8 + 5X_6 + 3X_4 + 3X_0$
60	$X_{14} + 5X_{10} + 3X_8 + X_6 + 4X_4 + 6X_0$
63	$X_{14} + X_{12} + 4X_{10} + 2X_8 + 3X_6 + 2X_4 + 3X_2$
84	$X_{16} + X_{14} + 2X_{12} + 2X_{10} + 3X_8 + X_6 + 3X_4 + X_0$
111	$X_{18} + X_{16} + 2X_{14} + 3X_{10} + X_8 + 2X_6 + X_4 + X_2$
156	$X_{22} + 3X_{16} + X_{14} + X_{10} + 3X_8 + 3X_0$
159	$X_{22} + X_{18} + X_{16} + 2X_{14} + 2X_{10} + X_8 + X_6 + X_2$
231	$X_{26} + X_{22} + X_{18} + X_{16} + X_{14} + 2X_{10} + X_6$
399	$X_{34} + X_{26} + X_{22} + X_{18} + X_{14} + X_{10}$

Подалгебра	Характеристическое представление
	В алгебре E_8:
4″	$X_4 + 54X_2 + 78X_0$
8	$14X_4 + 49X_2 + 28X_0$
12′	$2X_6 + 25X_4 + 26X_2 + 28X_0$
16	$8X_6 + 20X_4 + 27X_2 + 8X_0$
20″	$X_8 + 11X_6 + 21X_4 + 10X_2 + 24X_0$
24	$3X_8 + 13X_6 + 14X_4 + 17X_2 + 6X_0$
28	$X_{10} + 26X_6 + 52X_0$
32	$X_{10} + 6X_8 + 14X_6 + 7X_4 + 13X_2 + 8X_0$
36″	$2X_{10} + 8X_8 + 8X_6 + 15X_4 + 2X_2 + 14X_0$
40	$4X_{10} + 6X_8 + 10X_6 + 10X_4 + 9X_2$
56	$3X_{12} + 5X_{10} + 3X_8 + 13X_6 + 3X_4 + 4X_2 + 6X_0$
60	$X_{14} + 9X_{10} + 7X_8 + X_6 + 8X_4 + 21X_0$
64	$X_{14} + 2X_{12} + 7X_{10} + 5X_8 + 5X_6 + 5X_4 + 7X_2 + X_0$
84″	$X_{16} + X_{14} + 6X_{12} + 2X_{10} + 7X_8 + X_6 + 7X_4 + 8X_0$
88	$X_{16} + 3X_{14} + 2X_{12} + 6X_{10} + 3X_8 + 5X_6 + 4X_4 + 3X_2$
112	$X_{18} + 2X_{16} + 3X_{14} + X_{12} + 6X_{10} + 3X_8 + 3X_6 + 2X_4 + 3X_2 + X_0$
120	$2X_{18} + X_{16} + 3X_{14} + 3X_{12} + 3X_{10} + 3X_8 + 5X_6 + X_4 + 2X_2$
156	$X_{22} + 7X_{16} + X_{14} + X_{10} + 7X_8 + 14X_0$
160	$X_{22} + 2X_{18} + 3X_{16} + 3X_{14} + 3X_{10} + 3X_8 + 2X_6 + X_4 + 3X_2$
184	$2X_{22} + X_{20} + X_{18} + X_{16} + 3X_{14} + 2X_{12} + 4X_{10} + X_8 + X_6 + X_4 + 2X_2$
232	$X_{26} + 2X_{22} + X_{20} + X_{18} + 2X_{16} + 2X_{14} + X_{12} + 3X_{10} + 2X_6 + X_4 + X_2$
280	$X_{28} + X_{26} + 2X_{22} + 2X_{18} + X_{16} + 3X_{14} + 2X_{10} + X_8 + X_6 + X_4$
400	$X_{34} + X_{28} + 2X_{26} + X_{22} + 2X_{18} + X_{16} + X_{14} + 2X_{10} + X_8 + X_2$
520	$X_{38} + X_{34} + X_{28} + X_{26} + 2X_{22} + X_{18} + X_{16} + X_{14} + X_{10} + X_6$
760	$X_{46} + X_{38} + X_{34} + X_{28} + X_{26} + X_{22} + X_{18} + X_{14} + X_{10}$
1240	$X_{58} + X_{46} + X_{38} + X_{32} + X_{26} + X_{22} + X_{14}$

образования таблиц 16—20, мы удостоверяемся в справедливости утверждений А) и Б). Тот же анализ приводит нас к выводу, что имеется следующая цепочка логических зависимостей:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Теорема 10.2} \arrow[dr] & & \text{Б)} \arrow[dl] \\
& \text{З)} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
& \text{В)} \arrow[d] & \text{Д)} \\
& \text{2)} \arrow[d] & \\
& \text{Г)} &
\end{tikzcd}
$$

Таким образом, из теоремы 10.2 следуют теоремы 9.3 и 10.1. Остальная часть этого параграфа будет посвящена доказательству теоремы 10.2.

n° 33. Пусть Π — система простых корней полупростой алгебры G, и пусть Π_0 — произвольная подсистема системы Π. Мы отнесем паре (Π, Π_0) число

$$\varepsilon(\Pi, \Pi_0) = N + r - k, \tag{10.1}$$

где N — размерность полупростой алгебры, для которой Π_0 — система простых корней; r — число элементов системы Π, не вошедших в Π_0; k — число корней алгебры G, имеющих вид

$$\alpha + \sum_{\beta \in \Pi_0} k_\beta \beta \quad (\alpha \in \Pi \setminus \Pi_0). \tag{10.2}$$

Теорема 10.3. *Пусть $\widetilde{G}$ — трехчленная подалгебра полупростой алгебры G. Пусть Π — система простых корней G и Π_0 — совокупность тех элементов из Π, на которых характеристика $\widetilde{G}$ равна нулю. Тогда*

$$\varepsilon(\Pi, \Pi_0) \geqslant 0. \tag{10.3}$$

и, если $\widetilde{G}$ является S-подалгеброй, то

$$\varepsilon(\Pi, \Pi_0) = 0. \tag{10.4}$$

Доказательство. Рассмотрим линейное представление $\tilde{\varphi}_G$ подалгебры $\widetilde{G}$, которое индуцируется присоединенным представлением алгебры G. Легко подсчитать, что для этого представления вес 0 имеет кратность $N + r$. С другой стороны, весовое подпространство, соответствующее весу $f' = \frac{2}{(f, f)} f$ (равному корню подалгебры $\widetilde{G}$), натягивается на корневые векторы e_α с индексами вида (10.2), и поэтому его размерность равна k.

Каждое неприводимое представление трехчленной алгебры имеет систему весов вида

$$\Lambda,\ \Lambda - f',\ \Lambda - 2f', \ldots,\ \Lambda - mf' = -\Lambda. \tag{10.5}$$

Поскольку каждое представление разлагается на неприводимые, то для любого представления кратность веса f' больше или равна кратности веса 0, и, если кратность f' больше кратности нуля, то представление содержит нулевую компоненту. В применении к представлению $\tilde{\varphi}_G$ это означает, что $N + r \geqslant k$ (и, следовательно, $\varepsilon(\Pi, \Pi_0) \geqslant 0$), и если $N + r > k$, то существует элемент алгебры G, перестановочный с каждым элементом подалгебры $\widetilde{G}$, и, в силу теоремы 7.4, $\widetilde{G}$ является R-подалгеброй. Следовательно, если $\widetilde{G}$ — S-подалгебра, то $N + r = k$, $\varepsilon(\Pi, \Pi_0) = 0$.

Замечание. Условие $\varepsilon(\Pi, \Pi_0) = 0$ необходимо, но не достаточно для того, чтобы $\widetilde{G}$ являлась S-подалгеброй. Однако, используя теорему 7.5, легко установить, что если $\varepsilon(\Pi, \Pi_0) = 0$, то $\widetilde{G}$ может содержаться лишь в регулярных подалгебрах того же ранга, что и алгебра G.

Теорема 10.4. *Значение* $\varepsilon(\Pi, \Pi_0)$ *не изменится, если на схеме, задающей* Π, *стереть любой отрезок, концы которого не входят в* Π_0.

Доказательство. При описанном преобразовании схемы, очевидно, останутся неизменными значения N и r. Докажем, что k также не меняется. Для этого достаточно убедиться в том, что если выражение

$$\alpha + \sum_{\beta \in \Pi_0} k_\beta \beta \quad (\alpha \in \Pi \setminus \Pi_0) \tag{10.6}$$

представляло корень до преобразования схемы, то оно представляет корень и после преобразования, и, обратно, если оно задает корень после преобразования, то задавало корень и до преобразования. Если выражение (10.6) представляет корень, то этот корень выражается через систему Π_1, получающуюся из Π_0 присоединением элемента α. Схема же системы Π_1 не меняется при нашем преобразовании.

Теорема 10.5. *Пусть*

$$\Pi = \Pi' \cup \Pi'' \tag{10.7}$$

— разложение системы Π *на две ортогональные подсистемы, и пусть*

$$\Pi_0 = \Pi_0' \cup \Pi_0'', \tag{10.8}$$

где $\Pi_0' = \Pi_0 \cap \Pi'$, $\Pi_0'' = \Pi_0 \cap \Pi''$. *Тогда*

$$\varepsilon(\Pi, \Pi_0) = \varepsilon(\Pi', \Pi_0') + \varepsilon(\Pi'', \Pi_0''). \tag{10.9}$$

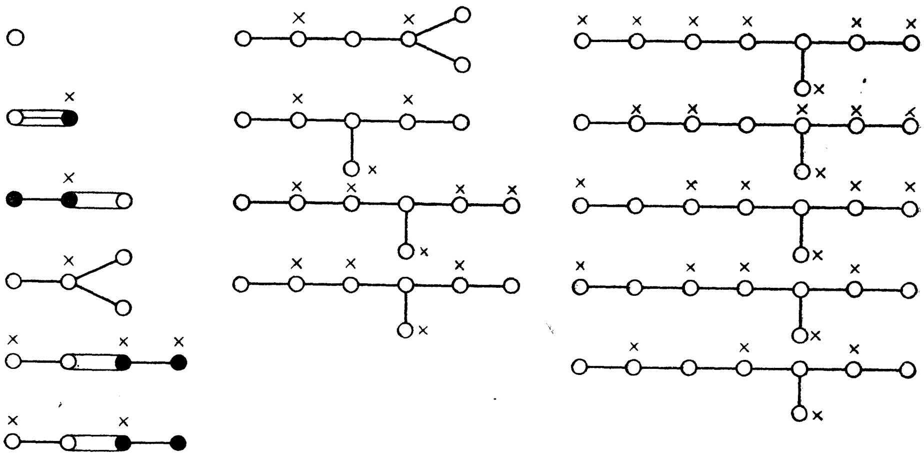
Доказательство. Справедливость тождества (10.9) вытекает из того, что аналогичные тождества выполнены для каждого из чисел N, r и k. Для r это очевидно, а для N и k вытекает из того, что каждый корень алгебры G имеет вид $\sum\limits_{\alpha \in \Pi'} p_\alpha \alpha$ или $\sum\limits_{\alpha \in \Pi''} p_\alpha \alpha$.

n°34. Теорема 10.6. *Пусть* G *— одна из особых алгебр Ли* (G_2, F_4, E_6, E_7 *или* E_8), *и пусть* Π *— система простых корней* G. *Полный перечень непустых подсистем* Π_0 *системы* Π, *удовлетворяющих условию* $\varepsilon(\Pi, \Pi_0) = 0$, *дается таблицей* 23. (Система Π изображается своей схемой, элементы из Π_0 отмечены знаком $\times$.)

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Pi}$ — любая нераспадающаяся подсистема системы Π. Такая система изометрична системе простых корней для одной из следующих алгебр: A_n ($n = 1, 2, \ldots, 7$), B_n ($n = 2, 3, 4$), C_3, D_n ($n = 4, 5, 6, 7$), E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

Пусть $\widetilde{\Pi}_0$ — произвольная подсистема системы $\widetilde{\Pi}$, такая, что $\widetilde{\Pi} \setminus \widetilde{\Pi}_0$ состоит из попарно ортогональных элементов. Путем непосредственной выкладки находим, что всегда $\varepsilon(\widetilde{\Pi}, \widetilde{\Pi}_0) \geqslant 0$, причем полный список случаев, когда $\varepsilon(\widetilde{\Pi}, \widetilde{\Pi}_0) = 0$, дается таблицей 22. Опираясь на тео-

Таблица 22



ремы 10.4 и 10.5, выводим отсюда, что полный список подсистем Π_0 систем Π, удовлетворяющих условию $\varepsilon(\Pi, \Pi_0) = 0$, дается таблицей 23.

Доказательство теоремы 10.2. Трехчленная S-подалгебра является целочисленной (теорема 7.6), и, в силу теоремы 8.3, ее характеристика составлена из числовых отметок 0 и 2. Согласно теоремам 10.3 и 10.6, совокупность Π_0 тех элементов Π, при которых стоит числовая отметка 0, либо пуста, либо дается одной из схем таблицы 23. Поэтому если в таблице 23 заменить крестики нулями и снабдить остальные пункты схем числовыми отметками 2, то мы получим все мыслимые значения характеристики для неглавных трехчленных S-подалгебр особых алгебр Ли. Все эти значения содержатся в таблицах 16—20 (в таблице 23 рядом с каждой схемой указан в скобках индекс соответствующей подалгебры из таблиц 16—20).

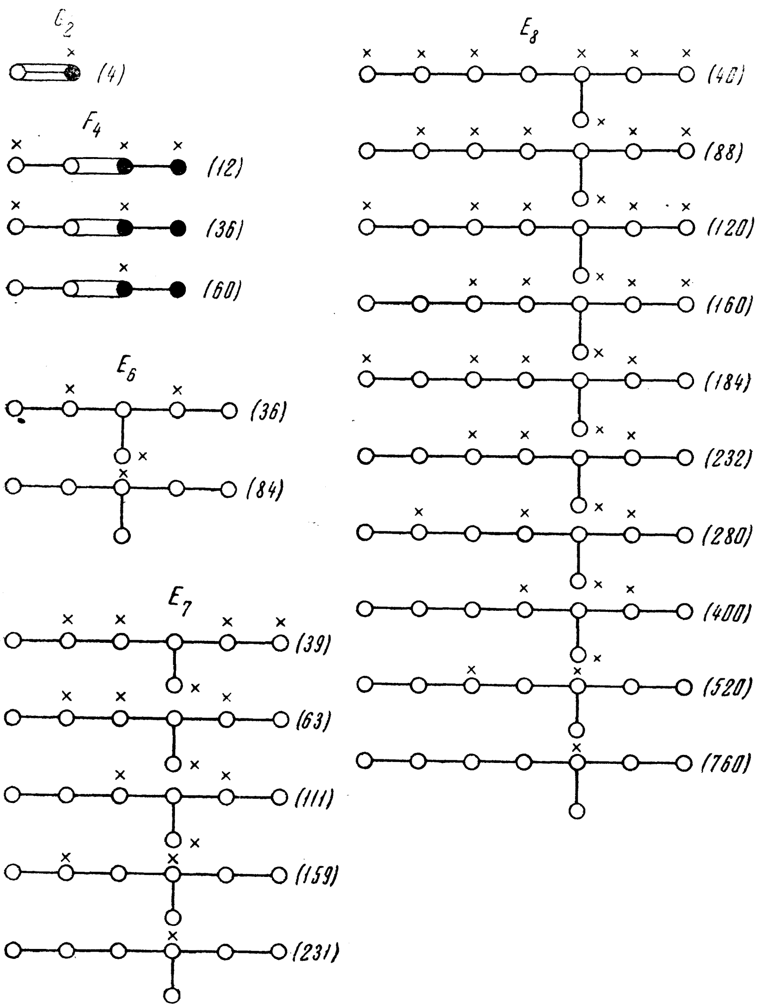
Глава IV

Простые подалгебры особых простых алгебр Ли

§ 11. Таблица простых подалгебр ранга, большего 1, в особых простых алгебрах Ли

n° 35. В настоящем параграфе сформулированы основные результаты главы IV: теорема 11.1, дающая классификацию простых S-подалгебр в особых алгебрах Ли (с точностью до сопряженности), и теорема 11.2, дающая полную классификацию всех простых подалгебр с точностью до линейной сопряженности. При этом рассматриваются только подалгебры ранга, большего 1, ибо подалгебры ранга 1 (трехчленные подалгебры) уже изучены в предыдущей главе. Теорема 11.2 выводится из теоремы 11.1. Что же касается теоремы 11.1, то ее доказательство сведено в настоящем параграфе к доказательству более слабого утверждения (n° 37, Б)), которое доказывается в следующем параграфе.

Таблица 23



Теорема 11.1. *Классификация простых S-подалгебр ранга, большего 1, в особых алгебрах G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 имеет следующий вид*:

1) *в G_2 и F_4 указанные подалгебры отсутствуют*;

2) *в E_6 имеется всего 6 классов сопряженных подалгебр: по 2 класса типа A_2 и G_2, переводимых друг в друга любым внешним автоморфизмом E_6, и по одному классу типа C_4 и F_4*;

3) *в E_7 — один класс сопряженных подалгебр типа A_2*;

4) *в E_8 — один класс сопряженных подалгебр типа B_2*.

По одному представителю из каждого класса сопряженных подалгебр описано в таблице 24.

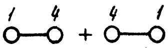
В таблице 24 используются те же обозначения, что и в таблице 15 (см. стр. 409). Верхний индекс при букве, указывающей тип подалгебры, попрежнему означает индекс этой подалгебры. Для каждой подалгебры дается ее размерность N. Простые корни подалгебры обозначаются буквами $x, y, z, u, \ldots$ (порядок соотнесения указывается вертикальными схемами). Используя тождества (9.9)—(9.10) n°30, убеждаемся, что выполнены соотношения (4.1) n° 14. Отсюда на основании теоремы 4.1 заключаем, что формулы таблицы 24 действительно определяют подалгебры указанных типов.

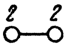
Таблица 24

Простые S-подалгебры ранга $r > 1$ в особых алгебрах Ли

$A_2^9 \subset E_6$

$N = 8$

$\chi_{\widetilde{G}}$: 

$\omega_{\widetilde{G}}$: 

x: $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ & & 1 & & \end{bmatrix}\frac{1}{9}$ $\quad\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 2 \\ & & 2 & & \end{bmatrix}$

y: $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 & 5 & 2 \\ & & 4 & & \end{bmatrix}\frac{1}{9}$ $\quad\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ & & -1 & & \end{bmatrix}$

$$e_x = \frac{1}{3}\left[\sqrt{2}\,(e_1 + e_2 + e_4 + e_5) + e_6\right], \qquad e_{-x} = e'_x$$

$$e_y = \frac{1}{3}\left[(-1 \pm i)e_{123} + \sqrt{2}\,(e_{634} - e_{236}) + (1 \pm i)\, e_{345} \pm ie_{234}\right]$$

$$e_{-y} = \frac{1}{3}\left[(-1 \mp i)e'_{123} + \sqrt{2}\,(e'_{634} - e'_{236}) + (1 \mp i)e'_{345} \pm ie'_{234}\right]$$

$G_2^3 \subset E_6$

$N = 14$

$\chi_{\widetilde{G}}$: 

$\omega_{\widetilde{G}}$: 

x: $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ & & 1 & & \end{bmatrix}\frac{1}{3}$ $\quad\begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ & & -1 & & \end{bmatrix}$

y: $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ & & 1 & & \end{bmatrix}\frac{1}{9}$ $\quad\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 2 \\ & & 2 & & \end{bmatrix}$

$$e_x = \frac{1}{i\sqrt{3}}\left[-\sqrt{2}\,e_{32} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,e_{34} + e_{36}\right]$$

$$e_{-x} = \frac{1}{i\sqrt{3}}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\,e'_{32} + \sqrt{2}\,e'_{34} + e'_{36}\right]$$

или
$$\begin{cases} e_x = \dfrac{1}{i\sqrt{3}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,e_{32} - \sqrt{2}\,e_{34} + e_{36}\right] \\[2ex] e_{-x} = \dfrac{1}{i\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}\,e'_{32} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,e'_{34} + e'_{36}\right] \end{cases}$$

$$e_y = \frac{1}{3}\left[\sqrt{2}\,(e_1 + e_2 + e_4 + e_5) + e_6\right], \qquad e_{-y} = e'_y$$

$C_4^1 \subset E_6$

$N = 36$

$\chi_{\widetilde{G}}$: 

$\omega_{\widetilde{G}}$: 

x: $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ & & 2 & & \end{bmatrix}$ $\quad\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & 2 & & \end{bmatrix}$

y: $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$ $\quad\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$

z: $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$ $\quad\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$

u: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & -1 & & \end{bmatrix}$

$$e_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(e_{236} + e_{436}), \quad e_{-x} = e'_x, \quad e_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 + e_5), \quad e_{-y} = e'_y$$

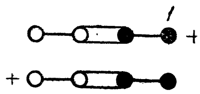
$$e_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(e_2 + e_4), \qquad e_{-z} = e'_z, \qquad e_u = e_3, \qquad e_{-u} = e'_u$$

$F_4^1 \subset E_6$

$N = 52$

$\chi_{\widetilde{G}}$:

$\omega_{\widetilde{G}}$:



x $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & & \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 2 & & \end{bmatrix}$

y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & -1 & & \end{bmatrix}$

z $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$

u $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$

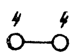
$e_x = e_6$, $e_{-x} = e'_x$, $e_y = e_3$, $e_{-y} = e'_y$, $e_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_4)$

$e_{-z} = e'_z$, $e_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_5)$, $e_{-u} = e'_u$

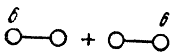
$A_2^{21} \subset E_7$

$N = 8$

$\chi_{\widetilde{G}}$:



$\omega_{\widetilde{G}}$:



x $\frac{1}{21}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ & & 4 & & & \end{bmatrix}$ $\frac{1}{21}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -7 & 2 & -1 \\ & & 2 & & & \end{bmatrix}$

y $\frac{1}{21}\begin{bmatrix} 4 & 9 & 15 & 15 & 10 & 6 \\ & & 7 & & & \end{bmatrix}$ $\frac{1}{21}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & 2 \\ & & 1 & & & \end{bmatrix}$

$e_x = \frac{1}{\sqrt{21}}(2e_1 + \sqrt{6}\, e_2 + \sqrt{6}\, e_3 + 2e_7 + e_5)$, $e_{-x} = e'_x$

$e_y = \frac{1}{\sqrt{21}}(2e_{5432} + \sqrt{6}\, e_6 - \sqrt{6}\, e_{5437} + 2e_{4321} + e_{3427})$

$e_{-y} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2e'_{5432} + \sqrt{6}\, e'_6 + \sqrt{6}\, e'_{5437} - 2e'_{4321} - e'_{3427})$

$B_2^{12} \subset E_8$

$N = 10$

$\chi_{\widetilde{G}}$:

x $\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 & 8 & 9 & 8 & 4 \\ & & & & 6 & & \end{bmatrix}$ $\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ & & & & -3 & & \end{bmatrix}$

y $\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 6 & 8 & 4 & 2 \\ & & & & 3 & & \end{bmatrix}$ $\frac{1}{12}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ & & & & -2 & & \end{bmatrix}$

$e_x = \frac{1}{\sqrt{12}}(\sqrt{3}\, e_{123} + 2ie_{4568} + \sqrt{3}\, e_{34567} + ie_{8567} + ie_{3458})$

$e_{-x} = e'_x$

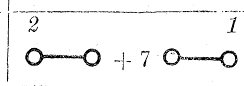
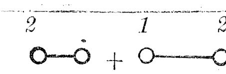
$e_y = \frac{1}{\sqrt{12}}(ie_{12} + i\, e_{4567} + 3e_{234} + e_{345} + i\sqrt{3}\, e_{58} - e_{567} - e_{456} + e_{56})$

$e_{-y} = e'_y$

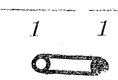
Таблица 25

Простые подалгебры ранга $r > 1$ в особых простых алгебрах Ли

Подалгебры типа A_2:

Индекс	в G_2: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	$\chi_{\widetilde{G}}$	$\omega_{\widetilde{G}}$	в F_4: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	$\chi_{\widetilde{G}}$	$\omega_{\widetilde{G}}$	в E_6: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	$\chi_{\widetilde{G}}$	$\omega_{\widetilde{G}}$	в E_7: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	$\chi_{\widetilde{G}}$	$\omega_{\widetilde{G}}$	в E_8: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	$\chi_{\widetilde{G}}$
1	A_2	T_1	T_1+N	A_2	$6T_1+8N$	$3T_1+8N$	A_2	$9T_1+16N$	$3T_1+9N$	A_2	$15T_1+35N$	$6T_1+20N$	A_2	$27T_1+78N$
2				$\widetilde{A}_2$	$3T_2+8N$	K_1+3T_1	$2A_2$	$3T_1+3T_2+8N$	K_1+3T_1+N	$2A_2$	$3K_1+9T_1+3T_2+11N$	$2K_1+6T_1+4N$	$2A_2$	$7K_1+21T_1+3T_2+21N$
							$2A_2$	$7K_1+14N$		$2A_2$	$7K_1+7T_1+T_2+15N$	$7T_1+T_2+2N$		
3				$D_4,\ A_2+\widetilde{A}_2$	$3K_1+K_2$	$3K_1+2N$	$D_4,\ 3A_2$	$6K_1+K_2+2N$	$3K_1+3N$	$D_4,\ 3A_2$	$12K_1+K_2+9N$	$6K_1+8N$	$D_4,\ 3A_2$	$24K_1+K_2+28N$
				$A_2+\widetilde{A}_2$	$K_1+T_1+T_3$	$K_1+T_1+T_2$	$3A_2$	$2K_1+2T_1+T_2+T_3$	$K_1+T_1+T_2+N$	$3A_2$	$4K_1+4T_1+3T_2+T_3+3N$	$2K_1+2T_1+2T_2+4N$	$3A_2$	$8K_1+8T_1+7T_2+T_3+14N$
4													$4A_2,\ D_4+A_2$	$7K_1+K_2+6T_1+3T_2+3T_3+2N$
5							A_5	$2K_2+K_3+3N$		$[A_5]'$	$2K_2+K_3+2T_1+T_2+4N$	$2T_2+T_3+2N$	A_5	$2K_2+K_3+6T_2+3T_3+11N$
										$[A_5]''$	K_2+3T_3+8N	K_2+3T_2		
6										$A_7,\ A_5+A_2$	$3K_1+K_2+3K_3$	$2K_1+2K_2$	$A_5+A_2,\ [A_7]',\ [A_7]'',\ 2D_4$	$7K_1+5K_2+3K_3+3N$
										A_5+A_2	$K_1+K_3+T_2+T_3+T_4$	$K_2+T_1+T_3$	A_5+A_2	$K_1+2K_2+K_3+2T_1+T_2+3T_3+$ $+T_4+3N$
9							E_6	K_5	K_3	E_6	$2K_3+K_5+N$	$2K_3+2N$	E_6	$6K_3+K_5+8N$
21										E_7	K_6	K_4	E_7	$2K_4+K_6+3N$

Подалгебры типа B_2:

Индекс	в F_4: G'	$\chi_{\widetilde{G}}$	$\omega_{\widetilde{G}}$	в E_6: G'	$\chi_{\widetilde{G}}$	$\omega_{\widetilde{G}}$	в E_7: G'	$\chi_{\widetilde{G}}$	$\omega_{\widetilde{G}}$	в E_8: G'	$\chi_{\widetilde{G}}$
1	B_2	$4K_1+2T_1+6N$	K_1+2T_1+5N	A_3	$5K_1+4T_1+11N$	K_1+2T_1+6N	A_3	$7K_1+8T_1+24N$	$2K_1+4T_1+14N$	A_3	$11K_1+16T_1+55N$
2				A_4	$2K_1+4K_2+K_3+4N$	$3K_1+K_2+2N$	$A_4,\ 2A_3$	$8K_1+6K_2+K_3+9N$	$6K_1+2K_2+6N$	$A_4,\ [2A_3]''$	$20K_1+10K_2+K_3+24N$
										$[2A_3]'$	$10K_1+5K_2+8T_1+2T_2+10N$
3				D_5	K_4+T_2+N	K_2+  $+N$	D_5	$2K_2+K_4+2T_2+4N$	$2K_2+T_2+4N$	D_5	$6K_2+K_4+4T_2+15N$
										A_3+A_4	$3K_1+5K_2+3K_3+3T_1+2T_2+$ $+T_3+3N$
4										$2A_4,\ D_3+D_5$	$4K_1+5K_2+2K_3+4K_4$
7										D_7	$2K_3+K_5+T_4+N$
12										E_8	K_6+K_7

Индекс	в F_4: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	в F_4: $\chi_{\widetilde{G}}$	в F_4: $\omega_{\widetilde{G}}$	в E_6: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	в E_6: $\chi_{\widetilde{G}}$	в E_6: $\omega_{\widetilde{G}}$	в E_7: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	в E_7: $\chi_{\widetilde{G}}$	в E_7: $\omega_{\widetilde{G}}$	в E_8: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	в E_8: $\chi_{\widetilde{G}}$
Подалгебры типа G_2:											
1	B_3	$5K_1+3N$	$3K_1+5N$	D_4	$8K_1+8N$	$3K_1+6N$	D_4	$14K_1+21N$	$6K_1+14N$	D_4	$26K_1+52N$
2							A_6	$5K_1+3K_3+3N$	$4K_1+2K_2$	A_6, $2D_4$	$13K_1+4K_2+3K_3+6N$
3				E_6	K_4	K_3	E_6	$2K_3+K_4+N$	$2K_3+2N$	E_6	$6K_3+K_4+8N$
										D_7	$2K_2+2K_4+K_5+N$
Подалгебры типа A_3:											
1	A_3	$3T_1+2T_2+3N$	T_1+2T_2+4N	A_3	$4T_1+4T_2+7N$	T_1+2T_2+5N	A_3	$6T_1+8T_2+18N$	$2T_1+4T_2+12N$	A_3	$10T_1+16T_2+45N$
2				A_5	K_2+2T_3+3N	K_1+2T_1	$[A_5]'$, $2A_3$	$2K_1+K_2+4T_1+2T_3+4N$	$2K_1+4T_1+2N$	A_5, $[2A_3]''$	$6K_1+K_2+12T_1+2T_3+11N$
							$[A_5]''$, $2A_3$	$6K_1+K_2+8N$	$6T_1+T_3$		
										$[2A_3]'$	$3K_1+6T_1+6T_2+T_3+2T_4+4N$
4										D_8	$K_1+K_3+2T_5$
Подалгебры типа B_3:											
1	B_3	$2K_1+T_1+N$	K_1+T_1+3N	D_4	$3K_1+2T_1+4N$	K_1+T_1+4N	D_4	$5K_1+4T_1+13N$	$2K_1+2T_1+10N$	D_4	$9K_1+8T_1+36N$
2							A_6, A_7	$2K_1+K_3+2K_4+N$	$2K_1+2K_2$	A_6, $2D_4$, $[A_7]''$	$6K_1+4K_2+K_3+2K_4+4N$
										$2D_4$	$5K_1+2K_2+K_4+T_1+T_2+3N$
										$[A_7]'$, $2D_4$	$3K_1+2K_2+K_4+2T_1+T_2+N$
Подалгебры типа C_3:											
1	C_3	$2T_2+3N$	K_1+2T_1	A_5	$K_1+2T_1+2T_2+3N$	K_1+2T_1+N	$[A_5]'$	$3K_1+6T_1+2T_2+6N$	$2K_1+4T_1+4N$	A_5	$7K_1+14T_1+2T_2+17N$
							$[A_5]''$	$7K_1+14N$	$7T_1+T_2$		
2										D_7	$2K_1+K_2+2T_3+N$
Подалгебры типа A_4:											
1				A_4	T_1+2T_2+4N	T_1+M_1+2N	A_4	$4T_1+3T_2+9N$	$3T_1+T_2+6N$	A_4	$10T_1+5T_2+24N$
Подалгебры типа B_4:											
1	B_4	T_1	K_1+T_1+N	D_5	K_1+2T_1+N	K_1+T_1+2N	D_5	$3K_1+4T_1+6N$	$2K_1+2T_1+6N$	D_5	$7K_1+8T_1+21N$
2										A_8, D_8	K_2+2K_3
										D_8	K_3+T_2
Подалгебры типа C_4:											
1				E_6	K_2	K_1	E_6, A_7	$2K_1+K_2$	$2K_1+2N$	E_6, $[A_7]''$	$6K_1+K_2+8N$
										$[A_7]'$	$3K_1+4T_1+2T_2+3N$

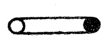
Индекс	в F_4: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	в F_4: $\chi_{\widetilde{G}}$	в F_4: $\omega_{\widetilde{G}}$	в E_6: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	в E_6: $\chi_{\widetilde{G}}$	в E_6: $\omega_{\widetilde{G}}$	в E_7: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	в E_7: $\chi_{\widetilde{G}}$	в E_7: $\omega_{\widetilde{G}}$	в E_8: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	в E_8: $\chi_{\widetilde{G}}$
Подалгебры типа D_4:											
1	D_4	T_1	$T_1 + 2N$	D_4	$2T_1 + 2N$	$T_1 + 3N$	D_4	$4T_1 + 9N$	$2T_1 + 8N$	D_4	$8T_1 + 28N$
2							A_7	K_2	$2K_1$	$[A_7]''$, $2D_4$	$4K_1 + K_2 + 3N$
										$2D_4$	$K_1 + T_1 + T_2$
										$[A_7]'$, $2D_4$	$2K_1 + T_3 + N$

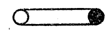
Подалгебры типов $A_5 - A_8$, $B_5 - B_7$, $D_5 - D_8$, F_4, $E_6 - E_7$

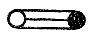
Тип	Индекс	в E_6: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	в E_6: $\chi_{\widetilde{G}}$	в E_6: $\omega_{\widetilde{G}}$	в E_7: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	в E_7: $\chi_{\widetilde{G}}$	в E_7: $\omega_{\widetilde{G}}$	в E_8: Минимальные объемлющие регулярные подалгебры G'	в E_8: $\chi_{\widetilde{G}}$
F_4	1	E_6	K_1	$K_1 + N$	E_6	$3K_1 + 3N$	$2K_1 + 4N$	E_6	$7K_1 + 14N$
A_5	1	A_5	$2T_2 + 3N$	M_1	$[A_5]'$	$2T_1 + 2T_2 + T_3 + 4N$	$2T_1 + T_3 + 2N$	A_5	$6T_1 + 2T_2 + 3T_3 + 11N$
					$[A_5]''$	$3T_3 + 8N$	$3T_1 + T_2$		
B_5	1				D_6	$T_1 + T_2 + 3N$	$2T_1 + M_1 + 2N$	D_6	$5T_1 + 2T_2 + 10N$
D_5	1	D_5	$T_2 + N$	$T_1 + M_1 + N$	D_5	$2T_1 + 2T_2 + 4N$	$2T_1 + T_2 + 4N$	D_5	$6T_1 + 4T_2 + 15N$
A_6	1				A_6	$T_1 + T_3 + N$	$T_1 + T_2$	A_6	$3T_1 + 2T_2 + T_3 + 4N$
B_6	1							D_7	$3T_1 + T_2 + 3N$
D_6	1				D_6	$T_2 + 3N$	$2T_1 + M_1$	D_6	$4T_1 + 2T_2 + 6N$
E_6	1				E_6	$T_1 + N$	$T_1 + 2N$	E_6	$3T_1 + 8N$
A_7	1				A_7	T_3	T_2	$[A_7]''$	$2T_2 + T_3 + 3N$
								$[A_7]'$	$T_1 + T_2 + T_4 + N$
B_7	1							D_8	$T_1 + T_2$
D_7	1							D_7	$2T_1 + T_2 + N$
E_7	1							E_7	$T_1 + 3N$
A_8	1							A_8	T_1
D_8	1							D_8	T_1

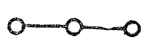
Сокращенные обозначения для некоторых линейных представлений

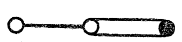
A_2		
K_1	(1 1)	8
K_2	(3 0) + (0 3)	20
K_3	(2 2)	27
K_4	(6 0) + (0 6)	56
K_5	(4 1) + (1 4)	70
K_6	(4 4)	125
T_1	(0 1) + (1 0)	6
T_2	(2 0) + (0 2)	12
T_3	(2 1) + (1 2)	30
T_4	(3 1) + (1 3)	48
M_1	(2 0) + 7 (0 1)	27
M_2	2 (2 0) + (1 2)	27

B_2		
K_1	(1 0)	5
K_2	(0 2)	10
K_3	(2 0)	14
K_4	(1 2)	35
K_5	(2 2)	81
K_6	(0 6)	84
K_7	(3 2)	154
T_1	2 (0 1)	8
T_2	2 (1 1)	32

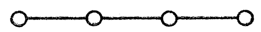
B_2		
T_3	2 (0 3)	40
T_4	2 (1 3)	128
M_1	(1 1)	16

G_2		
K_1	(0 1)	7
K_2	(1 0)	14
K_3	(0 2)	27
K_4	(1 1)	64
K_5	(0 3)	77

A_3		
K_1	(1 0 1)	15
K_2	(0 2 0)	20
K_3	(2 1 0) + (0 1 2)	90
T_1	(0 1 0)	6
T_2	(1 0 0) + (0 0 1)	8
T_3	(2 0 0) + (0 0 2)	20
T_4	(1 1 0) + (0 1 1)	40
T_5	(1 1 1)	64

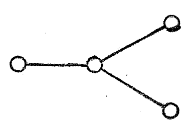
B_3		
K_1	(1 0 0)	7
K_2	(0 1 0)	21
K_3	(2 0 0)	27
K_4	(0 0 2)	35
T_1	2 (0 0 1)	16
T_2	2 (1 0 1)	96

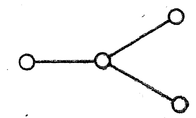
C_3		
K_1	(0 1 0)	14
K_2	(1 0 1)	70
T_1	(1 0 0)	6
T_2	(0 0 1)	14
T_3	(1 1 0)	64

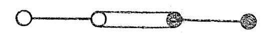
A_4		
T_1	(1 0 0 0) + (0 0 0 1)	10
T_2	(0 1 0 0) + (0 0 1 0)	20
M_1	(1 0 0 0) + (0 0 1 0)	15

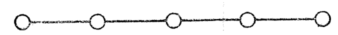
B_4		
K_1	(1 0 0 0)	9
K_2	(2 0 0 0)	44
K_3	(0 0 1 0)	84
T_1	(0 0 0 1)	16
T_2	(1 0 0 1)	128

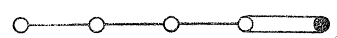
C_4		
K_1	(0 1 0 0)	27
K_2	(0 0 0 1)	42
T_1	(1 0 0 0)	8
T_2	(0 0 1 0)	48

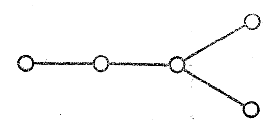
D_4		
K_1	$\begin{pmatrix}0&1&0\\&&0\end{pmatrix}$	28
K_2	$\begin{pmatrix}2&0&0\\&&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&2\\&&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\&&2\end{pmatrix}$	105
T_1	$\begin{pmatrix}1&0&0\\&&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\&&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\&&1\end{pmatrix}$	24

D_4		
T_2	$\begin{pmatrix}0&0&1\\&&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\&&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\&&1\end{pmatrix}$	168
T_3	$\begin{pmatrix}2&0&0\\&&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\&&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\&&1\end{pmatrix}$	163

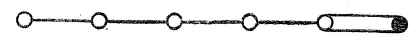
F_4		
K_1	(0 0 0 1)	26

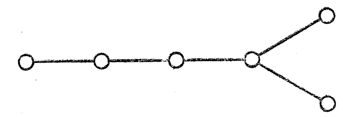
A_5		
T_1	(1 0 0 0 0) + (0 0 0 0 1)	12
T_2	(0 0 1 0 0)	20
T_3	(0 1 0 0 0) + (0 0 0 1 0)	30
M_1	2 (1 0 0 0 0) + (0 0 0 1 0)	27

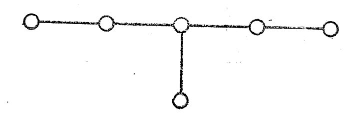
B_5		
T_1	(1 0 0 0 0)	11
T_2	2 (0 0 0 0 1)	64
M_1	(0 0 0 0 1)	32

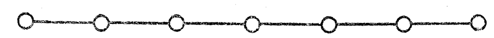
D_5		
T_1	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\&&&0\end{pmatrix}$	10
T_2	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\&&&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\&&&1\end{pmatrix}$	32
M_1	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\&&&0\end{pmatrix}$	16

A_6		
T_1	(1 0 0 0 0 0) + (0 0 0 0 0 1)	14
T_2	(0 1 0 0 0 0) + (0 0 0 0 1 0)	42
T_3	(0 0 1 0 0 0) + (0 0 0 1 0 0)	70

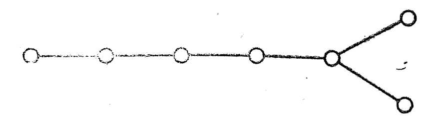
B_6		
T_1	(1 0 0 0 0 0)	13
T_2	2 (0 0 0 0 0 1)	128

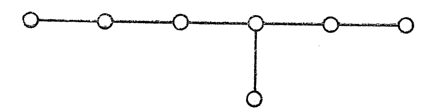
D_6		
T_1	$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\&&&&0\end{pmatrix}$	12
T_2	$\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\&&&&1\end{pmatrix}$	64
M_1	$\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}$	32

E_6		
T_1	$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\&&0&&\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\&&0&&\end{pmatrix}$	54

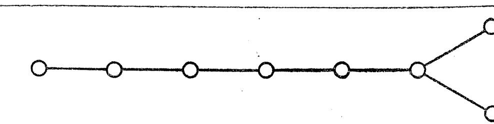
A_7		
T_1	(1 0 0 0 0 0 0) + (0 0 0 0 0 0 1)	16
T_2	(0 1 0 0 0 0 0) + (0 0 0 0 0 1 0)	56
T_3	(0 0 0 1 0 0 0)	70
T_4	(0 0 1 0 0 0 0) + (0 0 0 0 1 0 0)	112

B_7		
T_1	(1 0 0 0 0 0 0)	15
T_2	(0 0 0 0 0 0 1)	128

D_7		
T_1	$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\&&&&&0\end{pmatrix}$	14
T_2	$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\&&&&&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\&&&&&1\end{pmatrix}$	128

E_7		
T_4	$2\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\&&&0&&\end{pmatrix}$	112

A_8		
T_1	(0 0 1 0 0 0 0 0) + (0 0 0 0 0 1 0 0)	168

D_8		
T_1	$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\&&&&&&0\end{pmatrix}$	128

Теорема 11.2. *Классификация простых подалгебр ранга, большего 1, в особых простых алгебрах Ли G дается таблицей 25. Для каждой подалгебры $\widetilde{G}$ указаны представления $\chi_{\widetilde{G}}$ и $\omega_{\widetilde{G}}$, определяющие $\widetilde{G}$ с точностью до линейной сопряженности*. Кроме того, дается полный перечень минимальных регулярных подалгебр G', объемлющих $\widetilde{G}$, и указывается значение индекса $\widetilde{G}$ в G.*

Замечания. 1) Из таблицы 25 видно, что если для двух подалгебр $\widetilde{G}_1$ и $\widetilde{G}_2$ имеет место соотношение $\omega_{\widetilde{G}_1} \sim \omega_{\widetilde{G}_2}$, то $\chi_{\widetilde{G}_1} \sim \chi_{\widetilde{G}_2}$. Поэтому можно утверждать, что в произвольной особой алгебре G представление $\omega_{\widetilde{G}}$ определяет подалгебру $\widetilde{G}$ однозначно с точностью до L-сопряженности. (Ср. n°4 главы I.)

2) Простые подалгебры особых алгебр мы будем в дальнейшем обозначать, указывая их тип и индекс, например A_2^4, D_4^1 и т. п. В тех случаях, когда существуют линейно несопряженные подалгебры одного типа и с одинаковыми индексами, мы будем их различать, ставя один, два и т. д. штриха по порядку следования в таблице 25. Например, в алгебре E_8 мы имеем подалгебры $B_3^{2'}$, $B_3^{2''}$ и $B_3^{2'''}$.

Обозначения, принятые в таблице 25. Для линейных представлений использованы сокращенные обозначения, которые расшифрованы в таблице 26. При этом буквы K_i и T_i используются для ортогональных представлений, в том числе K_i — для представлений, сравнимых с нулевым представлением, T_i — для представлений, не сравнимых с нулевым представлением; буквы M_i используются для представлений, не являющихся ортогональными. Нулевое неприводимое представление обозначается буквой N. Эти обозначения дают возможность легко выделить целочисленные подалгебры, как такие, для которых в разложение $\chi_{\widetilde{G}}$ входят только буквы K_i и N.

Особые алгебры можно включить одна в другую в следующем порядке:

$$G_2 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8. \tag{11.1}$$

В силу этих включений (которые определены однозначно с точностью до сопряженности), набор подалгебр алгебры G_2 естественно отображается в набор подалгебр алгебры F_4 и т. д. Эти отображения нашли свое отражение в таблице 25, где соответствующие подалгебры помещены по одной горизонтали. Поскольку индексы G_2 в F_4, F_4 в E_6, E_6 в E_7 и E_7 в E_8 равны 1, соответствующие друг другу подалгебры этих алгебр имеют равные индексы.

n°36. Теорема 11.2 выводится из теоремы 11.1 точно так же, как теорема 10.1 из теоремы 9.3; рассматриваются в заданной особой алгебре все ее регулярные полупростые подалгебры и берутся в каждой из них все ее простые S-подалгебры ранга, большего 1. Дополнительного доказательства требует только утверждение, что каждой полученной паре значений $\chi_{\widetilde{G}}$ и $\omega_{\widetilde{G}}$ соответствует один класс линейно сопряженных подалгебр. Для случаев $G = G_2$, F_4, E_6 и E_7 это утверждение следует из общей теоремы 1.3. Случай $G = E_8$ нуждается в специальном исследовании.

Сомнения возникают лишь тогда, когда для двух несопряженных регулярных подалгебр G_1' и G_2' S-подалгебра $\widetilde{G}_1$ алгебры G_1' и S-подалгебра $\widetilde{G}_2$ алгебры G_2' удовлетворяют соотношению

$$\chi_{\widetilde{G}_1} = \chi_{\widetilde{G}_2}. \tag{11.2}$$

* В соответствии со сноской * на стр. 405 для подалгебр $\widetilde{G}$ алгебры E_8 указаны только представления $\chi_{\widetilde{G}}$.

Являются ли эти подалгебры L-сопряженными? На этот вопрос можно сразу ответить утвердительно, если подалгебры G_1' и G_2' содержатся в E_7 и $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ линейно сопряжены в E_7 (см. предложение A') n°6, § 1). Сомнительными остаются только случаи A_2^4, $A_2^{6'}$, B_2^4, G_2^2, $B_3^{2'}$, $B_3^{2'''}$, $B_4^{2'}$, $D_4^{2'}$, $D_4^{2'''}$. Для каждого из перечисленных случаев при помощи таблицы 3 по системе весов представления $\omega_{\tilde{G}} = \chi_{\tilde{G}} + \varphi_{\tilde{G}}$ вычисляем, как это описано в конце n°4, простые корни подалгебры $\tilde{G}$. При этом a priori должны получиться три варианта. Однако надлежит отбросить, как невозможные, те из них, для которых хотя бы одно из произведений (α, β') $\left(\alpha\right.$ — простой корень G, β — простой корень $\tilde{G}$, $\left.\beta' = \frac{2}{(\beta, \beta)}\beta\right)$ выражается нецелым числом. Во всех интересующих нас случаях после отбрасывания останутся варианты, которые совпадают между собой. Этим утверждение об L-сопряженности подалгебр доказано.

n°37. Вывод таблицы 25 был основан на теореме 11.1. В свою очередь, при доказательстве теоремы 11.1 будет использована таблица 25 (с аналогичным положением мы уже имели дело в предыдущей главе). Следующая цепочка рассуждений позволит нам избежать при этом порочного круга.

Таблица 25 устанавливает соответствие между некоторыми парами линейных представлений $(\chi_{\tilde{G}}, \omega_{\tilde{G}})$* и регулярными подалгебрами G'. В силу самого способа построения таблицы (вне всякой зависимости от теоремы 11.1), справедливо следующее утверждение:

А) *Если какой-нибудь паре линейных представлений в таблице* 25 *отнесена регулярная подалгебра* G', *то существует подалгебра* $\tilde{G}$, *содержащаяся в* G', *для которой представления* $\chi_{\tilde{G}}$, $\omega_{\tilde{G}}$ *эквивалентны заданной паре представлений.*

Опираясь только на это утверждение, мы докажем, что:

Б) *Всякая* S-*подалгебра особой простой алгебры Ли, имеющая ранг, больший* 1, *совпадает с одной из подалгебр, описанных в теореме* 11.1.

Как легко видеть, из Б) вытекает

В) *Пусть* $\tilde{G}$ — *некоторая подалгебра. Среди регулярных подалгебр* G', *отнесенных в таблице* 25 *представлениям* $\chi_{\tilde{G}}$, $\omega_{\tilde{G}}$, *содержатся все минимальные объемлющие* $\tilde{G}$ *регулярные подалгебры.*

Опираясь на предложение В) и просматривая таблицу 25, непосредственно выводим:

Г) *Каждая из подалгебр, описанных в теореме* 11.1, *является* S-*подалгеброй.*

Этим доказательство теоремы 11.1 завершается.

Итак, теорема 11.1 будет доказана, если мы докажем утверждение Б), используя таблицу 25 только в форме предложения А). Это будет сделано в следующем параграфе.

---

* См. сноску на стр. 429.

§ 12. Доказательство теоремы 11.1

n°38. Пусть H — идемпотент простой алгебры Ли G. Набор принадлежащих к H определяющих векторов для всевозможных трехчленных подалгебр алгебры G условимся обозначать через $\Omega(G, H)$.

Пусть $f \in \Omega(G, H)$. Отнесем f к системе $\Omega'(G, H)$, если соответствующая трехчленная подалгебра является целочисленной. Отнесем f к $\Omega''(G, H)$, если $\frac{f}{2} \in \Omega(G, H)$. Из теоремы 8.3 вытекает, что $\Omega''(G, H) \subseteq \Omega'(G, H)$.

Выпишем скалярные квадраты всех векторов из $\Omega(G, H)$ и устраним возможные повторения. Мы получим некоторый набор натуральных чисел. Обозначим его через $P(G)$ (очевидно, он не зависит от выбора H). Аналогичным образом по системам векторов $\Omega'(G, H)$ и $\Omega''(G, H)$ построим наборы натуральных чисел $P'(G)$ и $P''(G)$.

Пусть теперь ψ — представление простой алгебры $\tilde{G}$ в простую алгебру G. Выберем идемпотенты $\tilde{H}$ в $\tilde{G}$ и H в G так, чтобы $\psi(\tilde{H}) \subseteq H$. Тогда $\psi(\Omega(\tilde{G}, \tilde{H})) \subseteq \Omega(G, H)$, $\psi(\Omega''(\tilde{G}, \tilde{H})) \subseteq \Omega''(G, H)$ и, если ψ — целочисленное представление, то, согласно предложению Б, n°13, § 3, $\psi(\Omega'(\tilde{G}, \tilde{H})) \subseteq \Omega'(G, H)$. Из этих включений и определения индекса j_ψ представления ψ (см. n°7, § 2) вытекает, что набор чисел $P(\tilde{G})$ при умножении на j_ψ переходит в подмножество множества $P(G)$ и, точно так же $P'(\tilde{G})$ и $P''(\tilde{G})$ переходят, соответственно, в подмножества $P'(G)$ и $P''(G)$.

Пусть теперь заданы две простые алгебры Ли G и $\tilde{G}$ и требуется отыскать всевозможные значения индекса для целочисленных представлений $\tilde{G}$ в G. Мы выписываем системы чисел $P(G) \supseteq P'(G) \supseteq P''(G)$ и $P(\tilde{G}) \supseteq P'(\tilde{G}) \supseteq P''(\tilde{G})$ и относим натуральное число j к множеству $J(\tilde{G}, G)$, если при умножении на j $P(\tilde{G})$ переходит в часть $P(G)$, причем $P'(\tilde{G})$ переходит в часть $P'(G)$, а $P''(\tilde{G})$ — в часть $P''(G)$. В силу сказанного выше, множество $J(\tilde{G}, G)$ содержит все значения индекса для целочисленных представлений $\tilde{G}$ в G или, что то же, все значения индекса для целочисленных подалгебр алгебры G, изоморфных $\tilde{G}$*. Сейчас нас интересуют не все целочисленные подалгебры, а только S-подалгебры. Используя теорему 6.2, можно несколько сократить $J(\tilde{G}, G)$ так, что и этот сокращенный набор будет заведомо содержать индексы всех S-подалгебр алгебры G, изоморфных $\tilde{G}$. Именно, если $\tilde{G}$ принадлежит одному из типов A_n, E_6, E_7, E_8, то можно выкинуть из $J(\tilde{G}, G)$ значение 1. Получившийся после такой поправки набор чисел мы будем обозначать через $\tilde{J}(\tilde{G}, G)$.

Применим эти общие рассуждения к интересующему нас случаю, когда G — одна из особых простых алгебр, $\tilde{G}$ — простая алгебра, ранг которой больше 1 и меньше ранга G. В таблице 27 выписаны системы $P(\tilde{G})$ для всех простых алгебр $\tilde{G}$, ранг которых заключен между 1

---

* Если отбросить $P'(G)$ и $P'(\tilde{G})$ и рассматривать только системы $P(G) \supseteq P''(G)$ и $P(\tilde{G}) \supseteq P''(\tilde{G})$, то тем же путем мы получим набор натуральных чисел, содержащий значения индекса для всех (не только целочисленных) представлений $\tilde{G}$ в G.

Таблица 27

A_2	1, $\underline{\underline{4}}$	B_4	1, $\underline{2}$, 3, $\underline{\underline{4}}$, $\underline{6}$, $\underline{10}$,	C_6	. . . , $\underline{286}$
A_3	1, $\underline{2}$, $\underline{\underline{4}}$, $\underline{10}$		11, $\underline{12}$, $\underline{28}$, $\underline{60}$	C_7	. . . , $\underline{455}$
A_4	1, 2, $\underline{\underline{4}}$, 5, 10, $\underline{20}$	B_5	. . . , $\underline{110}$	D_4	1, $\underline{2}$, 3, $\underline{\underline{4}}$, $\underline{10}$,
A_5	1, 2, $\underline{3}$, $\underline{\underline{4}}$, 5, $\underline{\underline{8}}$,	B_6	. . . , $\underline{182}$		$\underline{\underline{12}}$, $\underline{28}$
	10, $\underline{11}$, $\underline{\underline{20}}$, $\underline{35}$	B_7	. . . , $\underline{182}$, $\underline{280}$	D_5	1, $\underline{2}$, 3, $\underline{\underline{4}}$, $\underline{6}$,
A_6	1, 2, 3, $\underline{\underline{4}}$, 5, 6,	C_3	1, 2, $\underline{3}$ $\underline{\underline{8}}$, 10,		$\underline{10}$, 11, $\underline{\underline{12}}$, $\underline{20}$, $\underline{28}$,
	$\underline{\underline{8}}$, 10, 11, 14, $\underline{\underline{20}}$, 21,		$\underline{11}$, $\underline{35}$		$\underline{30}$, $\underline{60}$
	35, $\underline{\underline{56}}$	C_4	1, 2, 3, $\underline{4}$, $\underline{\underline{8}}$,	D_6	. . . , $\underline{110}$
A_7	…, $\underline{36}$, $\underline{\underline{56}}$, $\underline{84}$		9, 10, 11, $\underline{12}$, $\underline{20}$,	D_7	. . . , $\underline{182}$
B_2	1, $\underline{2}$, $\underline{10}$		35, $\underline{36}$, $\underline{84}$,	G_2	1, 3, $\underline{\underline{4}}$, $\underline{28}$
B_3	1, $\underline{2}$ 3, $\underline{\underline{4}}$, $\underline{10}$, $\underline{28}$	C_5	. . . , $\underline{165}$	F_4	. . . , $\underline{156}$
				E_6	. . . , $\underline{156}$
				E_7	. . . , $\underline{399}$

и 8 (для некоторых алгебр выписаны только один или два наибольших элемента системы $P(\widetilde{G})$, а остальные заменены многоточием). В таблице 28 выписаны системы $P(F_4)$, $P(E_6)$, $P(E_7)$ и $P(E_8)$. В обеих таблицах подчеркнуты элементы, принадлежащие системам P', в том числе дважды подчеркнуты элементы из P''.

Таблица 28

F_4	1, 2, 3, $\underline{\underline{4}}$, 6, $\underline{\underline{8}}$, 9, 10, 11, $\underline{\underline{12}}$, $\underline{28}$, 35, $\underline{\underline{36}}$,
	$\underline{60}$, $\underline{156}$
E_6	1, 2, 3, $\underline{\underline{4}}$, 5, 6, 8, 9, 10, 11, $\underline{\underline{12}}$, $\underline{\underline{20}}$, 21,
	$\underline{28}$, 30, 35, $\underline{\underline{36}}$, $\underline{60}$, $\underline{\underline{84}}$, $\underline{156}$
E_7	1, 2, $\underline{3}$, $\underline{\underline{4}}$, 5, 6, $\underline{7}$, $\underline{\underline{8}}$, 9, 10, $\underline{11}$, $\underline{\underline{12}}$, 13,
	14, $\underline{15}$, $\underline{\underline{20}}$, 21, $\underline{\underline{24}}$, $\underline{28}$, 29, 30, $\underline{31}$, $\underline{35}$, $\underline{\underline{36}}$, 38, $\underline{39}$, $\underline{\underline{56}}$,
	$\underline{60}$, 61, 62, $\underline{63}$, $\underline{\underline{84}}$, 110, $\underline{111}$, $\underline{156}$, $\underline{159}$, $\underline{231}$, $\underline{399}$
E_8	1, 2, 3, $\underline{\underline{4}}$, 5, 6, 7, $\underline{\underline{8}}$, 9, 10, 11, $\underline{\underline{12}}$, 13,
	14, 15, $\underline{\underline{16}}$, $\underline{\underline{20}}$, 21, 22, $\underline{\underline{24}}$, 25, $\underline{28}$, 29, 30, 31, $\underline{32}$, 34,
	35, $\underline{\underline{36}}$, 37, 38, 39, $\underline{\underline{40}}$, $\underline{\underline{56}}$, 57, $\underline{60}$, 61, 62, 63, $\underline{64}$,
	70, $\underline{\underline{84}}$, 85, $\underline{\underline{88}}$, 110, 111, $\underline{112}$, $\underline{\underline{120}}$, $\underline{156}$, 157, 159, 160, 166,
	182, $\underline{184}$, 231, $\underline{232}$, $\underline{\underline{280}}$, 399, $\underline{400}$, $\underline{520}$, $\underline{760}$, $\underline{1240}$

Полученные из сопоставления таблиц 27 и 28 наборы $\tilde{J}(\tilde{G}, G)$ указаны в таблице 29 (пропущенным в этой таблице значениям $A_5 - A_7$, $B_5 - B_7$, $C_5 - C_7$, $D_6 - D_7$ и $E_6 - E_7$ алгебры $\tilde{G}$ соответствует пустое множество $\tilde{J}(\tilde{G}, G)$ при всех интересующих нас значениях G).

Таблица 29

Наборы $\tilde{J}(\tilde{G}, G)$

$\tilde{G}$ \ G	F_4	E_6	E_7	E_8
A_2	2, 3, 9	2, 3, 5, 9, 21	2, 3, 5, 6, 9, 14, 21	2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 14, 21, 22, 30, 70
A_3	—	2	2, 6	2, 4, 6
A_4	—	—	—	2, 6
B_2	6	2, 6	2, 6	2, 4, 6, 12, 28
B_3	—	—	2	2, 4
B_4	—	—	—	2
C_3	—	—	1	—
C_4	—	1	1	1
D_4	—	—	2	2
D_5	—	—	—	2
G_2	1	1, 3	1, 2, 3	1, 2, 3, 4, 10
F_4	—	1	1	1

Пусть G обозначает произвольную из особых алгебр F_4, E_6, E_7, E_8, пусть $\tilde{G}$ — какая-нибудь простая S-подалгебра алгебры G и G^0 — главная трехчленная подалгебра алгебры $\tilde{G}$. Подалгебра G^0 должна совпадать с одной из подалгебр, перечисленных в таблицах 17—20, с какой именно — легко определить по индексу $\tilde{G}$ в G и индексу G^0

Таблица 30

Тип подалгебры $\tilde{G}$	Индекс в $\tilde{G}$ главной трехчленной подалгебры G^0	Индексы G^0 относительно G			
		F_4	E_6	E_7	E_8
A_2	4	8, 12, 36	8, 12, 20, 36, 84	8, 12, 20, 24, 36, 56, 84	8, 12, 16, 20, 24, 36, 40, 56, 84, 88, 120, 280
A_3	10	—	20	20, 60	20, 40, 60
A_4	20	—	—	—	40, 120
B_2	10	60	20, 60	20, 60	20, 40, 60, 120, 280
B_3	28	—	—	56	56, 112
B_4	60	—	—	—	120
C_3	35	—	—	35	—
C_4	84	—	84	84	84
D_4	28	—	—	56	56
D_5	60	—	—	—	120
G_2	28	28	28, 84	28, 56, 84	28, 56, 84, 112
F_4	156	—	156	156	156

в $\widetilde{G}$: их произведение равно индексу G^0 в G. Этим путем мы находим, что подалгебрам $\widetilde{G}$ со значениями индекса, указанными в таблице 29, должны отвечать трехчленные подалгебры, приведенные в таблице 30.

n° 39. Для полного решения стоящей перед нами задачи остается исследовать, для каких из трехчленных подалгебр G^0, перечисленных в таблице 30, в действительности существует объемлющая подалгебра $\widetilde{G}$ указанного типа, по отношению к которой G^0 является главной трехчленной подалгеброй. Мы попытаемся вычислить характеристическое представление $\chi_{\widetilde{G}}$ подалгебры $\widetilde{G}$ (относительно G).

Пусть $G^0 \subseteq \widetilde{G} \subseteq G$ — три полупростые алгебры Ли, $\varphi_{\widetilde{G}}$ и φ_{G^0} — присоединенные представления $\widetilde{G}$ и G^0, $\chi_{\widetilde{G}}$ и χ_{G^0} — характеристические представления $\widetilde{G}$ и G^0 (по отношению к G). Имеет место соотношение

$$\chi^0_{\widetilde{G}} + \varphi^0_{\widetilde{G}} \sim \chi_{G^0} + \varphi_{G^0}, \tag{12.1}$$

где $\chi^0_{\widetilde{G}}$ и $\varphi^0_{\widetilde{G}}$ — представления подалгебры G^0, индуцированные, соответственно, $\chi_{\widetilde{G}}$ и $\varphi_{\widetilde{G}}$. В интересующем нас случае представление χ_G может быть взято из таблицы 21, $\varphi_{G^0} = X_2$ и, наконец, $\varphi^0_{\widetilde{G}}$ вычисляется без всякого труда (см. строчки, отмеченные звездочками в таблице 31). Из соотношения (12.1) определяется $\chi^0_{\widetilde{G}}$.

Итак, нам нужно, зная $\chi^0_{\widetilde{G}}$, восстановить представление $\chi_{\widetilde{G}}$. Представление $\chi_{\widetilde{G}}$ ортогонально. Пусть

$$\chi_{\widetilde{G}} = \chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_s \tag{12.2}$$

— его разложение на ортогонально неприводимые компоненты. Поскольку $\widetilde{G}$ — целочисленная подалгебра, каждое из представлений $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ сравнимо с нулевым представлением. В силу теоремы 7.4, χ_i отличны от нулевого представления. Далее, размерность χ_i меньше размерности алгебры G и во всех интересующих нас случаях не превосходит 248. Наконец, высота* $T(\chi_i)$ не превосходит высоты $T(\chi_{G^0})$, и, следовательно, для всех случаев, перечисленных в таблице 30,

$$T(\chi_i) \leqslant k(\widetilde{G}), \tag{12.3}$$

где $k(\widetilde{G})$ задается таблицей:

$\widetilde{G}$	A_2	A_3	A_4	B_2	B_3	B_4	C_3	C_4	D_4	D_5	F_4	G_2
$k(\widetilde{G})$	28	14	18	28	18	18	10	16	12	18	22	18

.

Для каждой из вошедших в таблицу 30 подалгебр $\widetilde{G}$ в таблице 31 дается полный перечень всех ортогонально неприводимых ненулевых представлений Φ, сравнимых с нулевым представлением и удовлетворяющих условиям:

$$T(\Phi) \leqslant k(\widetilde{G}), \quad (а) \qquad N(\Phi) \leqslant 248. \quad (б)$$

* Определение высоты представления и формулы для ее вычисления см. в [4] или в [9].

(Наиболее удобный способ отбора таких представлений состоит в том, что сначала выписываются все ненулевые ортогонально неприводимые представления, сравнимые с нулевым представлением и удовлетворяющие условию (а), что требует решения в целых неотрицательных числах системы простых линейных неравенств и уравнений, затем для всех выписанных представлений вычисляются размерности и вычеркиваются те представления, для которых размерность окажется больше 248.)

Таблица 31

Разложение некоторых линейных представлений простых алгебр относительно главных трехчленных подалгебр

A_2

Φ ○—○			$N(\Phi)$	Φ^0
12	0	+	182	$2X_{24}+2X_{20}+2X_{16}+2X_{12}+2X_8+2X_4+2X_0$
0	12			
5	5		216	$X_{20}+X_{18}+2X_{16}+2X_{14}+3X_{12}+3X_{10}+2X_8+$ $+2X_6+X_4+X_2$
9	0	+	110	$2X_{18}+2X_{14}+2X_{10}+2X_6+2X_2$
0	9			
7	1	+	160	$2X_{16}+2X_{14}+2X_{12}+2X_{10}+2X_8+2X_6+2X_4+2X_2$
1	7			
4	4		125	$X_{16}+X_{14}+2X_{12}+2X_{10}+3X_8+X_6+2X_4+X_0$
5	2	+	162	$2X_{14}+2X_{12}+4X_{10}+2X_8+4X_6+2X_4+2X_2$
2	5			
6	0	+	56	$2X_{12}+2X_8+2X_4+2X_0$
0	6			
3	3		64	$X_{12}+X_{10}+2X_8+2X_6+X_4+X_2$
4	1	+	70	$2X_{10}+2X_8+2X_6+2X_4+2X_2$
1	4			
2	2		27	$X_8+X_6+2X_4+X_0$
0	3	+	20	$2X_6+2X_2$
3	0			
* 1	1		8	X_4+X_2

A_3

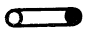
Φ ○—○—○				$N(\Phi)$	Φ^0
1	2	1		175	$X_{14}+2X_{12}+3X_{10}+4X_8+5X_6+4X_4+3X_2+X_0$
4	0	0	+	70	$2X_{12}+2X_8+2X_6+2X_4+2X_0$
0	0	4			
2	0	2		84	$X_{12}+X_{10}+3X_8+2X_6+3X_4+X_2+X_0$
2	1	0	+	90	$2X_{10}+2X_8+4X_6+2X_4+4X_2$
0	1	2			
0	2	0		20	$X_8+2X_4+X_0$
* 1	0	1		15	$X_6+X_4+X_2$

Таблица 31 (продолжение)

A_4

Φ 				$N(\Phi)$	Φ^0
2	0	0	2	200	$X_{16}+X_{14}+3X_{12}+3X_{10}+5X_8+3X_6+5X_4+$ $+X_2+2X_0$
0	1	1	0	75	$X_{12}+X_{10}+2X_8+2X_6+3X_4+X_2+X_0$
* 1	0	0	1	24	$X_8+X_6+X_4+X_2$

B_2

	Φ 		$N(\Phi)$	Φ^0
	7	0	204	$X_{28}+X_{24}+X_{22}+X_{20}+X_{18}+2X_{16}+X_{14}+$ $+X_{12}+X_{10}+X_8+X_4$
	6	0	140	$X_{24}+X_{20}+X_{18}+X_{16}+X_{14}+2X_{12}+X_8+X_6$
	0	8	165	$X_{24}+X_{20}+X_{18}+X_{16}+X_{14}+2X_{12}+X_{10}+$ $+2X_8+X_6+X_4+X_0$
	5	0	91	$X_{20}+X_{16}+X_{14}+X_{12}+X_{10}+X_8+X_4$
	2	4	220	$X_{20}+X_{18}+2X_{16}+2X_{14}+3X_{12}+2X_{10}+3X_8+$ $+2X_6+2X_4+X_2+X_0$
	0	6	84	$X_{18}+X_{14}+X_{12}+X_{10}+X_8+2X_6+X_2$
	3	2	154	$X_{18}+X_{16}+2X_{14}+2X_{12}+2X_{10}+2X_8+2X_6+$ $+X_4+X_2$
	4	0	55	$X_{16}+X_{12}+X_{10}+X_8+X_4$
	1	4	105	$X_{16}+X_{14}+X_{12}+2X_{10}+2X_8+X_6+2X_4+X_2$
	2	2	81	$X_{14}+X_{12}+2X_{10}+X_8+2X_6+X_4+X_2$
	3	0	30	$X_{12}+X_8+X_6+X_0$
	0	4	35	$X_{12}+X_8+X_6+X_4+X_0$
	1	2	35	$X_{10}+X_8+X_6+X_4+X_2$
	2	0	14	X_8+X_4
*	0	2	10	X_6+X_2
	1	0	5	X_4

B_3

	Φ 			$N(\Phi)$	Φ^0
	3	0	0	77	$X_{18}+X_{14}+X_{12}+X_{10}+X_8+X_6+X_2$
	1	0	2	189	$X_{18}+X_{16}+2X_{14}+2X_{12}+3X_{10}+3X_8+3X_6+$ $+2X_4+2X_2$
	1	1	0	105	$X_{16}+X_{14}+X_{12}+2X_{10}+2X_8+X_6+2X_4+X_2$
	0	0	2	35	$X_{12}+X_8+X_6+X_4+X_0$
	2	0	0	27	$X_{12}+X_8+X_4$
*	0	1	0	21	$X_{10}+X_6+X_2$
	1	0	0	7	X_6

Таблица 31 (продолжение)

B_4

Φ 	$N(\Phi)$	Φ^0
0 0 1 0	84	$X_{18}+X_{14}+X_{12}+X_{10}+X_8+2X_6+X_2$
2 0 0 0	44	$X_{16}+X_{12}+X_8+X_4$
* 0 1 0 0	36	$X_{14}+X_{10}+X_6+X_2$
1 0 0 0	9	X_8

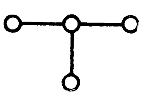
C_3

Φ 	$N(\Phi)$	Φ^0
* 2 0 0	21	$X_{10}+X_6+X_2$
0 1 0	14	X_8+X_4

C_4

Φ 	$N(\Phi)$	Φ^0
0 0 0 1	42	$X_{16}+X_{10}+X_8+X_4$
* 2 0 0 0	18	$X_{14}+X_{10}+X_6+X_2$
0 1 0 0	36	$X_{12}+X_8+X_4$

D_4

Φ 	$N(\Phi)$	Φ^0
2 0 0 0	35	$X_{12}+X_8+X_6+X_4+X_0$
* 0 1 0 0	28	$X_{10}+2X_6+X_2$

D_5

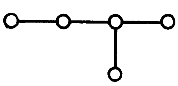
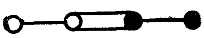
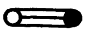
Φ 	$N(\Phi)$	Φ^0
2 0 0 0 0	54	$X_{16}+X_{12}+2X_8+X_4+X_0$
* 0 1 0 0 0	45	$X_{14}+X_{10}+X_8+X_6+X_2$

Таблица 31 (продолжение)

F_4

	Φ				$N(\Phi)$	Φ^0
						
*	1	0	0	0	52	$X_{22} + X_{14} + X_{10} + X_2$
	0	0	0	1	26	$X_{16} + X_8$

G_2

	Φ		$N(\Phi)$	Φ^0
				
	0	3	77	$X_{18} + X_{14} + X_{12} + X_{10} + X_8 + X_2$
	1	1	64	$X_{16} + X_{14} + X_{10} + X_8 + X_6 + X_4$
	0	2	27	$X_{12} + X_8 + X_4$
*	1	0	14	$X_{10} + X_2$
	0	1	7	X_6

Для каждого представления Φ в таблице 31 дается его разложение относительно главной трехчленной подалгебры G^0 алгебры $\widetilde{G}$, иными словами, указывается представление Φ^0, которое индуцируется Φ на подалгебре G^0. Каждое из таких представлений Φ^0 задается формой вида $a_0X_0 + a_2X_2 + a_4X_4 + \dots$, где a_0, a_2, $a_4, \dots$ — неотрицательные целые числа. Реконструкция приводимого представления

$$\chi_{\widetilde{G}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_s \tag{12.4}$$

по известному представлению

$$\chi^0_{\widetilde{G}} = \Phi^0_1 + \Phi^0_2 + \dots + \Phi^0_s \tag{12.5}$$

осуществляется посредством разложения заданной формы $c_0X_0 + c_2X_2 + c_4X_4 + \dots$, определяющей $\chi^0_{\widetilde{G}}$, на сумму форм, вошедших в таблицу 31. В большинстве случаев, подлежащих испытанию, такое разложение оказывается невозможным, а в тех немногих случаях, когда оно возможно, оно происходит вполне однозначным образом. Таблица 32 дает полный перечень этих случаев.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 12.1. *Если $\widetilde{G}$ — простая S-подалгебра одной из особых алгебр, имеющая ранг, больший единицы, то характеристическое представление $\widetilde{G}$ эквивалентно одному из представлений $\chi_{\widetilde{G}}$, перечисленных в таблице 32.*

Таблица 32

№	$\widetilde{G}$	G	индекс $\widetilde{G}$ в G	индекс G^0 в G	$\chi_{\widetilde{G}}$	$\omega_{\widetilde{G}}$
1	A_2	F_4	3	12		
2	A_2	E_6	9	36		
3	A_2	E_7	6	24		
4	A_2	E_7	21	84		
5	B_2	E_8	4	40		—
6	B_2	E_8	12	120		—
7	B_3	E_7	2	56		
8	B_4	E_8	2	120		—
9	C_4	E_6	1	84		
10	D_4	E_7	2	56		
11	D_4	E_7	2	56		
12	D_4	E_7	2	56		
13	G_2	E_6	3	84		
14	F_4	E_6	1	156		

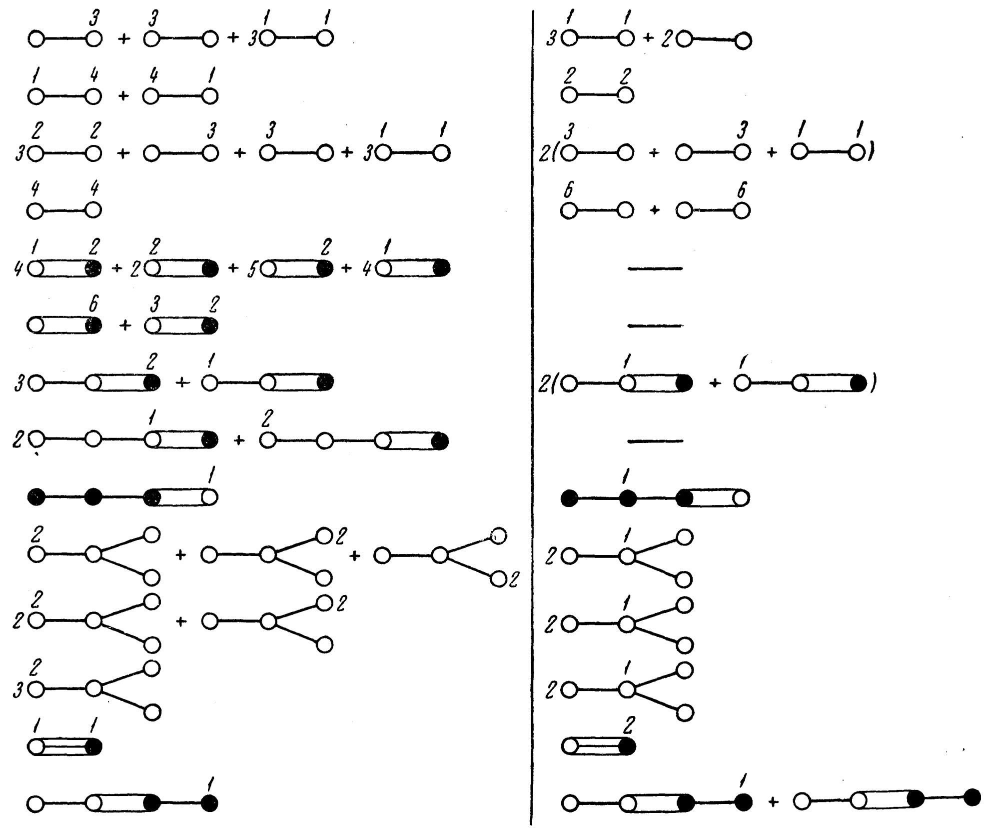


Таблица 33

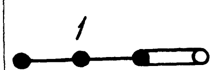
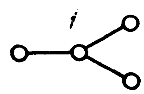
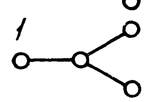
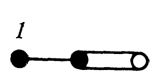
Разложение простейшего представления алгебр F_4, E_6, E_7 относительно некоторых трехчленных подалгебр G^0

F_4		E_6		E_7	
G^0	ω_{G^0}	G^0	ω_{G^0}	G^0	ω_{G^0}
12	$3X_4+3X_2+2X_0$	36	$X_8+X_6+2X_4+X_0$	24	$4X_6+2X_4+6X_2$
		84	$X_{12}+X_8+X_4$	56	$2X_{10}+4X_6+2X_2$
		156	$X_{16}+X_8+X_0$	84	$2X_{12}+2X_8+2X_4+2X_0$

Таблица 34

Разложение некоторых линейных представлений простых алгебр относительно главных трехчленных подалгебр

Φ		$N(\Phi)$	Φ^0
			
3	3	64	$X_{12}+X_{10}+2X_8+$ $+2X_6+X_4+X_2$
4	2	60	$X_{12}+X_{10}+2X_8+$ $+X_6+2X_4+X_2$
5	1	48	$X_{12}+X_{10}+X_8+$ $+X_6+X_4+X_2$
6	0	28	$X_{12}+X_8+X_4+X_0$
4	1	35	$X_{10}+X_8+X_6+$ $+X_4+X_2$
3	2	42	$X_{10}+X_8+2X_6+$ $+X_4+X_2$
5	0	21	$X_{10}+X_6+X_2$
2	2	27	$X_8+X_6+2X_4+X_0$
3	1	24	$X_8+X_6+X_4+X_2$
4	0	15	$X_8+X_4+X_0$
2	1	15	$X_6+X_4+X_2$
3	0	10	X_6+X_2
1	1	8	X_4+X_2
2	0	6	X_4+X_0
1	0	3	X_2

Φ			$N(\Phi)$	Φ^0
				
0	1	0	21	$X_{10}+X_6+X_2$
0	0	1	8	X_6+X_0
1	0	0	7	X_6
			36	$X_{12}+X_8+X_4$
			28	$X_{10}+2X_6+X_2$
			8	X_6+X_0
				
0	2		27	$X_{12}+X_8+X_4$
1	0		14	$X_{10}+X_2$
0	1		7	X_6
			26	$X_{16}+X_8$

В таблице 32 помимо характеристических представлений $\chi_{\widetilde{G}}$ для каждой подалгебры указано представление $\omega_{\widetilde{G}}$. Чтобы вычислить это представление, мы прежде всего вычисляем для соответствующей трехчленной подалгебры G^0 представление ω_{G^0} (см. таблицу 33). После этого задача сводится к следующей задаче:

Задана алгебра $\widetilde{G}$ и ее главная трехчленная подалгебра G^0; требуется восстановить неизвестное представление $\omega_{\widetilde{G}}$ по индуцированному им на G^0 представлению ω_{G^0}.

Эта задача совершенно аналогична уже решенной нами задаче о реконструкции $\chi_{\widetilde{G}}$ по $\chi^0_{\widetilde{G}}$ и решается тем же путем. Отличие состоит только в том, что представление $\omega_{\widetilde{G}}$ уже не должно непременно быть ортогональным, сравнимым с нулевым и отличным от нулевого (на основании таблицы 33 можно только утверждать, что это представление четного типа). Поэтому для неприводимых компонент представления $\omega_{\widetilde{G}}$ возможны значения, отсутствующие в таблице 31. Все возможные ненулевые значения собраны в таблице 34, и для каждого из них дается разложение по алгебре G^0. (В таблицу 34 вошли все ненулевые неприводимые представления четного типа, высота которых не превышает границы $k'(\widetilde{G})$, имеющей следующие значения:

$\widetilde{G}$	A_2	B_3	C_4	D_4	F_4	G_2
$k'(\widetilde{G})$	12	10	12	10	16	12

Эти значения границы усматриваются из таблицы 33.)

Чтобы прийти к представлениям $\omega_{\widetilde{G}}$, указанным в таблице 32, достаточно сопоставить таблицы 33 и 34 и дополнительно учесть, что:

1) если $G=F_4$, то $\omega_{\widetilde{G}}$ — ортогонально; 2) если $G=E_7$, то $\omega_{\widetilde{G}}$ — симплектично; 3) все неприводимые компоненты представления $\omega_{\widetilde{G}}$ сравнимы между собой (это следует из целочисленности $\widetilde{G}$).

n°40. Для того чтобы завершить доказательство теоремы 11.1, нам остается восстановить по каждой паре представлений $\chi_{\widetilde{G}}$, $\omega_{\widetilde{G}}$ из таблицы 32 соответствующую подалгебру $\widetilde{G}$. Мы докажем, что:

1) парам представлений 7, 11 и 12 не отвечают никакие подалгебры;

2) каждой паре представлений 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 14 отвечает по одному классу L-сопряженных подалгебр;

3) подалгебры, соответствующие каждой из пар 2 и 13, распадаются на 2 класса сопряженных подалгебр, переходящих один в другой при внешних автоморфизмах E_6; подалгебры, соответствующие любой из пар 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 14, сопряжены между собой.

Теорема 11.1 сразу следует из утверждений 1) — 3). Действительно, каждой из пар 1, 3, 5, 8 и 10 в таблице 25 отнесена регулярная подалгебра G', отличная от всей алгебры G, а именно,

№	1	3	5	8	10
G'	D_4, $A_2+\tilde{A}_2$	A_7, A_5+A_2	$2A_4, D_3+D_5$	A_8, D_8	A_7 .

Согласно предложению А) n°37, среди подалгебр, соответствующих любой паре 1, 3, 5, 8 или 10, хотя бы одна является R-подалгеброй, а, в силу утверждения 3), все эти подалгебры являются R-подалгебрами. Таким образом, S-подалгебрам могут отвечать только пары 2, 4, 6, 9, 13 и 14. Принимая во внимание утверждение 3), заключаем, что каждая S-подалгебра совпадает с одной из подалгебр, перечисленных в теореме 11.1. Тем самым утверждение Б) n°37 доказано. Как было выяснено в n°37, этого достаточно для доказательства теоремы 11.1.

Восполняя последний пробел в цепи наших рассуждений, докажем утверждения 1) — 3).

Доказательство утверждения 1). Пусть $\tilde{G}$ — подалгебра алгебры E_7. Согласно таблице 4, если M_1, $M_2, \ldots$ — веса представления $\omega_{\tilde{G}}$ и M'_1, $M'_2, \ldots$ — веса представления $\chi_{\tilde{G}}+\varphi_{\tilde{G}}$, занумерованные в порядке убывания относительно произвольного П-упорядочения, то $M'_3 - M'_4 = M_4 - M_5$. Между тем это соотношение не выполняется, если рассмотреть лексикографическое упорядочение: в случае 7 — по базису $\beta_1+\beta_2+\beta_3$, $\beta_3-\beta_2$, $\beta_2-\beta_1$; в случаях 11 и 12 — по базису $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4$, $\beta_1-\beta_2$, $\beta_2-\beta_3$, $\beta_3-\beta_4$ (β_1, $\beta_2 \ldots$ — простые корни алгебры $\tilde{G}$, занумерованные в порядке, указанном в таблице 1; в случаях 11 и 12 существенно, чтобы β_4 было отнесено тому из концевых корней, при котором на схеме представления $\chi_{\tilde{G}}$ отсутствует отметка 2.)

Доказательство утверждения 2). По системам весов представлений $\chi_{\tilde{G}}$ и $\omega_{\tilde{G}}$ при помощи алгоритма, описанного в n°4, вычисляем систему простых корней подалгебры $\tilde{G}$. Для всех случаев, когда $G=F_4$, E_6 или E_7 (случаи 1, 2, 3, 4, 9, 10, 13 и 14), в соответствии с теоремой 1.3 получаем единственное решение. Для случаев 5, 6 и 8 (когда $G=E_8$) a priori может получиться до трех различных решений. Однако выкладка показывает, что если отбросить те решения, при которых для некоторого простого корня α алгебры $G=E_8$ и некоторого простого корня β подалгебры $\tilde{G}$ произведение (α, β') оказывается нецелым, то остается в точности по одному варианту для каждого из рассматриваемых случаев. В силу теоремы 1.2, утверждение 2) этим доказано.

Доказательство утверждения 3) получается прямой выкладкой: пользуясь тем, что нам известны простые корни подалгебр $\tilde{G}$, и решая некоторые системы уравнений, вычисляем корневые векторы и убеждаемся, что они определены однозначно, с точностью до внутренних автоморфизмов алгебры G (а в случаях 2 и 13 еще и с точностью до внешнего автоморфизма E_6).

Глава V

Классификация S-подалгебр в особых простых алгебрах Ли. Отношения включения между S-подалгебрами

Классификация простых S-подалгебр в особых алгебрах Ли была получена нами в § 9 главы III и § 11 главы IV. § 13 настоящей главы посвящен выделению *непростых* максимальных S-подалгебр. Опираясь на результаты §§ 9, 11 и 13, мы построим в § 14 полную таблицу S-подалгебр с указанием всех включений между ними (таблица 39) *.

§ 13. Непростые максимальные S-подалгебры

Настоящий параграф посвящен доказательству следующей теоремы:

Теорема 13.1. *Произвольная нерегулярная непростая максимальная подалгебра*** *особой простой алгебры Ли сопряжена одной из подалгебр таблицы* 35. (Обозначения в таблице 35 — те же, что и в таблице 24.)

В § 14 будет доказано, что все подалгебры из таблицы 35 действительно являются максимальными подалгебрами.

n°41. Теорема 13.2. *Пусть G — простая алгебра Ли, G^* — ее нерегулярная максимальная подалгебра, $\tilde{G}$ — нетривиальный идеал в G^*. Тогда*

$$G^* = \tilde{G} \dot{+} [G; \tilde{G}], \tag{13.1}$$

где $[G; \tilde{G}]$ обозначает централизатор $\tilde{G}$ в G.

Доказательство. По теореме В. В. Морозова [12], нерегулярная максимальная подалгебра является полупростой. Пусть $\tilde{G}'$ — дополнительный для $\tilde{G}$ идеал алгебры G^*, так что

$$G^* = \tilde{G} \dot{+} \tilde{G}'. \tag{13.2}$$

Очевидно,

$$\tilde{G}' \subseteq [G; \tilde{G}]. \tag{13.3}$$

Поскольку $\tilde{G}$ — полупростая алгебра, она не имеет центра и

$$\tilde{G} \cap [G; \tilde{G}] = 0. \tag{13.4}$$

Из соотношений (13.2) и (13.3) следует:

$$G^* \subseteq \tilde{G} + [G; \tilde{G}]. \tag{13.5}$$

В силу (13.4), сумма, стоящая в правой части (13.5), является прямой.

---

* Используя таблицу 39, нетрудно вывести таблицу всех полупростых подалгебр особых алгебр (аналогично тому, как была выведена в главе IV таблица 25 из таблицы 24). Мы не приводим здесь этой таблицы ввиду ее громоздкости.

** Очевидно, класс нерегулярных максимальных подалгебр совпадает с классом максимальных S-подалгебр.

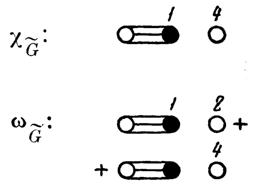
Таблица 35

Нерегулярные непростые максимальные подалгебры в особых простых алгебрах Ли

$G_2^1 + A_1^8 \subset F_4$

$N = 17$

$\chi_{\widetilde{G}}$:, $\omega_{\widetilde{G}}$:



x	$[0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]$	$[-1\ \ 2\ \ -2\ \ 0]$
y	$\frac{1}{3}[1\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$	$\frac{1}{3}[2\ \ -3\ \ 4\ \ -2]$
u	$\frac{1}{4}[2\ \ 4\ \ 3\ \ 2]$	$\frac{1}{2}[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$

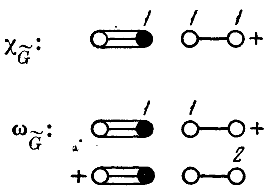
$e_x = e_2, \quad e_{-x} = e_2', \quad e_y = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + \sqrt{2}\, e_3), \quad e_{-y} = e_y'$

$e_u = \frac{i}{\sqrt{2}}(e_{2334} + \sqrt{2}\, e_{1234}), \qquad e_{-u} = e_u'$

$G_2^1 + A_2^{2''} \subset E_6$

$N = 22$

$\chi_{\widetilde{G}}$:, $\omega_{\widetilde{G}}$:



x	$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\&&1&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&-1&0&0\\&&2&&\end{bmatrix}$
y	$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\&&0&&\end{bmatrix}$	$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&0&2&0&0\\&&-3&&\end{bmatrix}$
u	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\&&0&&\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-1&-1&2&-1\\&&0&&\end{bmatrix}$
v	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\&&0&&\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&2&-1&-1&2\\&&0&&\end{bmatrix}$

$e_x = e_6, \ e_{-x} = e_x'$

$e_y = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_{123} + e_{234} + e_{345}), \ e_{-y} + e_y'$

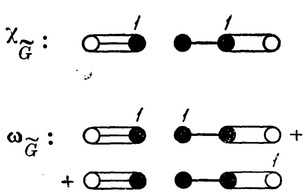
$e_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_4), \quad e_{-u} = e_u',$

$e_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_5), \quad e_{-v} = e_v'$

$G_2^1 + C_3^{1''} \subset E_7$

$N = 35$

$\chi_{\widetilde{G}}$:, $\omega_{\widetilde{G}}$:



x	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\&&0&&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&-1&0&0&0&0\\&&0&&&\end{bmatrix}$
y	$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&3&4&3&2&1\\&&2&&&\end{bmatrix}$	$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3&2&0&0&0&0\\&&0&&&\end{bmatrix}$
u	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\\&&1&&&\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&-1&0&-1&2\\&&2&&&\end{bmatrix}$
v	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&1&0&1&0\\&&0&&&\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-1&2&-2&2&-1\\&&-1&&&\end{bmatrix}$
w	$\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\&&0&&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&-1&2&-1&0\\&&0&&&\end{bmatrix}$

Таблица 35 (продолжение)

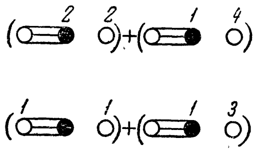
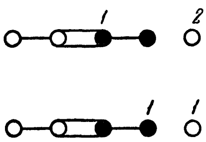
	$e_x = e_1, \quad e_{-x} = e'_x$ $e_y = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_{23456} - e_{23457} + e_{23473}), \quad e_{-y} = e'_y$ $e_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_6 + e_7), \quad e_{-u} = e'_u$ $e_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + e_5), \quad e_{-v} = e'_v$ $e_w = e_4, \quad e_{-w} = e'_4$
$G_2^2 + A_1^7 \subset E_7$ $N = 17$ $\chi_{\tilde G}$: ( ) + ( ) $\omega_{\tilde G}$: ( ) + ( )  	 x $\quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&1&1&2&1\\&&0&&&\end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-1&1&-1&2&0\\&&-1&&&\end{bmatrix}$ y $\quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&4&4&3&0&0\\&&3&&&\end{bmatrix} \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&2&-2&2&-3&0\\&&2&&&\end{bmatrix}$  u $\quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&2&4&1&0&1\\&&1&&&\end{bmatrix} \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&-2&4&-2&-2&2\\&&-2&&&\end{bmatrix}$ $e_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(ie_{56} + e_{345}), \quad e_{-x} = e'_x$ $e_y = \frac{1}{\sqrt{6}}(i\sqrt{2}e_{12} + \sqrt{2}e_{437} + e_{234} + e_{237}), \quad e_{-y} = e'_y$ $e_u = \frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{2}e_1 + i\sqrt{2}e_{23} + ie_{34} + ie_{37} + e_6), \quad e_{-u} = e'_u$
$F_4^1 + A_1^{3''} \subset E_7$ $N = 55$ $\chi_{\tilde G}$: $\omega_{\tilde G}$:  	 x $\quad \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\&&0&&&\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2&-1&0&0&0&0\\&&0&&&\end{bmatrix}$ y $\quad \begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\&&0&&&\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-1&2&-1&0&0&0\\&&0&&&\end{bmatrix}$ z $\quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&2&1&0&0\\&&1&&&\end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-2&2&0&-1&0\\&&0&&&\end{bmatrix}$ u $\quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&1&2&1\\&&0&&&\end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&-1&0&2&0\\&&0&&&\end{bmatrix}$  w $\quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&1\\&&1&&&\end{bmatrix} \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&0&-2&2&-2&2\\&&2&&&\end{bmatrix}$ $e_x = e_1, \quad e_{-x} = e'_1, \quad e_y = e_2, \quad e_{-y} = e'_y$ $e_z = \frac{i}{\sqrt{2}}(e_{37} - e_{34}), \quad e_{-z} = e'_z$ $e_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{45} + e_{56}), \quad e_{-u} = e'_u$ $e_w = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_6 + e_4 + e_7), \quad e_{-w} = e'_w$

Таблица 35 (продолжение)

$$A_1^{24} + A_1^{15} \subset E_7$$

$$N = 6$$

$$\chi_{\widetilde{G}}: \ (\overset{8}{\circ} \ \overset{2}{\circ}) + (\overset{6}{\circ} \ \overset{4}{\circ}) + (\overset{4}{\circ} \ \overset{6}{\circ}) + (\overset{4}{\circ} \ \overset{2}{\circ}) + (\overset{2}{\circ} \ \overset{4}{\circ})$$

$$\omega_{\widetilde{G}}: \ (\overset{6}{\circ} \ \overset{3}{\circ}) + (\overset{4}{\circ} \ \overset{1}{\circ}) + (\overset{2}{\circ} \ \overset{5}{\circ})$$

$$x \quad \circ \quad \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ & & 6 & & & \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & \end{bmatrix}$$

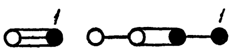
$$u \quad \circ \quad \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ & & 1 & & & \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ & & 2 & & & \end{bmatrix}$$

$$e_x = \frac{i}{\sqrt{12}} (\sqrt{2}\, e_{2345} + \sqrt{3}\, e_{1237} - \sqrt{3}\, e_{3456} + \sqrt{2}\, e_{2347} + e_{3457} - e_{1234}), \qquad e_{-x} = e'_x$$

$$e_y = \frac{1}{\sqrt{15}} (\sqrt{3}\, e_6 + 2e_5 + \sqrt{3}\, e_4 + \sqrt{2}\, e_2 + \sqrt{2}\, e_1 + e_7), \qquad e_{-y} = e'_y$$

$$G_2^1 + F_4^1 \subset E_8$$

$$N = 66$$

$\chi_{\widetilde{G}}$: 

$$x \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & & \end{bmatrix}$$

$$y \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 \\ & & & & 3 & & \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & & \end{bmatrix}$$

$$t \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & & \end{bmatrix}$$

$$u \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & & -1 & & \end{bmatrix}$$

$$v \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & & \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ & & & & 0 & & \end{bmatrix}$$

$$w \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & & \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ & & & & 0 & & \end{bmatrix}$$

$$e_x = e_1, \qquad e_{-x} = e'_x$$

$$e_y = \frac{1}{\sqrt{3}} (e_{234568543} - e_{234567854} + e_{234567856}), \qquad e_{-y} = e'_y$$

$$e_t = e_8, \qquad e_{-t} = e'_t$$

$$e_u = e_5, \qquad e_{-u} = e'_u$$

$$e_v = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_4 + e_6), \qquad e_{-v} = e'_v$$

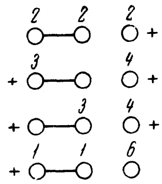
$$e_w = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_3 + e_7), \qquad e_{-w} = e'_w$$

Таблица 35 (продолжение)

$A_2^{6'} + A_1^{16} \subset E_8$

$N = 11$

$\chi_{\widetilde{G}}$:



$x \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & & \end{bmatrix} \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ & & & & -2 & & \end{bmatrix}$

$y \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ & & & & 0 & & \end{bmatrix} \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ & & & & -2 & & \end{bmatrix}$

$u \quad \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 \\ & & & & 8 & & \end{bmatrix} \quad \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & & \end{bmatrix}$

$$e_x = \frac{1}{2\sqrt{6}}(2e_1 + 2e_7 + \sqrt{2}\, e_3 + i\sqrt{2}\, e_{45} + i\sqrt{6}\, e_{34} + \sqrt{6}\, e_5), \quad e_{-x} = e'_x$$

$$e_y = \frac{1}{\sqrt{6}}(ie_{12} + ie_{67} + i\sqrt{2}\, e_{23} - \sqrt{2}\, e_{456}), \quad e_{-y} = e'_y$$

$$e_u = \frac{1}{4}(i\sqrt{2}\, e_{12345678} - \sqrt{2}\, e_{234568543} + e_{345678546} - i\sqrt{3}\, e_{12345685} + 2e_{234567854} + i\sqrt{3}\, e_{34567856} + e_{123456854}), \quad e_{-u} = e'_u$$

Поэтому $\widetilde{G} + [G;\ \widetilde{G}]$ не может совпадать с простой алгеброй G. Следовательно, имеет место разложение (13.1).

Следствие 1. *Никакой ненулевой идеал подалгебры G^* не может быть регулярной подалгеброй алгебры G.*

Это утверждение вытекает из разложения (13.1), если принять во внимание следствие 1 теоремы 6.7.

Следствие 2. *Если $\widetilde{G}$ — идеал подалгебры G^*, то централизатор $[G;\ \widetilde{G}]$ не может быть регулярным и отличным от нуля.*

Это утверждение вытекает из следствия 1, если принять во внимание, что $[G;\ \widetilde{G}] \subseteq G^*$.

n°42. Теорема 13.3. *Пусть G — одна из особых простых алгебр Ли, G^* — нерегулярная максимальная подалгебра алгебры G. Любой нетривиальный простой идеал $\widetilde{G}$ алгебры G^* принадлежит одному из классов линейно сопряженных подалгебр алгебры G, перечисленных в таблице* 36. (В таблице 36 для каждой подалгебры $\widetilde{G}$ указана ее размерность $N(\widetilde{G})$, размерность ее централизатора $N[G;\ \widetilde{G}]$ и сумма $M(\widetilde{G}) = N(\widetilde{G}) + N[G;\ \widetilde{G}]$.)

Доказательство. Подалгебра G^* является, очевидно, S-подалгеброй, и, по теореме 7.6, она целочисленна. Согласно предложению Б n°13 (§ 3), всякая подалгебра, содержащаяся в G^* и целочисленная относительно G^*, является целочисленной и по отношению к G. В частности (см. n°13, А), всякий идеал алгебры G^* является целочисленной подалгеброй в G. Итак, $\widetilde{G}$ — целочисленная подалгебра алгебры G. Следовательно, если ранг $\widetilde{G}$ равен 1, то $\widetilde{G}$ содержится в таблице 21; если же ранг G больше 1, то G содержится среди тех подалгебр таблицы 25, у которых характеристическое представление разлагается только на компоненты K_i и N. Поскольку, по предположению, $\widetilde{G}$ — *нетривиальный* идеал G^*, то $[G;\ \widetilde{G}] \neq 0$. Стало быть, из таблиц 21 и 25 можно отбросить без ущерба все подалгебры $\widetilde{G}$, для которых $N[G;\ \widetilde{G}] = 0$. (Размерность централизатора $N[G;\ \widetilde{G}]$ равна кратности, с которой входит нулевая компонента в характеристическое представление $\widetilde{G}$. Она непосредственно указана в таблице 21, как коэффициент при X_0, и в таблице 25, как коэффициент при N.)

Дальнейшую чистку среди выделенных подалгебр позволяют произвести теорема 13.2 и ее следствия. Предположим, что $N[G;\widetilde{G}]=1$, 2 или 4. Полупростых алгебр размерности 1, 2 и 4 не существует. Значит, $[G;\ \widetilde{G}]$ — неполупростая подалгебра. В силу теоремы 13.2, $\widetilde{G}$ не может быть нетривиальным идеалом в G^* (ибо разложение (13.1) противоречит полупростоте G). Следовательно, ее можно отбросить.

Далее, пусть существует регулярная подалгебра G', объемлющая $\widetilde{G}$ и такая, что

$$N[G;\ \widetilde{G}] = N[G;\ G']. \tag{13.6}$$

Тогда $[G;\ \widetilde{G}] = [G;\ G']$. Стало быть (см. следствие теоремы 6.7), $[G;\ \widetilde{G}]$ — регулярная подалгебра. Поэтому, опираясь на следствие 2 теоремы 13.2, можно выкинуть из таблицы 25 все случаи, когда условие (13.6) выполняется * для всех ** отнесенных к $\widetilde{G}$ регулярных подалгебр G'.

После описанной чистки остаются подалгебры $\widetilde{G}$, перечисленные в таблице 36.

n°43. Пусть G^* — нерегулярная полупростая максимальная подалгебра особой алгебры G, и пусть

$$G^* = \widetilde{G}_1 \dot{+} \widetilde{G}_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \widetilde{G}_k \tag{13.7}$$

— разложение G^* на простые идеалы. Из теоремы 13.2 вытекает, что

$$G^* = \widetilde{G}_i \dot{+} [G;\ \widetilde{G}_i] \quad (i = 1,\ 2, \ldots, k), \tag{13.8}$$

и, следовательно,

$$M(\widetilde{G}_1) = M(\widetilde{G}_2) = \ldots = M(\widetilde{G}_k) = N(G^*) = N(\widetilde{G}_1) + N(\widetilde{G}_2) + \ldots + N(\widetilde{G}_k). \tag{13.9}$$

В силу следствия теоремы 6.1,

$$(\text{ранг } \widetilde{G}_1) + (\text{ранг } \widetilde{G}_2) + \ldots + (\text{ранг } \widetilde{G}_k) < (\text{ранг } G). \tag{13.10}$$

Согласно теореме 13.3, слагаемые, составляющие разложение (13.7), должны входить в таблицу 36. В таблице 36 отделены чертой друг от друга группы подалгебр с одинаковым значением $M(\widetilde{G})$. Согласно равенству (13.9), все слагаемые из (13.7) должны входить в одну такую

---

* $N[G;\ G']$ легко вычисляется при помощи алгоритма, изложенного в n°22.

** Недостаточно, если это условие выполнено не для *всех*, а только для *некоторых* подалгебр G', указанных в таблице 25 (таков, например, случай $A_2^{6'} \subset E_8$). Действительно, подалгебры классифицированы в таблице 25 с точностью до L-сопряженности, и не исключено, что вместе объединены несопряженные подалгебры. Из регулярности централизатора одной из них никак не следует регулярность централизатора другой.

Таблица 36

F_4: $\widetilde{G}$	$N[F_4, \widetilde{G}]$	$N(\widetilde{G})$	$M(\widetilde{G})$
A_1^{28}	3	3	6
A_1^{4}	8	3	11
A_1^{8}	14	3	17
G_2^{1}	3	14	17

E_6: $\widetilde{G}$	$N(E_6, \widetilde{G})$	$N(\widetilde{G})$	$M(\widetilde{G})$
A_1^{28}	8	3	11
A_1^{8}	14	3	17
A_1^{4}	16	3	19
G_2^{1}	8	14	22
$A_2^{2''}$	14	8	22

E_7: $\widetilde{G}$	$N[E_7, \widetilde{G}]$	$N(\widetilde{G})$	$M(\widetilde{G})$
A_1^{156}	3	3	6
A_1^{56}	3	3	6
$A_1^{36'}$	3	3	6
A_1^{31}	3	3	6
A_1^{24}	3	3	6
A_1^{15}	3	3	6
A_1^{60}	6	3	9
A_1^{20}	9	3	12
$A_1^{12'}$	9	3	12
$A_1^{35''}$	14	3	17
A_1^{7}	14	3	17
G_2^{2}	3	14	17
A_2'	9	8	17
$B_2^{2'}$	9	10	19
A_1^{8}	17	3	20
$A_3^{2''}$	8	15	23
A_1^{28}	21	3	24
$A_1^{11'}$	21	3	24
G_2^{1}	21	14	35
$C_3^{1''}$	14	21	35
$A_1^{4'}$	35	3	38
$A_1^{3''}$	52	3	55
F_4^{1}	3	52	55

E_8: $\widetilde{G}$	$N[E_8, \widetilde{G}]$	$N(\widetilde{G})$	$M(\widetilde{G})$
A_1^{56}	6	3	9
A_1^{24}	6	3	9
$A_1^{84''}$	8	3	11
A_1^{32}	8	3	11
A_1^{16}	8	3	11
$A_2^{6'}$	3	8	11
A_1^{156}	14	3	17
$A_1^{36''}$	14	3	17
G_2^{2}	6	14	20
A_1^{60}	21	3	24
$A_1^{20''}$	24	3	27
$A_1^{12'}$	28	3	31
A_1^{8}	28	3	31
$^{2'}_{4}$	3	28	31
$B_2^{2'}$	24	10	34
$A_2^{3'}$	28	8	36
$C_4^{1'}$	8	36	44
A_1^{28}	52	3	55
G_2^{1}	52	14	66
F_4^{1}	14	52	66
$A_1^{4'}$	78	3	81

группу. Образуя из подалгебр таблицы 36 всевозможные комбинации, удовлетворяющие условиям (13.9) и (13.10), приходим к таблице 37.

Таблица 37

F_4		E_7		E_8	
$N(G^*)$	G^*	$N(G^*)$	G^*	$N(G^*)$	G^*
6	$A_1^{28}+A_1^{28}$	6	$A_1^{\varepsilon_1}+A_1^{\varepsilon_2}$	9	$A_1^{\varepsilon_1}+A_1^{\varepsilon_2}+A_1^{\varepsilon_3}$,
17	$A_1^{8}+G_2^{1}$		$\varepsilon_i=15, 24, 31, 36', 56, 156$		$\varepsilon_i=24, 56$
		9	$A_1^{60}+A_1^{60}+A_1^{60}$	11	$A_2^{6'}+A_1^{\varepsilon}$,
E_6					$\varepsilon=16, 32, 84''$
		12	$A_1^{\varepsilon_1}+A_1^{\varepsilon_2}+A_1^{\varepsilon_3}+A_1^{\varepsilon_4}$,		
22	$G_2^{1}+A_2^{2''}$		$\varepsilon_i=12', 20$	31	$D_4^{2'}+A_1^{\varepsilon}$,
		17	$A_2^{3'}+A_1^{\varepsilon_1}+A_1^{\varepsilon_2}+A_1^{\varepsilon_3}$		$\varepsilon=8, 12''$
			$\varepsilon_i=7, 35''$	66	$G_2^{1}+F_4^{1}$
		17	$G_2^{2}+A_1^{7}$		
		17	$G_2^{2}+A_1^{35''}$		
		35	$G_2^{1}+C_3^{1''}$		
		55	$A_1^{3''}+F_4^{1}$		

Пусть $\widetilde{G}_i^0$ — главная трехчленная подалгебра алгебры $\widetilde{G}_i$ и пусть j_i — индекс $\widetilde{G}_i^0$ в G. Тогда главная трехчленная подалгебра $G_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ алгебры $G_{i_1}\dotplus G_{i_2}\dotplus \ldots \dotplus G_{i_s}$ $(i_1<i_2<\ldots<i_s)$ имеет относительно G индекс

$$j_{i_1}+j_{i_2}+\ldots+j_{i_s}. \tag{13.11}$$

Подалгебра $G_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ является целочисленной в $G_{i_1}\dotplus G_{i_2}\dotplus \ldots \dotplus G_{i_s}$ (см. теорему 9.1), $G_{i_1}\dotplus G_{i_2}\dotplus \ldots \dotplus G_{i_s}$ целочисленна в G^* (как идеал), G^* целочисленна в G (как S-подалгебра). Поэтому $G_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ — целочисленная подалгебра алгебры G. Следовательно, все числа

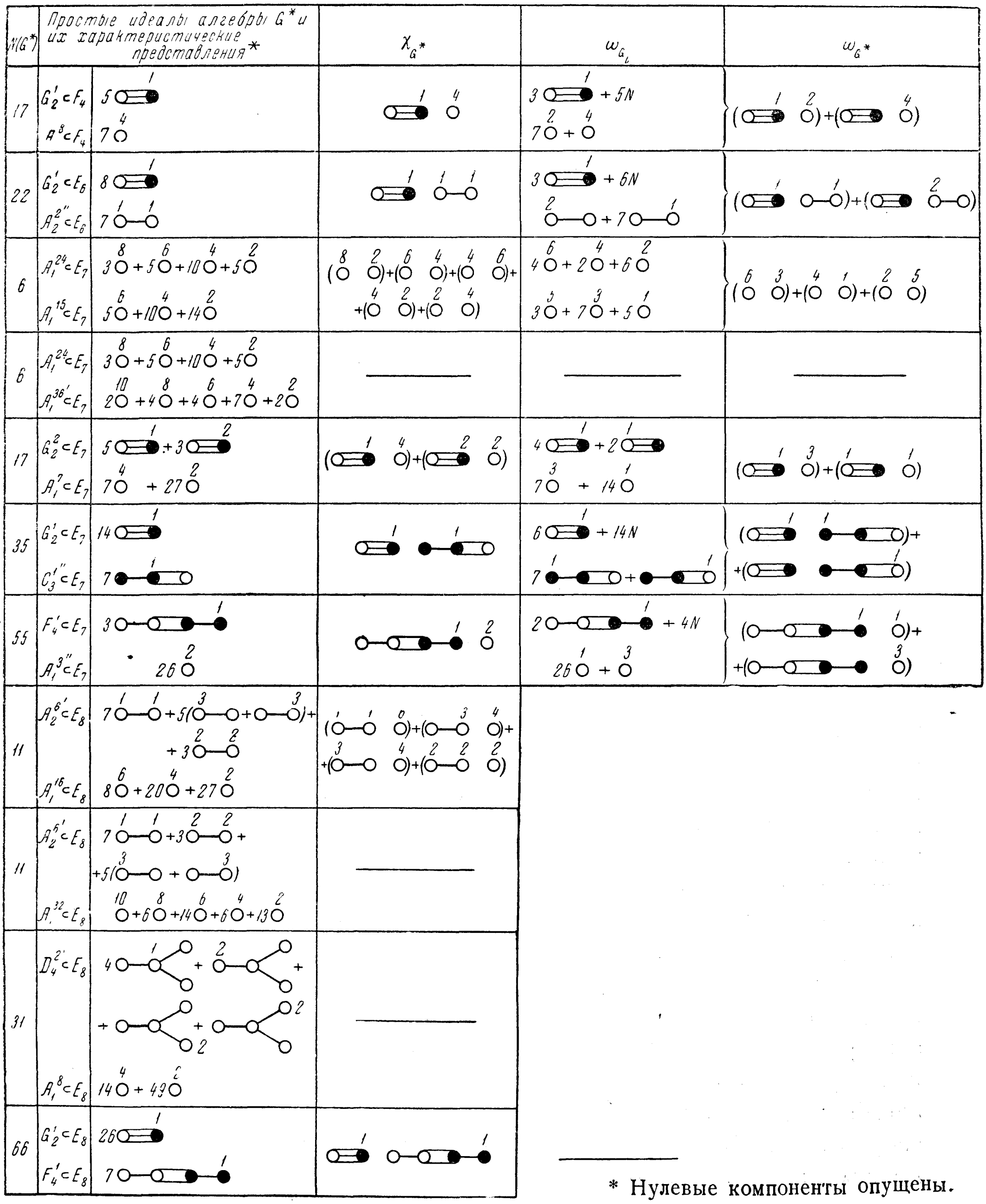
$$j_{i_1}+j_{i_2}+\ldots+j_{i_s} \quad (i_1<i_2<\ldots<i_s)$$

должны содержаться среди подчеркнутых чисел таблицы 28. Это замечание позволяет отбросить целый ряд возможностей, перечисленных в таблице 37, после чего остаются только следующие 11 возможностей:

1) $G=F_4$, $G^*=A_1^8+G_2^1$;
2) $G=E_6$, $G^*=G_2^1+A_2^{2''}$;
3) $G=E_7$, $G^*=A_1^{15}+A_1^{24}$;
4) $G=E_7$, $G^*=A_1^{24}+A_1^{36'}$;
5) $G=E_7$, $G^*=G_2^2+A_1^7$;
6) $G=E_7$, $G^*=G_2^1+C_3^{1''}$;
7) $G=E_7$, $G^*=A_1^{3''}+F_4^1$;
8) $G=E_8$, $G^*=A_2^{6'}+A_1^{16}$;
9) $G=E_8$, $G^*=A_2^{6'}+A_1^{32}$;
10) $G=E_8$, $G^*=D_4^{2'}+A_1^8$;
11) $G=E_8$, $G^*=G_2^1+F_4^1$.

Для каждой из этих полупростых подалгебр $G^* = \widetilde{G}_1 + \widetilde{G}_2$ выписываем из таблицы 25 характеристические представления ее простых идеалов $\widetilde{G}_1$, $\widetilde{G}_2$, отбрасывая при этом нулевые компоненты (см. таблицу 38). Легко видеть, что единственными значениями для характеристического представления χ_{G^*} подалгебр G^*, совместимыми с выписанными представлениями $\widetilde{G}_1$ и $\widetilde{G}_2$, являются значения, указанные в таблице 38. В частности, обнаруживается, что возможности 4), 8)

Таблица 38



* Нулевые компоненты опущены.

и 9) вообще не реализуются. Для подалгебр 1), 2), 3), 5), 6) алгебр F_4, E_6 и E_7 помимо характеристических представлений вычисляем аналогичным способом еще и представления ω_{G^*}.

Сопоставляя таблицу 38 с таблицей 35 и убеждаясь посредством выкладки, что каждой паре χ_{G^*}, ω_{G^*} из таблицы 38 отвечает один класс сопряженных подалгебр, заключаем, что каждая нерегулярная непростая максимальная подалгебра сопряжена одной из подалгебр, перечисленных в теореме 13.1.

§ 14. Таблица S-подалгебр

n°44. Мы одновременно докажем следующие две теоремы:

Теорема 14.1. *Таблица всех максимальных S-подалгебр в особых простых алгебрах Ли имеет вид*:

Алгебра	Максимальные подалгебры
G_2	A_1^{28}
F_4	A_1^{156}, $G_2^1+A_1^8$
E_6	A_1^9, G_2^3, C_4^1, $G_2^1+A_2^{2''}$, F_4^1
E_7	A_1^{399}, A_1^{231}, A_2^{21}, $G_2^1+C_3^{1''}$, $F_4^1+A_1^{3''}$, $G_2^2+A_1^7$, $A_1^{24}+A_1^{15}$
E_8	A_1^{1240}, A_1^{760}, A_1^{520}, $G_2^1+F_4^1$, $A_2^{6'}+A_1^{16}$, B_2^{12}

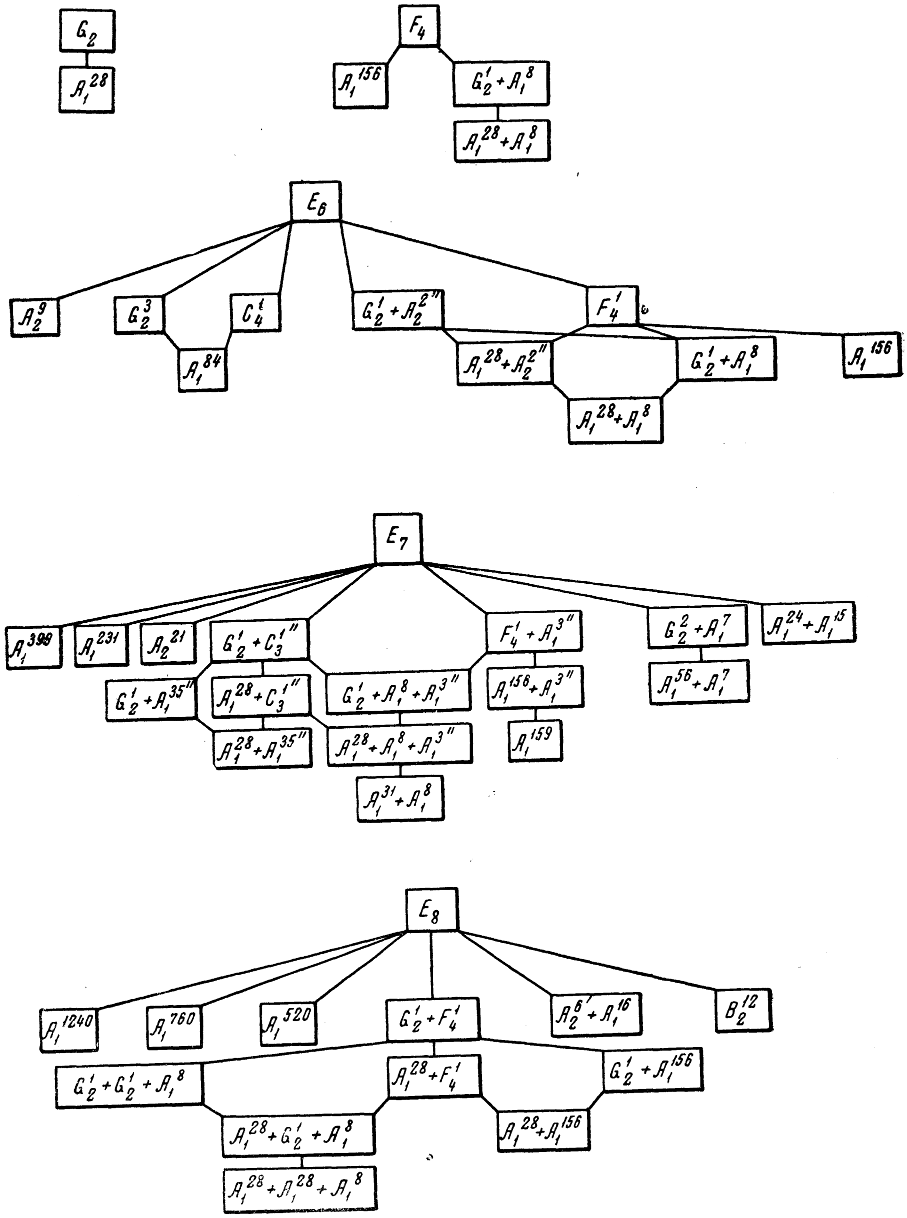
(Перечисленные здесь подалгебры подробно описаны в таблицах 14, 15, 24 и 35; приведенная таблица содержит все подалгебры из таблиц 14, 15, 24 и 35, за исключением подалгебры $A_1^{84}\subset E_6$ из таблицы 14 и подалгебр $A_1^{156}\subset E_6$ и $A_1^{159}\subset E_7$ из таблицы 15.)

Теорема 14.2. *Полный перечень S-подалгебр в особых простых алгебрах Ли с указанием всех включений между ними дается таблицей* 39.

Пусть G — произвольная простая алгебра Ли. Выделим в ней все максимальные S-подалгебры и назовем их подалгебрами первого этажа. В каждой подалгебре первого этажа выделим все ее полупростые максимальные подалгебры, отбросим те из них, которые не являются целочисленными подалгебрами в G, и назовем оставшиеся подалгебры подалгебрами второго этажа. Вообще, если построены подалгебры k-го этажа, то для получения подалгебр $k+1$-го этажа выделим полупростые максимальные подалгебры в каждой подалгебре k-го этажа и сохраним те из них, которые целочисленны в G, отбросив остальные. Из теорем 7.3 и 7.6 вытекает, что в результате этих построений мы получим все S-подалгебры алгебры G (разумеется, не исключено, что сверх того получится некоторое число R-подалгебр). Далее, если $\widetilde{G}$ и G^* — две S-подалгебры алгебры G, причем $\widetilde{G}\subset G^*$, то, очевидно, существует цепочка S-подалгебр $G_0, G_1, G_2, \ldots, G_k$, такая, что $G_0=\widetilde{G}$, $G_k=G^*$ и G_i является максимальной подалгеброй в G_{i+1} ($i=0, 1, 2, \ldots, k-1$). Таким образом, описанная выше конструкция дает не только все S-подалгебры

Таблица 39

Отношения включения между S-подалгебрами особых простых алгебр Ли



алгебры G, но и все отношения включения между ними. Для того чтобы ее осуществить, надо знать максимальные S-подалгебры в алгебре G и уметь находить полупростые максимальные подалгебры во всех подалгебрах, получающихся в ходе построения. Теорема 15.1 показывает, что последнее сводится к определению полупростых максимальных подалгебр в простых алгебрах.

Предположим на время, что теорема 14.1 доказана, и проведем для каждой из особых алгебр конструкцию, описанную в предыдущем абзаце. При этом используем следующую табличку полупростых максимальных подалгебр в некоторых классических алгебрах: *

Алгебра	Полупростые максимальные подалгебры
A_2	A_1^4
B_2	A_1^{10}, $A_1^1 + A_1^1$
C_3	A_1^{35}, $B_2^1 + A_1^1$, $A_1^8 + A_1^3$
C_4	A_1^{84}, $C_3^1 + A_1^1$, $C_2^1 + C_2^1$, $A_1^4 + A_1^4 + A_1^4$.

Поскольку таблицы 14, 15 и 24 дают *полный* перечень простых S-подалгебр, мы вправе несколько сократить работу, отбрасывая на каждом шагу те простые подалгебры, которые не вошли в указанные таблицы. Дальнейшее сокращение работы можно получить, если учесть включения

$$
\begin{aligned}
&1)\quad A_1^4 + A_1^4 + A_1^4 \subset A_2 + A_2 + A_2 \subset E_6,\\
&2)\quad G_2^1 + A_1^{11'} \subset G_2^1 + A_1^{10} + A_1^1 \subset D_6 + A_1 \subset E_7,\\
&3)\quad A_1^{3''} + A_1^{36'} \subset A_1^{3''} + A_1^{35''} + A_1^1 \subset D_6 + A_1 \subset E_7,\\
&4)\quad A_1^{24} + A_1^{16} \subset A_1^{24} + A_1^{15} + A_1^1 \subset E_7 + A_1 \subset E_8,\\
&5)\quad G_2^2 + A_1^8 \subset G_2^2 + A_1^7 + A_1^1 \subset E_7 + A_1 \subset E_8,\\
&6)\quad G_2^1 + A_1^{36''} \subset G_2^1 + A_1^{35} + A_1^1 \subset E_7 + A_1 \subset E_8,
\end{aligned}
$$

в силу которых $A_1^4 + A_1^4 + A_1^4$ является R-подалгеброй в E_6, $G_2^1 + A_1^{11'}$ и $A_1^{3''} + A_1^{36'}$ являются R-подалгебрами в E_7, а $A_1^{24} + A_1^{16}$, $G_2^2 + A_1^8$ и $G_2^1 + A_1^{36''}$ являются R-подалгебрами в E_8. Поэтому законно отбросить єти подалгебры, как только они встретятся в ходе вычислений. Если учесть сделанные замечания, то наш алгоритм приведет нас в точности к схемам таблицы 39.

Для того чтобы убедиться, что все подалгебры, вошедшие в таблицу 39, являются S-подалгебрами, достаточно проверить это для минимальных подалгебр из этой таблицы. Среди минимальных подалгебр достаточно рассмотреть непростые, ибо все простые подалгебры из таблицы 39 содержатся в одной из таблиц 14, 15 или 24 и являются S-подалгебрами, в силу теорем 9.1, 9.3 и 11.1. Итак, достаточно рассмотреть

$$
\left.
\begin{aligned}
&A_1^{28} + A_1^8 \text{ в } F_4,\\
&A_1^{28} + A_1^8 \text{ в } E_6,\\
&A_1^{28} + A_1^{35''},\ A_1^{31} + A_1^8,\ A_1^{56} + A_1^7 \text{ и } A_1^{24} + A_1^{15} \text{ в } E_7,\\
&A_1^{28} + A_1^{28} + A_1^8,\ A_1^{28} + A_1^{156},\ A_2^{6'} + A_1^{16} \text{ в } E_8.
\end{aligned}
\right\} \qquad (14.1)
$$

* Максимальные подалгебры всех классических алгебр были описаны нами в работе [9]. Изложение результатов работы [9] можно найти в § 15 настоящей работы.

Если бы какая-нибудь из выписанных подалгебр не являлась S-подалгеброй, то она содержалась бы в одной из максимальных полупростых подалгебр, перечисленных в таблицах 12 и 12а (см. n° 18 и теорему 7.7). Докажем, что в действительности это не так. Рассмотрим, например, подалгебру $\widetilde{G} = A_1^{28} + A_1^{28} + A_1^{8}$ алгебры E_8. Подалгебра $\widetilde{G}$ содержит A_1^{64} и A_1^{56}. Из таблицы 20 усматриваем, что минимальными регулярными подалгебрами, объемлющими A_1^{64}, являются $D_5 + A_2$ и $D_6 + 2A_1$, а минимальными регулярными подалгебрами, объемлющими A_1^{56}, являются $2D_4$ и A_6. Поэтому, если регулярная подалгебра содержит $\widetilde{G}$, то она содержит хотя бы одну из подалгебр $D_5 + A_2$ или $D_6 + 2A_1$ и хотя бы одну из подалгебр $2D_4$ или A_6. Легко видеть, что среди подалгебр таблиц 12—12а этим условиям удовлетворяют только подалгебры D_8 и $E_7 + A_1$. Централизатор подалгебры A_1^{28} в D_8 равен B_4^1. Если $\widetilde{G} \subset D_8$, то $A_1^{28} + A_1^{8} \subset B_4^1$; между тем, как это видно из таблицы 27, B_4^1 не содержит A_1^8. Итак, $\widetilde{G} \not\subset D_8$. Далее, если $\widetilde{G} \subset E_7 + A_1$, то $A_1^{28} \subset E_7$. В силу таблицы 21, централизатор A_1^{28} в E_7 имеет размерность 21 и, поскольку E_7 содержит подалгебру $A_1^{28} + C_3^{1''}$ (см. таблицу 39), то централизатор A_1^{28} в E_7 равен $C_3^{1''}$. Поэтому если $\widetilde{G} \subset E_7 + A_1$, то $A_1^{8} + A_1^{28} \subset A_1^{1} + C_3^{1''}$. Однако, как видно из таблицы 27, $A_1^1 + C_3^{1''}$ не содержит A_1^{28}. Итак, $\widetilde{G} \not\subset E_7 + A_1$. Тем самым доказано, что $\widetilde{G}$ является S-подалгеброй. Аналогичным образом рассматриваются и все остальные подалгебры (14.1).

Проведенные рассуждения показывают, что теорема 14.2 вытекает из теоремы 14.1. Однако теорема 14.1 сама нуждается в доказательстве. Мы покажем, что наши рассуждения можно несколько видоизменить так, чтобы они не опирались на теорему 14.1, а, напротив, доказывали эту теорему одновременно с теоремой 14.2.

Независимо от справедливости теоремы 14.1, таблица 39 дает некоторый набор S-подалгебр в каждой из особых алгебр Ли и указывает некоторые включения между этими подалгебрами. Сравнивая таблицу 39 с таблицами 14, 15, 24 и 35, замечаем, что все подалгебры из таблиц 14, 15, 24 и 35 попали в таблицу 39. Согласно теоремам 9.3, 11.1 и 13.1, каждая максимальная S-подалгебра любой особой алгебры Ли входит в одну из таблиц 14, 15, 24 или 35 и, следовательно, входит в таблицу 39. Подалгебры, занимающие в таблице 39 2-е, 3-и и т. д. этажи, не могут быть максимальны, ибо для них имеются указанные в таблице 39 объемлющие подалгебры. Значит, все максимальные подалгебры попали в первые этажи или, иными словами, попали в число подалгебр, описанных теоремой 14.1. Итак, опираясь при построении таблицы 39 на теорему 14.1, мы во всяком случае не упустили ни одной максимальной S-подалгебры, а значит, в силу самого способа построения таблицы 39, не упустили вообще ни одной S-подалгебры и ни одного включения между S-подалгебрами. Нам угрожает теперь лишь одна опасность: некоторые подалгебры, упомянутые в теореме 14.1, могут в действительности оказаться не максимальными. Однако если бы такие подалгебры имелись, то каждая из них должна была встретиться нам вновь при построении таблицы 39 на каком-нибудь этаже с номером, большим единицы. Поскольку этого не случилось, все подалгебры из теоремы 14.1 максимальны, и теорема 14.1, а вместе с ней и теорема 14.2, доказаны полностью.

Глава VI

Дальнейшее изучение подалгебр полупростых алгебр Ли

§ 15. Максимальные подалгебры полупростых алгебр Ли

n°45. Мы располагаем теперь всеми необходимыми элементами для полной классификации классов сопряженных максимальных подалгебр в полупростых алгебрах Ли. Нижеследующая теорема сводит эту задачу к аналогичной задаче для простых алгебр Ли.

Теорема 15.1. *Пусть*

$$G = G_1 \dot{+} G_2 \dot{+} \cdots \dot{+} G_s \tag{15.1}$$

— разложение полупростой алгебры G в прямую сумму простых идеалов. Совокупность всех максимальных подалгебр алгебры G дается формулами

$$R(i, \tilde{G}) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{s}{}^{\cdot}\, G_k \dot{+} \tilde{G}, \tag{15.2}$$

$$R(i, j, P) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{s}{}^{\cdot}\, G_k \dot{+} \{G_i, G_j; P\} \quad (i<j) \tag{15.3}$$

(*в формуле* (15.2) i *пробегает значения* $1, 2, \ldots, s$; $\tilde{G}$ *пробегает все максимальные подалгебры алгебры* G_i; *в формуле* (15.3) *индексы* i, j $(i<j)$ *пробегают всевозможные пары значений, для которых* G_i *и* G_j *изоморфны*; P *обозначает произвольное изоморфное отображение* G_i *на* G_j, *и* $\{G_i, G_j, P\}$ *определяется как множество всех элементов вида*

$$x + Px \quad (x \in G_i)).$$

Для того чтобы $R(i_1, \tilde{G}_1)$ *и* $R(i_2, \tilde{G}_2)$ *были сопряжены в* G, *необходимо и достаточно, чтобы* $i_1 = i_2$ *и* $\tilde{G}_1$ *и* $\tilde{G}_2$ *были сопряжены в* G_{i_1}. *Для того чтобы были сопряжены в* G *подалгебры* $R(i_1, j_1, P_1)$ *и* $R(i_2, j_2, P_2)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$ *и* P_1 *переводилось в* P_2 *некоторым внутренним автоморфизмом* G_{j_1}. *Подалгебры* $R(i, \tilde{G})$ *и* $R(i, j, P)$ *не могут быть сопряженными.*

Замечания. 1. Из теоремы 15.1 легко вытекает, что каждой паре изоморфных простых идеалов G_i, G_j соответствует столько несопряженных подалгебр $R(i, j, P)$, сколько элементов содержит фактор-группа группы всех автоморфизмов G_j по нормальному делителю, составленному из внутренних автоморфизмов.

2. Очевидно, что подалгебра $R(i, \tilde{G})$ является полупростой тогда и только тогда, когда является полупростой подалгебра $\tilde{G}$. Подалгебры $R(i, j, P)$ всегда являются полупростыми.

Доказательство теоремы 15.1. Согласно разложению (15.1), для каждого элемента x алгебры G имеем:

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_s \quad (x_k \in G_k). \tag{15.4}$$

Элементы x_k определяются для данного x однозначно. Положим $x_k = A_k x$. Легко видеть, что A_k — гомоморфное отображение G в G_k.

Пусть R — максимальная подалгебра алгебры G. Рассмотрим сначала тот случай, когда хотя бы для одного значения i

$$A_i(R) \subset G_i. \tag{15.5}$$

Пусть $\widetilde{G}$ — максимальная подалгебра алгебры G_i, содержащая $A_i(R)$. Очевидно, что подалгебра $R(i, \widetilde{G})$ содержит R и отлична от G; в силу максимальности R, имеем: $R = R(i, \widetilde{G})$.

Пусть теперь

$$A_k(R) = G_k \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, s. \tag{15.6}$$

Предположим, что $y \in G_i \cap R$, $z \in G_i$. Согласно (15.6), существует элемент $x \in R$, такой, что $A_i x = z$. Имеем:

$$y \circ z = y \circ x \in R \cap G_i. \tag{15.7}$$

Отсюда вытекает, что $R \cap G_i$ является идеалом в G_i. В силу простоты G_i, заключаем, что либо

$$G_i \subseteq R, \tag{15.8}$$

либо

$$G_i \cap R = 0. \tag{15.9}$$

Совокупность значений i, для которых имеет место соотношение (15.9), непуста (ибо $R \neq G$). Из разложения (15.1) видно, что эта совокупность содержит хотя бы два элемента $i < j$. Положим

$$(G_i \dotplus G_j) \cap R = G^*. \tag{15.10}$$

Подалгебра

$$R^* = G^* \dotplus \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^{s}{}^{\cdot}\, G_k \tag{15.11}$$

содержит R и отлична от G. Из максимальности G заключаем, что $R^* = R$. Далее, из формул (15.6) и (15.9) легко видеть, что для каждого x из G_i существует, и притом единственный, элемент y из G_j, такой, что $x + y \in G^*$. Положим $y = Px$. Нетрудно проверить, что P является изоморфным отображением G_i на G_j и $G^* = \{i, j, P\}$. Тем самым доказано, что при условии (15.6) подалгебра R дается формулой вида (15.3). Для доказательства последнего утверждения теоремы (об условиях сопряженности подалгебр (15.2) и (15.3)) достаточно заметить, что общий вид внутренних автоморфизмов алгебры G дается формулой

$$U = U_1 U_2 \ldots U_s,$$

где U_k — внутренний автоморфизм G_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$.

n°46. Классификация максимальных подалгебр в простых алгебрах Ли выглядит следующим образом. Мы подразделяем все максимальные подалгебры на три типа:

I — регулярные,

II — нерегулярные простые,

III — нерегулярные непростые.

Подалгебры I-го типа классифицированы теоремой 5.5.

Подалгебры II-го и III-го типов для особых простых алгебр Ли перечислены в теореме 14.1.

Для классических алгебр Ли подалгебры II-го и III-го типов были классифицированы нами в работе [9]. А именно, в [9] доказано, что максимальные подалгебры III-го типа в классических алгебрах Ли классифицируются следующей таблицей*:

Алгебра	Подалгебры	
$ASL(N)$	$ASL(s) \times ASL(t) \quad (2 \leqslant s \leqslant t)$	$st = N$
$ASp(N)$	$ASp(s) \times AO(t) \quad (s \geqslant 2;\ t \geqslant 3,\ t \neq 4;$ или $s = 2; t = 4)$	
$AO(N)$	$ASp(s) \times ASp(t) \quad (2 \leqslant s \leqslant t)$ $AO(s) \times AO(t) \quad (3 \leqslant s \leqslant t;\ s,\ t \neq 4)$	,

Классификация подалгебр типа II в классических алгебрах составляет главное содержание работы [9]. Обнаруживается почти точное совпадение этого типа подалгебр с совокупностью всех неприводимых простых подалгебр. Точнее, если G — одна из классических алгебр, линейно представленная в пространстве возможно меньшего числа измерений, то всякая ее максимальная подалгебра второго типа неприводима (за исключением подалгебры B^1_{n-1} в D_n) и, обратно, каждая неприводимая простая матричная алгебра (кроме 4-х серий и 14-ти изолированных алгебр, перечисленных в таблице 1 работы [9]) является максимальной в одной и только одной из классических алгебр Ли. Поскольку результаты Э. Картана [16] позволяют описать все неприводимые матричные алгебры, а результаты А. И. Мальцева [11] выделяют среди таких алгебр все алгебры, включающиеся в алгебру

* $ASL(N)$ обозначает алгебру всех матриц порядка N со следом нуль; $AO(N)$ и $ASp(N)$ обозначает, соответственно, алгебры Ли, отвечающие группе всех ортогональных и группе всех симплектических матриц порядка N. Если G_1 и G_2 — алгебры Ли, составленные из матриц порядка n_1 и n_2, соответственно, то $G_1 \times G_2$ обозначает алгебру Ли, составленную из всех матриц порядка $n_1 n_2$, имеющих вид

$$B_1 \times E^{(n_2)} + E^{(n_1)} \times B_2,$$

где $E^{(n_1)}$ и $E^{(n_2)}$ — единичные матрицы порядков n_1 и n_2 и $U \times V$ обозначает кронекеровское произведение матриц U и V.

$ASp(N)$ или $AO(N)$, сформулированный результат работы [9] дает эффективное описание всех максимальных подалгебр II-го типа во всех классических алгебрах.

Заметим, что аналогом основной теоремы работы [9] для особых алгебр является следующая теорема, представляющая собой очевидное следствие таблицы 39:

Теорема 15.2 *Каждая простая S-подалгебра произвольной особой алгебры Ли является максимальной подалгеброй за исключением подалгебр A_1^{84} и A_1^{156} алгебры E_6 и подалгебры A_1^{159} алгебры E_7.*

§ 16. Подалгебры особых простых алгебр Ли, неприводимые относительно некоторого линейного представления алгебры

n° 47. Пусть G — произвольная алгебра Ли, и пусть $\tilde{G}$ — некоторая ее подалгебра. Линейное представление $\varphi(g)$ алгебры G индуцирует на подалгебре $\tilde{G}$ представление $\tilde{\varphi}$, определенное формулой

$$\tilde{\varphi}(\tilde{g}) = \varphi(\tilde{g}) \quad (\tilde{g} \in \tilde{G}). \tag{16.1}$$

Если это представление неприводимо, то мы называем подалгебру $\tilde{G}$ неприводимой относительно представления φ алгебры G.

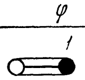
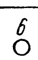
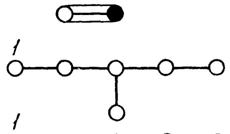
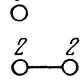
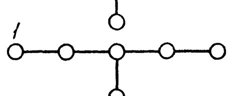
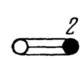
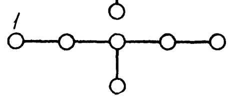
В нашей работе [9] показано, что ряд важных задач теории групп и, в частности, задача об отыскании всех отношений включения между неприводимыми матричными алгебрами Ли сводится к следующей задаче:

Для каждой простой алгебры Ли G найти все ее подалгебры, неприводимые относительно какого-нибудь представления алгебры.

Эта задача решена нами в [9] для случая, когда G является классической алгеброй. Для особых алгебр Ли мы привели в [9] лишь окончательный результат и пообещали дать его доказательство в другом месте. Теперь мы выполним это обещание.

Теорема 16.1. *Полный перечень тех случаев, когда собственная подалгебра $\tilde{G}$ особой простой алгебры G неприводима относительно линейного представления φ алгебры G, дается таблицей* 40. (В таблице указаны также представления $\tilde{\varphi}$, индуцированные φ на $\tilde{G}$, и размерности $N(\varphi) = N(\tilde{\varphi})$ представлений φ и $\tilde{\varphi}$.)

Таблица 40

G	$\tilde{G}$	φ	$\tilde{\varphi}$	$N(\varphi)=N(\tilde{\varphi})$
G_2	A_1^{28}			7
E_6	A_2			27
	G_2			27
	C_4			27

Доказательство. Прежде всего, в силу теоремы 7.1, мы можем ограничиться рассмотрением одних только S-подалгебр.

Пусть идемпотент H алгебры G и идемпотент $\widetilde{H}$ подалгебры $\widetilde{G}$ выбраны так, что $\widetilde{H}\subseteq H$, и пусть упорядочения $\widetilde{H}$ и H согласованы. Тогда старший вес $\widetilde{\Lambda}$ представления $\widetilde{\varphi}$ получается из старшего веса Λ представления φ ортогональным проектированием на $\widetilde{H}$ (см. [4], теорема 3). Поэтому

$$(\widetilde{\Lambda}, \beta) = (\Lambda, \beta) \tag{16.2}$$

для любого $\beta\in\widetilde{\Pi}$ (мы обозначаем через $\widetilde{\Pi}$ систему простых корней $\widetilde{G}$ и через Π — систему простых корней G). Имеем:

$$\beta = \sum_{\alpha\in\Pi} a_{\beta\alpha}\cdot\alpha \quad (\beta\in\widetilde{\Pi}). \tag{16.3}$$

Коэффициенты $a_{\beta\alpha}$ для всех максимальных S-подалгебр особых алгебр Ли могут быть взяты из таблиц 14, 15, 24 и 36. Из равенств (16.2) и (16.3) имеем:

$$\frac{2\,(\Lambda, \beta)}{(\beta, \beta)} = \frac{2}{(\beta, \beta)}\sum_{\alpha\in\Pi} a_{\beta\alpha}\,(\Lambda, \alpha) = \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)}\sum_{\alpha\in\Pi} a_{\beta\alpha}\,\frac{2\,(\Lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}. \tag{16.4}$$

Используя эту формулу, легко вычислить по схеме представления φ схему, задающую старшую неприводимую компоненту $\overline{\widetilde{\varphi}}$ представления $\widetilde{\varphi}$. В таблице 41 приводятся результаты такого вычисления для всех максимальных S-подалгебр и всех базисных линейных представлений особых алгебр Ли. По схеме представлений φ и $\overline{\widetilde{\varphi}}$ при помощи формул Г. Вейля (см. [21], а также [9], добавление, n° 31) определяются размерности $N(\varphi)$ и $N(\overline{\widetilde{\varphi}})$). Их значения также указаны в таблице 41. Мы видим, что равенство

$$N(\varphi) = N(\overline{\widetilde{\varphi}}) \tag{16.5}$$

имеет место только для четырех случаев, вошедших в таблицу 40. Во всех остальных случаях

$$N(\overline{\widetilde{\varphi}}) < N(\varphi) \tag{16.6}$$

и, стало быть, $\widetilde{\varphi}$ приводимо.

Теперь мы воспользуемся теоремой 3.21 работы [9], согласно которой, если подалгебра $\widetilde{G}$ приводима относительно картановской композиции представлений, то она приводима относительно каждого представления. Из этой теоремы вытекает, что подалгебры F_4^1 и $G_2^1 + A_2^{2''}$ алгебры E_6 и все максимальные S-подалгебры алгебр F_4, E_7 и E_8, будучи приводимыми относительно всех базисных представлений, являются приводимыми и относительно любого представления. Очевидно, что тем же свойством обладает и любая подалгебра, которая содержится в одной из перечисленных подалгебр. Принимая во внимание таблицу 39, заключаем, что неприводимость $\widetilde{G}$ относительно какого-нибудь представления φ особой алгебры G возможна лишь в случаях:

G_2	A_1^{28}	
	○	$N(\widetilde{\varphi})$
14	10	11
7	6	7

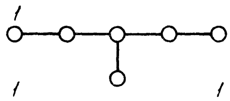
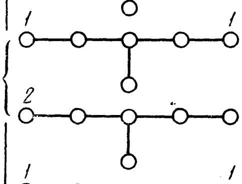
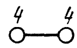
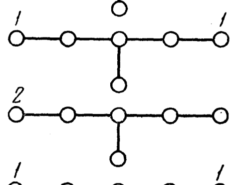
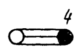
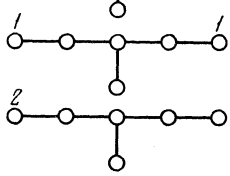
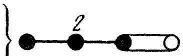
F_4	A_1^{156}		$G_2^1 + A_1^8$			
	○	$N(\widetilde{\varphi})$			○	$N(\widetilde{\varphi})$
52	22	23	0	1	4	35
1274	42	43	1	0	8	118
273	30	31	0	1	6	49
26	16	17	0	0	4	5

E_6	A_2^9			G_2^3			C_4^1					F_4^1					$G_2^1 + A_2^{2''}$				
	○—○		$N(\widetilde{\varphi})$			$N(\widetilde{\varphi})$					$N(\widetilde{\varphi})$					$N(\widetilde{\varphi})$			○—○		$N(\widetilde{\varphi})$
27	2	2	27	0	2	27	0	1		0	27	0	0	0	1	26	0	1	1	0	21
351	2	5	81	1	2	189	1	0	1	0	315	0	0	1	0	273	0	2	0	1	81
2925	0	9	55	3	0	273	2	0	0	1	1155	0	1	0	0	1274	0	3	0	0	77
78	1	4	35	1	1	64	2	0	0	0	36	1	0	0	0	52	1	0	0	0	14

E_7	A_1^{399}		A_1^{231}		A_2^{21}			$G_2^1 + C_3^{1''}$						$F_4^1 + A_1^{3''}$						$A_1^{24} + A_1^{15}$			$G_2^2 + A_1^7$			
	○	$N(\widetilde{\varphi})$	○	$N(\widetilde{\varphi})$	○—○		$N(\widetilde{\varphi})$						$N(\widetilde{\varphi})$					○	$N(\widetilde{\varphi})$	○	○	$N(\widetilde{\varphi})$			○	$N(\widetilde{\varphi})$
133	34	35	26	27	4	4	125	1	0	0	0	0	14	1	0	0	0	0	52	8	2	27	0	2	2	81
8645	66	67	50	51	6	9	595	0	3	0	0	0	77	0	1	0	0	0	1274	16	2	51	0	4	2	546
365750	96	97	72	73	6	15	1288	0	4	0	1	0	2548	0	0	2	0	0	38896	24	0	25	1	4	4	4620
27664	75	76	57	58	0	15	136	0	3	0	0	1	1078	0	0	1	1	1	8192	18	3	76	1	3	1	896
1539	52	53	40	41	1	10	143	0	2	0	1	0	378	0	0	0	2	0	324	12	4	65	2	0	0	77
56	27	28	21	22	0	6	28	0	1	1	0	0	42	0	0	0	1	1	52	6	3	28	1	0	1	28
912	49	50	37	38	4	7	260	0	2	1	0	0	162	0	0	1	0	1	546	12	1	26	0	3	1	154

E_8	A_1^{1240}		A_1^{760}		A_1^{520}		B_2^{12}			$G_2^1 + F_4^1$							$A_2^{6'} + A_1^{16}$			
	○	$N(\widetilde{\varphi})$	○	$N(\widetilde{\varphi})$	○	$N(\widetilde{\varphi})$			$N(\widetilde{\varphi})$							$N(\widetilde{\varphi})$	○—○		○	$N(\widetilde{\varphi})$
248	58	59	46	47	38	39	3	2	154	1	0	0	0	0	0	14	1	1	6	56
72912	114	115	90	91	74	75	3	8	1326	0	3	0	0	0	0	77	0	3	12	130
24502400	168	169	132	133	108	109	7	8	5100	0	4	0	0	0	1	4732	2	2	18	513
5121384450	220	221	172	173	142	143	8	12	13299	0	5	0	0	1	0	103194	2	2	24	675
87587590464	270	271	210	211	174	175	9	16	11322	0	6	0	1	0	0	909636	2	2	30	837
6696000	182	183	142	143	118	119	8	8	6561	0	4	0	0	1	0	49686	0	3	20	210
3875	92	93	72	73	60	61	4	4	625	0	2	0	0	0	1	702	1	1	10	88
147250	136	137	106	107	88	89	6	6	2401	0	3	1	0	0	0	4004	0	0	16	17

Таблица 42

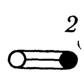
G	$\widetilde{G}$	φ	$N(\varphi)$	$\overline{\overline{\varphi}}$	$N(\overline{\overline{\varphi}})$
G_2	A_1^{28}		27		13
E_6	A_1^{84}		27		13
E_6	A_2		650 351		125
E_6	G_2		650 351		182
E_6	C_4		650 351		308

1) $G = G_2$, $\widetilde{G} = A_1^{28}$

2) $G = E_6$, $\widetilde{G} = A_2^9$, G_2^3, C_4^1 или A_1^{84}.

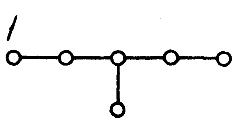
В силу теоремы 3.21 работы [9], для полного доказательства теоремы 15.1 достаточно проверить, что:

а) подалгебра A_1^{28} алгебры G_2 приводима относительно



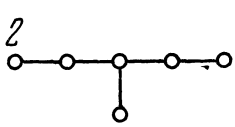
,

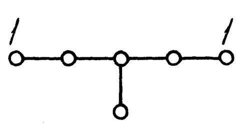
б) подалгебра A_1^{84} алгебры E_6 приводима относительно



,

в) подалгебры A_2^9, G_2^3, C_4^4 алгебры E_6 приводимы относительно



и


.

Эта проверка осуществляется путем сравнения размерностей φ и $\overline{\overline{\varphi}}$ (см. таблицу 42).

(Поступило в редакцию 31/X 1951 г.)

Литература

1. Ф. Р. Гантмахер, О каноническом представлении автоморфизмов полупростой группы Ли, Мат. сб., **5** (47) (1939), 101—146.
2. Е. Б. Дынкин, Классификация простых групп Ли, Мат. сб., **18 (60)** (1946), 347—352.
3. Е. Б. Дынкин, Структура полупростых алгебр Ли, Успехи матем. наук, т. **II**, вып. **4 (20)** (1947), 59—128.
4. Е. Б. Дынкин, Некоторые свойства системы весов линейного представления полупростой группы Ли, ДАН СССР, т. **LXXI**, № **2** (1950), 221—224.
5. Е. Б. Дынкин. Регулярные полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли, ДАН СССР, т. **LXXIII**, № **5** (1950), 877—880.
6. Е. Б. Дынкин, Максимальные подгруппы полупростых групп Ли и классификация примитивных групп преобразований, ДАН СССР, т. **LXXV**, № **3** (1950), 333—336.
7. Е. Б. Дынкин, Автоморфизмы полупростых алгебр Ли, ДАН СССР, т. **LXXVI**, № **5** (1951), 629—632.
8. Е. Б. Дынкин, Отношения включения между неприводимыми группами линейных преобразований, ДАН СССР, т. **LXXVIII**, № **1** (1951), 5—7.
9. Е. Б. Дынкин, Максимальные подгруппы классических групп, Труды Моск. матем. об-ва, т. **1** (1952).
10. Ф. И. Карпелевич, О максимальных неполупростых подалгебрах полупростых алгебр Ли, ДАН СССР, т. **LXXVI**, № **6** (1951), 775—778.
11. А. И. Мальцев, О полупростых подгруппах групп Ли, Изв. АН СССР, серия матем., т. **8**, № **4** (1944), 143—174.
12. В. В. Морозов, О неполупростых максимальных подгруппах простых групп, Диссертация, Казанский гос. университет, 1943.
13. В. В. Морозов, О централизаторе полупростой подалгебры в полупростой алгебре Ли, ДАН СССР, т. **XXXVI**, № **9** (1948), 275—277.
14. Н. Г. Чеботарев, Одна теорема из теории полупростых групп Ли, Мат. сб., **11 (53)** (1942), 239—244; Собрание сочинений, т. 2, 332—338.
15. É. Cartan, Sur la structure des groupes des transformations finis et continus, Thèse, Paris, 1933.
16. É. Cartan, Les groupes projectives qui ne laissent invariante aucune miltiplicité plane, Bull. Soc. Math. de France, **41** (1913), 53—96.
17. H. Casimir, B. L. van-der-Waerden, Algebraischer Beweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellung halbeinfacher Liescher Gruppen, Math. Ann., **111** (1935), 1—12.
18. G. Frobenius, Über die kogredienten Transformationen der bilinearen Formen, Berl. Sitzungsber., Math.-Phys. Klasse (1896), 7—16.
19. S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III, Leipzig, 1873 или 1930, 122—140.
20. J. de Siebenthal, Sur certains sous-groupes de rang un des groupes de Lie clos, C. R., Paris, **230 : 10** (1950), 910—912.
21. H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, Math. Zeitschr., **23** (1925), 271—309; **24** (1925), 328—395; Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований, Успехи матем. наук, вып. **IV** (1938), 201—246.