А. Ф. ФИЛИППОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ

« ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА »
МОСКВА

A. PHILIPPOV

# RECUEIL DE PROBLÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES



EDITIONS MIR • MOSCOU

Références:

[1] — V. Stépanov « Cours d'équations différentielles » (en russe).
[2] — I. Pétrovski « Cours théorique d'équations différentielles ordinaires » (en russe).
[3] — L. Pontriaguine « Equations différentielles ordinaires » (traduction française, 1975).
[4] — L. Elsgoltz «Equations différentielles et calcul variationnel » (en russe).
[5] — B. Démidovitch « Théorie mathématique de la stabilité » (en russe).


L'auteur serait très reconnaissant aux lecteurs de bien vouloir lui adresser leurs remarques sur le contenu de ce recueil.

*A. Philippov*

## § 1. Isoclines. Equation différentielle d'une famille de courbes

1. La solution de l'équation $y' = f(x, y)$ passant par le point $(x, y)$ doit avoir en ce point une dérivée $y'$ égale à $f(x, y)$, c'est-à-dire qu'elle doit être tangente à une droite formant avec l'axe $Ox$ un angle $\alpha = \operatorname{arc\,tg} f(x, y)$. On appelle isocline le lieu géométrique des points du plan $(x, y)$ en lesquels la pente des tangentes aux solutions de l'équation $y' = f(x, y)$ a une valeur constante. Par conséquent, l'équation de l'isocline s'écrit $f(x, y) = k$, où $k$ est une constante.

Si l'on veut définir approximativement les solutions de l'équation $y' = f(x, y)$, on peut tracer un nombre suffisant d'isoclines, ensuite construire les courbes solutions qui, aux points d'intersection avec les isoclines $f(x, y) = k_1$, $f(x, y) = k_2$, . . . présentent des tangentes respectivement de coefficients angulaires $k_1, k_2, \ldots$ Pour les applications de la méthode ci-dessus, cf. [1], chapitre I, § 1, point 3 ou [4], chapitre I, § 1.

2. Pour établir une équation différentielle susceptible d'être vérifiée par les courbes de la famille

$$\varphi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{1}$$

il convient de dériver $n$ fois l'équation (1), en prenant $y$ comme fonction de $x$, et d'éliminer ensuite entre les équations obtenues et l'équation (1) les constantes arbitraires $C_1, \ldots, C_n$.

Exemple. Etablir l'équation différentielle de la famille de courbes

$$C_1 x + (y - C_2)^2 = 0. \tag{2}$$

Comme l'équation de la famille comporte deux paramètres, on la dérive deux fois, en posant $y = y(x)$:

$$C_1 + 2(y - C_2)y' = 0, \tag{3}$$

$$2y'^2 + 2(y - C_2)y'' = 0. \tag{4}$$

Eliminons $C_1$. De l'équation (3) on déduit $C_1 = -2(y - C_2)y'$; portant ensuite dans (2) on obtient:

$$-2xy'(y - C_2) + (y - C_2)^2 = 0. \tag{5}$$

Eliminons $C_2$. De l'équation (4) on tire $y - C_2 = -y'^2/y''$; en le portant dans (5), on obtient après simplifications l'équation différentielle

$$y' + 2xy'' = 0.$$

3. Les lignes coupant toutes les courbes d'une famille donnée sous un même angle $\varphi$ sont appelées trajectoires isogonales. Les angles $\beta$ et $\alpha$ formés respectivement par la trajectoire et la courbe avec l'axe $Ox$ sont liés par la relation $\beta = \alpha \pm \varphi$. Soit

$$y' = f(x, y) \tag{6}$$

l'équation différentielle de la famille de courbes donnée, et

$$y' = f_1(x, y) \tag{7}$$

l'équation de la famille de trajectoires isogonales. Alors $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$, $\operatorname{tg} \beta = f_1(x, y)$. Par conséquent, si l'équation (6) est écrite et l'angle $\varphi$ connu, il est aisé de trouver $\operatorname{tg} \beta$ et d'écrire ensuite l'équation différentielle des trajectoires (7).

L'équation de la famille de courbes donnée étant

$$F(x, y, y') = 0, \tag{8}$$

pour établir celle des trajectoires isogonales on peut éviter de résoudre l'équation (8) par rapport à $y'$. Dans ce cas, il convient de substituer dans l'équation (8) $y'$ à $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\beta \mp \varphi)$, où $\operatorname{tg} \beta = y'$ est le coefficient angulaire de la tangente à la trajectoire.

Si, d'autre part, l'équation de la famille de courbes est de la forme $\varphi(x, y, C) = 0$, on doit d'abord établir l'équation différentielle de cette famille et ensuite l'équation différentielle des trajectoires.

Construire, à l'aide d'isoclines, les solutions approchées des équations:

**1.** $y' = y - x^2$. **2.** $2(y + y') = x + 3$.
**3.** $y' = \frac{x^2 + y^2}{2} - 1$. **4.** $(y^2 + 1)y' = y - x$.
**5.** $yy' + x = 0$. **6.** $xy' = 2y$.
**7.** $xy' + y = 0$. **8.** $y' + y = (x - y')^3$.
**9.** $y' = x - e^y$. **10.** $y(y' + x) = 1$.
**11.** $y' = \frac{y - 3x}{x + 3y}$. **12.** $y' = \frac{y}{x + y}$.
**13.** $x^2 + y^2 y' = 1$. **14.** $(x^2 + y^2)y' = 4x$.

**15.** Ecrire l'équation du lieu géométrique des points extrémums $(x, y)$ (maximum ou minimum) des solutions de l'équation $y' = f(x, y)$. Comment distinguer ces points entre eux?



**16.** Ecrire l'équation du lieu géométrique des points de courbure des graphiques de solutions des équations:
a) $y' = y - x^2$; b) $y' = x - e^y$; c) $x^2 + y^2 y' = 1$; d) $y' = f(x, y)$.

Etablir les équations différentielles des familles de courbes:

**17.** $y = e^{Cx}$. **18.** $y = (x - C)^3$.
**19.** $y = Cx^3$. **20.** $y = \sin(x + C)$.
**21.** $x^2 + Cy^2 = 2y$. **22.** $y^2 + Cx = x^3$.
**23.** $y = C(x - C)^2$. **24.** $Cy = \sin Cx$.
**25.** $y = ax^2 + be^x$. **26.** $(x - a)^2 + by^2 = 1$.
**27.** $\ln y = ax + by$. **28.** $y = ax^3 + bx^2 + cx$.
**29.** $x = ay^2 + by + c$.

**30.** Etablir l'équation différentielle des cercles de rayon 1 centrés sur la droite $y = 2x$.

**31.** Etablir l'équation différentielle des paraboles d'axe parallèle à $Oy$ et tangentes simultanément aux droites $y = 0$ et $y = x$.

**32.** Ecrire l'équation différentielle des cercles tangents simultanément aux droites $y = 0$ et $x = 0$ et situés dans les premier et troisième quadrants.

**33.** Ecrire l'équation différentielle de toutes les paraboles d'axe parallèle à $Oy$ et passant par l'origine des coordonnées.

**34.** Etablir l'équation différentielle de tous les cercles tangents e des abscisses.

Trouver les systèmes d'équations différentielles vérifiées par les courbes des familles:

**35.** $ax + z = b$, $y^2 + z^2 = b^2$.
**36.** $x^2 + y^2 = z^2 - 2bz$; $y = ax + b$.

Trouver les équations différentielles *) des trajectoires coupant sous un angle donné $\varphi$ les courbes de la famille:

**37.** $y = Cx^4$, $\varphi = 90°$. **38.** $y^2 = x + C$, $\varphi = 90°$.
**39.** $x^2 = y + Cx$, $\varphi = 90°$. **40.** $x^2 + y^2 = a^2$, $\varphi = 45°$.
**41.** $y = kx$, $\varphi = 60°$. **42.** $3x^2 + y^2 = C$; $\varphi = 30°$.
**43.** $y^2 = 2px$, $\varphi = 60°$. **44.** $r = a + \cos\theta$, $\varphi = 90°$.
**45.** $r = a\cos^2\theta$, $\varphi = 90°$. **46.** $r = a\sin\theta$, $\varphi = 45°$.
**47.** $y = x\ln x + Cx$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} 2$. **48.** $x^2 + y^2 = 2ax$, $\varphi = 45°$.
**49.** $x^2 + C^2 = 2Cy$, $\varphi = 90°$. **50.** $y = Cx + C^3$, $\varphi = 90°$.

*) Les équations qu'on obtient dans les problèmes nos 37 à 50 peuvent être résolues par les méthodes qui font l'objet des paragraphes suivants.

## § 2. Equations différentielles à variables séparables

1. Les équations à variables séparables peuvent s'écrire sous la forme:

$$y' = f(x)\, g(y), \tag{1}$$

ou encore

$$M(x)\, N(y)\, dx + P(x)\, Q(y)\, dy = 0. \tag{2}$$

Pour résoudre cette équation, il faut multiplier ou diviser ses deux membres par une expression telle que l'on obtienne dans l'un uniquement des $x$ et dans l'autre, des $y$, et, ensuite, intégrer les deux membres.

La division des deux membres de l'équation par une expression contenant les inconnues $x$ et $y$ peut entraîner la perte des solutions annulant cette expression.

E x e m p l e. Résoudre l'équation

$$x^2y^2y' + 1 = y. \tag{3}$$

Mettons l'équation sous la forme (2):

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1; \quad x^2y^2\, dy = (y-1)\, dx.$$

Divisons les deux membres de l'équation par $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}\, dy = \frac{dx}{x^2}.$$

Nous avons ainsi séparé les variables. En intégrant les deux membres de l'équation, on obtient:

$$\int \frac{y^2}{y-1}\, dy = \int \frac{dx}{x^2}; \quad \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

La division des deux membres par $x^2(y-1)$ conduirait à la perte des solutions $x=0$ et $y-1=0$, c'est-à-dire $y=1$. De toute évidence, $y=1$ est solution de l'équation (3), alors que $x=0$ ne l'est pas.

2. Les équations de la forme $y' = f(ax + by)$ se ramènent aux équations à variables séparables par substitution de $z = ax + by$ (ou de $z = ax + by + c$, où $c$ est une constante arbitraire).

Résoudre les équations données et construire pour chacune d'elles quelques courbes intégrales. Trouver également les solutions vérifiant les conditions initiales (ceci concerne les problèmes où ces conditions sont énoncées):

51. $xy\, dx + (x+1)\, dy = 0$.

52. $\sqrt{y^2+1}\, dx = xy\, dy$.

53. $(x^2-1)\, y' + 2xy^2 = 0$; $y(0) = 1$.



54. $y' \operatorname{cotg} x + y = 2$; $y(0) = -1$.

55. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$; $y(2) = 0$.

56. $xy' + y = y^2$; $y(1) = 0{,}5$.

57. $2x^2yy' + y^2 = 2$.

58. $y' - xy^2 = 2xy$.

59. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$.

60. $z' = 10^{x+z}$.

61. $x\frac{dx}{dt} + t = 1$.

62. $y' = \cos(y - x)$.

63. $y' - y = 2x - 3$.

64. $(x + 2y)\, y' = 1$; $y(0) = -1$.

65. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

Trouver les solutions des équations satisfaisant aux conditions énoncées pour $x \to +\infty$:

66. $x^2y' - \cos 2y = 1$; $y(+\infty) = 9\pi/4$.

67. $3y^2y' + 16x = 2xy^3$; $y(x)$ est limité pour $x \to +\infty$.

68. Déterminer les trajectoires orthogonales aux courbes des familles suivantes: a) $y = Cx^2$; b) $y = Ce^x$; c) $Cx^2 + y^2 = 1$.

Dans les problèmes ci-dessous, les variables sont séparables, cependant les intégrales obtenues ne s'expriment pas par des fonctions élémentaires. Toutefois, l'étude de leur convergence permet de répondre aux questions posées.

69*. Montrer que chaque courbe intégrale de l'équation $y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}$ possède deux asymptotes horizontales.

70*. Etudier les courbes intégrales de l'équation $y' = \sqrt{\frac{\ln(1+y)}{\sin x}}$ au voisinage de l'origine des coordonnées. Montrer que chaque point de la frontière du premier quadrant est le point de départ d'une seule courbe intégrale comprise dans cet angle.

## § 3. Problèmes géométriques et de physique *)

1. Pour résoudre les problèmes géométriques ci-dessous, il convient de construire le graphique, de désigner la courbe cherchée par $y = y(x)$ (si on résout le problème en coordonnées rectangulaires) et d'exprimer par $x$, $y$ et $y'$ toutes les grandeurs mentionnées dans le problème. Alors, la relation fournie par l'énoncé

*) Tous les problèmes de ce paragraphe se ramènent aux équations à variables séparables. Les problèmes qui conduisent à d'autres types d'équations font l'objet des paragraphes correspondants. Les valeurs de la fonction exponentielle et des logarithmes nécessaires à la résolution des problèmes sont données dans les tables à la fin du recueil.

du problème se transforme en une équation différentielle dont on peut déduire la fonction $y(x)$ cherchée.

2. Pour ce qui est des problèmes de physique, il convient de définir avant tout la grandeur qui sera prise pour variable indépendante, et celle qui sera prise pour fonction inconnue. Ensuite, il faut étudier la variation de la fonction $y$ cherchée par rapport à $\Delta x$, c'est-à-dire exprimer la différence $y(x+\Delta x)-y(x)$ en fonction des grandeurs données. En divisant cette différence par $\Delta x$ et en passant à la limite pour $\Delta x \to 0$, on obtient une équation différentielle dont on peut déduire la fonction cherchée.

La plupart des problèmes renferment des conditions permettant de définir les valeurs des constantes qui figurent dans la solution générale de l'équation différentielle. Celle-ci peut parfois être établie d'une manière plus simple, moyennant la signification physique de la dérivée (si la variable indépendante est le temps $t$, alors $\frac{dy}{dt}$ est la vitesse de variation de $y$).

Dans certains problèmes, l'écriture de l'équation fait intervenir des lois de physique formulées dans le texte qui précède le problème (ou le groupe de problèmes).

E x e m p l e. Une solution aqueuse dont la salinité est de 0,3 kg par litre, se déverse à une vitesse de 2 litres à la minute dans un réservoir contenant 10 litres d'eau. Le mélange s'écoule du réservoir à la même vitesse. Déterminer la quantité de sel que contiendra le réservoir au bout de 5 minutes.

S o l u t i o n. Prenons le temps $t$ pour variable indépendante, et la fonction cherchée $y(t)$ pour quantité de sel contenue dans le réservoir $t$ minutes après le commencement de l'expérience. Cherchons à définir la variation de la quantité de sel dans l'intervalle de temps compris entre $t$ et $t+\Delta t$. Le réservoir se remplit en une minute de 2 litres de solution, et, par conséquent, en $\Delta t$ minutes de $2\Delta t$ litres, lesquels contiennent $0{,}3\cdot 2\Delta t = 0{,}6\Delta t$ kg de sel. D'autre part, pendant le temps $\Delta t$ le réservoir se vide de $2\Delta t$ litres de solution. Dans le réservoir contenant 10 litres d'eau à l'instant $t$ il y a $y(t)$ kg de sel, donc les $2\Delta t$ litres de solution qui s'écoulent contiendraient $0{,}2\Delta t\cdot y(t)$ kg de sel, si la quantité de sel dans le réservoir restait inchangée au bout du temps $\Delta t$. Etant donné que, pour $\Delta t \to 0$, elle change pendant ce temps d'une valeur infiniment petite, on a dans les $2\Delta t$ litres de solution qui s'écoule $0{,}2\Delta t\,(y(t)+\alpha)$ kg de sel, où $\alpha \to 0$, pour $\Delta t \to 0$.

Ainsi, la solution se déversant dans le réservoir dans le temps $(t, t+\Delta t)$ contient $0{,}6\Delta t$ kg de sel, alors que le mélange qui en sort en comprend $0{,}2\Delta t\cdot(y(t)+\alpha)$ kg. L'accroissement de la quantité de sel dans le temps $y(t+\Delta t)-y(t)$ est égal à la différence des grandeurs obtenues, c'est-à-dire:

$$y(t+\Delta t)-y(t)=0{,}6\Delta t-0{,}2\Delta t\cdot(y(t)+\alpha).$$



En divisant par $\Delta t$ et en passant à la limite quand $\Delta t \to 0$, on obtient dans le premier membre la dérivée $y'(t)$ et dans le second $0{,}6-0{,}2y(t)$, car $\alpha \to 0$ pour $\Delta t \to 0$.

On aboutit finalement à une équation différentielle $y'(t) = 0{,}6-0{,}2y(t)$. En intégrant, on trouve

$$y(t)=3-Ce^{-0{,}2t}. \tag{1}$$

Etant donné que, pour $t=0$, le réservoir ne contenait pas de sel, on a donc $y(0)=0$. Portant $t=0$ dans (1), on obtient $y(0) = 3-C$; $0=3-C$; $C=3$, qui, porté dans (1), donne $y(t) = 3-3e^{-0{,}2t}$. Pour $t=5$, la quantité de sel dans le réservoir sera

$$y(5)=3-3e^{-0{,}2\cdot 5}=3-3e^{-1}\approx 1{,}9 \text{ kg}.$$

**71.** Trouver les courbes telles que l'aire du triangle formé par une tangente, l'ordonnée du point de tangence et l'axe des abscisses soit une constante égale à $a^2$.

**72.** Trouver les courbes telles que la somme des côtés du triangle du problème précédent soit une constante égale à $b$.

**73.** Trouver les courbes jouissant de la propriété suivante: la portion de l'axe des abscisses coupée par une tangente et une normale issues d'un point arbitraire de la courbe est égale à $2a$.

**74.** Trouver les courbes telles que l'abscisse du point d'intersection de toute tangente avec l'axe des abscisses soit la moitié de celle du point de tangence.

**75.** Trouver les courbes jouissant de la propriété suivante: si par un point quelconque d'une de ces courbes on mène deux droites parallèles aux axes de coordonnées, alors l'aire du rectangle obtenu est partagée par la courbe dans le rapport 1 : 2.

**76.** Trouver les courbes dont les tangentes en tout point forment des angles égaux avec le rayon et l'axe polaires.

Dans les exercices n$^{os}$ **77** à **79** on supposera que le gaz (ou le fluide) introduit dans un volume, à force de se mélanger, finit par se répartir uniformément dans tout le volume.

**77.** Un réservoir d'une contenance de 20 litres renfermant de l'air (80 % d'azote et 20 % d'oxygène) reçoit 0,1 litre d'azote par seconde. La même quantité de mélange s'écoule du réservoir. Dans combien de temps le réservoir contiendra 99 % d'azote?

**78.** Un réservoir contient une solution de 100 litres d'eau mélangée à 10 kg de sel. L'eau coule dans le réservoir, se mélange à la solution et sort à la même vitesse de 5 litres à la minute. Déterminer la quantité de sel que contiendra le réservoir au bout d'une heure.

79. L'air d'un local de 200 $m^3$ contient 0,15 % de gaz carbonique ($CO_2$). Le ventilateur débite à la minute 20 $m^3$ d'air d'une teneur en $CO_2$ de 0,04 %. En combien de temps la quantité de gaz carbonique dans l'air du local diminuera-t-elle trois fois?

Dans les problèmes **80** à **82** on suppose que la vitesse de refroidissement (ou d'échauffement) du corps est proportionnelle à la différence de température du corps et du milieu ambiant.

80. Un corps chauffé à 100° s'est refroidi en l'espace de 10 minutes jusqu'à 60°. En combien de temps la température du corps baissera-t-elle jusqu'à 25°, si la température ambiante est maintenue à 20°?

81. Un objet en aluminium de 0,5 kg de masse, de chaleur spécifique 0,2, chauffé à 75°, est plongé dans un réservoir contenant un litre d'eau à la température de 20°. Au bout d'une minute la température de l'eau s'élève de 2°. En combien de temps la différence de température de l'objet et de l'eau sera-t-elle de 1°? On négligera les pertes de chaleur dues à l'échauffement du réservoir.

82. Un morceau de métal chauffé à $a$ degrés est placé dans un four dont la température s'élève progressivement de $a$ à $b$ degrés. Quand la différence de température du four et du métal atteint $T$ degrés, la vitesse d'échauffement du métal est de l'ordre de $kT$ degrés à la minute. Déterminer la température du métal au bout d'une heure.

83. Le mouvement d'un canot est freiné par la résistance de l'eau qui est proportionnelle à la vitesse de ce mouvement. Sa vitesse initiale égale à 1,5 m/s devient 1 m/s au bout de 4 secondes. Dans combien de temps diminuera-t-elle jusqu'à 1 cm/s et quelle distance parcourra le canot avant de s'immobiliser?

Dans les problèmes **84** à **86** on utilisera la loi de désintégration radioactive: la quantité de matière radioactive se désintégrant par unité de temps est proportionnelle à la quantité de matière restante.

84. La désintégration de 50 % de matière radioactive s'est produite en 30 jours. Dans combien de temps restera-t-il 1 % de toute la quantité initiale?

85. Selon les expériences, la désintégration annuelle du radium est de l'ordre de 0,44 mg par gramme. En combien d'années la moitié de toute la réserve de radium se désintégrera-t-elle?

86. Un morceau de roche contient 100 mg d'uranium et 14 mg de plomb d'uranium. On sait que l'uranium met $4,5 \cdot 10^9$ années pour se désintégrer à moitié et que la désintégration complète de 238 g d'uranium donne 206 g de plomb. Déterminer l'âge de la roche. On admettra qu'au moment de sa formation elle ne contenait pas de plomb et on négligera la présence de produits radioactifs intermédiaires entre l'uranium et le plomb (car leur désintégration est beaucoup plus rapide que celle de l'uranium).

87. La quantité de lumière absorbée par une faible couche d'eau est proportionnelle à la quantité de lumière incidente et à l'épaisseur de la couche. Une couche d'eau de 35 cm d'épaisseur absorbe la moitié de la lumière incidente. On demande de trouver la quantité de lumière qu'absorbera une couche d'eau de 2 m d'épaisseur.

Pour écrire l'équation différentielle dans les problèmes **88** à **90** il est plus commode de prendre la vitesse comme fonction inconnue, en admettant l'accélération de la force de pesanteur égale à 10 $m/s^2$.

88. Un parachutiste a sauté d'une hauteur de 1,5 km et n'a ouvert son parachute qu'à 0,5 km du sol. Calculer la durée de sa chute avant l'ouverture du parachute. On sait que la vitesse maximale de chute de l'homme en l'air de densité normale est de 50 m/s. On négligera la variation de la densité avec la hauteur. La résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse.

89. Un ballon de football de 0,4 kgf est lancé en l'air verticalement avec une vitesse de 20 m/s. La résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse et égale à 0,48 gf lorsque la vitesse est de 1 m/s. Calculer la durée d'ascension du ballon et la hauteur maximale qu'il atteint. Comment changeront ces dernières si l'on néglige la résistance de l'air?

90. Calculer la durée de chute du ballon, sans vitesse initiale, d'une hauteur de 16,3 m en tenant compte de la résistance de l'air (cf. problème n° **89**). Déterminer sa vitesse en fin de chute.

Dans les problèmes nos **91** à **95**, on admettra que le fluide s'écoule du réservoir à une vitesse de $0,6\sqrt{2gh}$, où $g = 10$ $m/s^2$ est l'accélération de la force de pesanteur et $h$ la hauteur du niveau d'eau au-dessus de l'orifice.

91. Combien de temps l'eau, contenue dans un réservoir de diamètre $2R = 1,8$ m et de hauteur $H = 2,45$ m, mettra-t-elle à s'échapper par un orifice de $2r = 2$ cm de diamètre pratiqué à son fond? L'axe du cylindre est vertical.

92. Résoudre le problème précédent en supposant l'axe du cylindre horizontal, l'orifice pratiqué dans la partie la plus basse du cylindre.





2—01173

93. Un réservoir cylindrique posé verticalement est rempli d'eau. Par un orifice pratiqué à la base, le réservoir se vide de la moitié de son eau au bout de 5 minutes. En combien de temps se videra-t-il complètement?

94. Un entonnoir de forme conique, de rayon $R = 6$ cm et de hauteur $H = 10$ cm est rempli d'eau. Combien de temps mettra-t-il à se vider si son orifice a 0,5 cm de diamètre?

95. Soit un réservoir parallélépipédique de base 60 cm $\times$ $\times$ 75 cm et de hauteur 80 cm qu'on remplit d'eau à un débit de 1,8 litres par seconde. Un orifice de 2,5 cm² est pratiqué à sa base. En combien de temps sera-t-il plein d'eau? Comparer la réponse avec le temps de remplissage du même réservoir sans orifice au fond.

96. Une corde en caoutchouc longue de 1 m s'allonge de $kf$ mètres sous l'action d'une force de $f$ kgf. Déterminer l'allongement d'une autre corde de longueur $l$ et de poids $P$ sous l'action de son propre poids, si elle est suspendue par l'une de ses extrémités.

97. Déterminer la pression atmosphérique à l'altitude $h$, étant donné qu'à la surface terrestre elle est de l'ordre de 1 kgf/cm² et que la densité de l'air est de 0,0012 g/cm³. Appliquer la loi de Boyle-Mariotte suivant laquelle la densité est proportionnelle à la pression (c'est-à-dire négliger la variation de la température avec l'altitude).

98. Pour retenir en place un bateau on fixe une amarre, en la tournant sur un taquet. Calculer la force qui freine le bateau lorsque l'amarre a fait trois tours de taquet, en sachant que le coefficient de frottement de l'amarre sur le taquet est égal à 1/3 et que l'on tire l'amarre par son extrémité avec une force de 10 kgf.

99. Un réservoir ouvert, plein d'eau, se trouve dans un local fermé de $v$ m³. La vitesse d'évaporation de l'eau est proportionnelle à la différence entre la quantité $q_1$ de vapeur d'eau saturant 1 $m^3$ d'air à la température donnée et la quantité $q$ de vapeur d'eau contenue dans l'air au moment donné (on admet que la température de l'air et de l'eau, ainsi que la grandeur de l'aire dont elle s'évapore restent inchangées). Au début, le réservoir contenait $m_0$ grammes d'eau, alors que 1 m³ d'air, $q_0$ grammes de vapeur. Combien d'eau restera-t-il dans le réservoir au bout d'un temps $t$?

100. La masse d'une fusée avec combustible est égale à $M$ et sans combustible à $m$, la vitesse d'échappement des produits de combustion est égale à $c$, la vitesse initiale de la fusée est nulle. Trouver la vitesse de la fusée en fin de combustion, en négligeant la force de pesanteur et la résistance de l'air (formule de Tsiolkovski).



## § 4. Equations homogènes

1. Les équations homogènes peuvent s'écrire sous la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ou encore $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, où $M(x, y)$ et $N(x, y)$ sont des fonctions homogènes de même ordre *). Pour résoudre une équation homogène, on peut substituer $y = tx$ et obtenir ainsi une équation à variables séparables.

Exemple. Résoudre l'équation $x\,dy = (x + y)\,dx$.

Cette équation est homogène. Posons $y = tx$, alors $dy = t\,dx + x\,dt$; portant dans l'équation, il vient:

$$x(x\,dt + t\,dx) = (x + tx)\,dx; \quad x\,dt = dx.$$

Résolvons l'équation trouvée à variables séparables:

$$dt = \frac{dx}{x}; \quad t = \ln|x| + C.$$

En revenant à la variable $y$, on obtient $y = x(\ln|x| + C)$. Il existe encore une solution $x = 0$ qu'on avait perdue en divisant par $x$.

2. L'équation de la forme $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$ se ramène à une équation homogène par déplacement de l'origine des coordonnées au point d'intersection des droites $ax + by + c = 0$ et $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Si, d'autre part, ces droites ne se coupent pas, alors $a_1x + b_1y = k(ax + by)$ et, par conséquent, l'équation prend la forme $y' = F(ax + by)$ et se ramène à une équation à variables séparables par substitution de $z = ax + by$ (ou $z = ax + by + c$) (cf. § 2, point 2).

3. Certaines équations peuvent être rendues homogènes par substitution de $y = z^m$, où $m$ est en général inconnu. On le trouve en substituant $y = z^m$. Exigeant l'homogénéité de l'équation, recherchons le nombre $m$, si cela est possible. Dans le cas contraire, l'équation ne se ramène pas, par cette méthode, à une équation homogène.

Exemple. Soit donnée une équation $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$. La substitution de $y = z^m$ la mettra sous la forme $2mx^4z^{2m-1}z' + z^{4m} = 4x^6$. Cette équation ne sera homogène que si les puissances de tous ses termes sont les mêmes, c'est-à-dire $4 + (2m - 1) = 4m = 6$. Ces égalités sont vérifiées simultanément à condition que $m = 3/2$. Par conséquent, l'équation peut se ramener à une équation homogène par substitution de $y = z^{3/2}$.

*) La fonction $M(x, y)$ est dite homogène du $n$-ième ordre, si, pour tous les $k > 0$, on a $M(kx, ky) = k^n M(x, y)$.

Résoudre les équations:

**101.** $(x+2y)\,dx - x\,dy = 0.$

**102.** $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0.$

**103.** $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0.$

**104.** $2x^3y' = y(2x^2 - y^2).$

**105.** $y^2 + x^2y' = xyy'.$

**106.** $(x^2 + y^2)\,y' = 2xy.$

**107.** $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

**108.** $xy' = y - xe^{y/x}.$

**109.** $xy' - y = (x+y)\ln \frac{x+y}{x}.$

**110.** $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}.$

**111.** $(y + \sqrt{xy})\,dx = x\,dy.$

**112.** $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$

**113.** $(2x - 4y + 6)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0.$

**114.** $(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0.$

**115.** $x - y - 1 + (y - x + 2)\,y' = 0.$

**116.** $(x + 4y)\,y' = 2x + 3y - 5.$

**117.** $(y + 2)\,dx = (2x + y - 4)\,dy.$

**118.** $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

**119.** $(y'+1)\ln\frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}.$

**120.** $y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\frac{y-2x}{x+1}.$

**121.** $x^3(y' - x) = y^2.$

**122.** $2x^2y' = y^3 + xy.$

**123.** $2x\,dy + (x^2y^4 + 1)\,y\,dx = 0.$

**124.** $y\,dx + x(2xy + 1)\,dy = 0.$

**125.** $2y' + x = 4\sqrt{y}.$

**126.** $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}.$

**127.** $2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}.$

**128.** $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2.$

**129.** $2y + (x^2y + 1)\,xy' = 0.$

**130.** Trouver les trajectoires coupant les courbes d'une famille donnée sous un angle de 45°, en comptant l'angle formé par la tangente à la courbe et la tangente à la trajectoire dans le sens des valeurs négatives:

a) $y = x \ln Cx$; b) $(x - 3y)^4 = Cxy^6$.

**131.** Trouver une courbe telle que le point d'intersection de toute tangente avec l'axe d'abscisses soit situé à égale distance du point de tangence et de l'origine des coordonnées.

**132.** Trouver une courbe telle que la distance de toute tangente à l'origine des coordonnées soit égale à l'abscisse du point de tangence.



**133.** Trouver les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ pour lesquelles l'équation $y' = ax^\alpha + by^\beta$ se ramène à une équation homogène par substitution de $y = z^m$.

**134*.** Soit $k_0$ la racine de l'équation $f(k) = k$. Montrer que:

1) si $f'(k_0) < 1$, aucune solution de l'équation $y' = f(y/x)$ n'est tangente à la solution $y = k_0x$ à l'origine des coordonnées;

2) si $f'(k_0) > 1$, il existe une infinité de solutions tangentes à cette solution.

**135.** Tracer approximativement les courbes intégrales des équations suivantes (sans les résoudre):

a) $y' = \frac{y(2y-x)}{x^2}$; b) $y' = \frac{2y^2 - x^2}{xy}$;

c) $y' = \frac{2y^3 - x^2y}{2x^2y - x^3}$; d*) $xy' = y + \sqrt{y^2 + \frac{y^3}{x}}$.

I n d i c a t i o n. La tangente de l'angle entre le rayon $y = kx$ et la courbe intégrale de l'équation $y' = f(y/x)$ qui le coupe est égale à $(f(k) - k)/(1 + kf(k))$ (pourquoi?). Pour la construction approchée des courbes intégrales, il faut étudier le signe de cette fraction en fonction de $k$.

## § 5. Equations linéaires du premier ordre

1. L'équation

$$y' + a(x)\,y = b(x) \tag{1}$$

est dite linéaire. Pour la résoudre, il faut d'abord intégrer l'équation

$$y' + a(x)\,y = 0 \tag{2}$$

(par séparation des variables, cf. § 2), remplacer ensuite, dans la solution générale de (2) la constante arbitraire $C$ par la fonction inconnue $C(x)$, et, enfin, porter l'expression de $y$ obtenue dans l'équation (1) et trouver la fonction $C(x)$.

2. Certaines équations deviennent linéaires lorsqu'on permute la fonction cherchée et la variable indépendante. Par exemple, l'équation $y = (2x + y^3)\,y'$, où $y$ est fonction de $x$, n'est pas linéaire. Ecrivons-la en différentielles: $y\,dx - (2x + y^3)\,dy = 0$. Vu que $x$ et $dx$ figurent linéairement dans l'équation, celle-ci est donc linéaire, si l'on prend $x$ pour fonction cherchée et $y$ pour variable indépendante. Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}\,x = y^2$$

et se résoudre comme l'équation (1).

1201. $z\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$; $x+y=2$, $yz=1$.

1202. $z\frac{\partial z}{\partial x}+(z^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial y}+x=0$; $y=x^2$, $z=2x$.

1203. $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$; $z-y=-x$.

1204. $x\frac{\partial z}{\partial x}+(xz+y)\frac{\partial z}{\partial y}=z$; $x+y=2z$, $xz=1$.

1205. $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0$; $x-y=0$, $x-yz=1$.

1206. $x\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=y$; $y=2z$, $x+2y=z$.

1207. $(y+2z^2)\frac{\partial z}{\partial x}-2x^2\frac{\partial z}{\partial y}=x^2z$; $x=z$, $y=x^2$.

1208. $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial z}{\partial y}=2z$; $x-y=2$, $z+2x=1$.

1209. $xy^3\frac{\partial z}{\partial x}+x^2z^2\frac{\partial z}{\partial y}=y^3z$; $x=-z^3$, $y=z^2$.

1210*. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2xy$; $y=x$, $z=x^2$.

**1211.** Trouver l'équation générale des surfaces coupant sous un angle droit les surfaces de la famille

$$z^2=Cxy.$$

**1212.** Trouver la surface passant par la droite

$$y=x,\quad z=1$$

et orthogonale aux surfaces

$$x^2+y^2+z^2=Cx.$$

**1213.** Ecrire l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les surfaces cylindriques de génératrices parallèles au vecteur $(a,\ b,\ c)$. Trouver la solution générale de cette équation.

**1214.** En appliquant le résultat du problème précédent, trouver l'équation de la surface cylindrique de génératrices parallèles au vecteur $(1,\ -1,\ 1)$ et à la directrice

$$x+y+z=0,\quad x^2+xy+y^2=1.$$

**1215.** Ecrire l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont toutes les coniques de sommet situé en un point donné $(a,\ b,\ c)$. Résoudre cette équation.

**1216.** Trouver les surfaces dont tout plan tangent coupe l'axe $Ox$ en un point dont l'abscisse est la moitié de celle du point de tangence.



Résoudre les systèmes d'équations:

**1217.** $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x},\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2z}{y}.\end{cases}$ **1218.** $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=y-z,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=xz.\end{cases}$

**1219.** $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2yz-z^2,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=xz.\end{cases}$

Trouver les surfaces vérifiant les équations de Pfaff:

**1220.** $(x-y)\,dx+z\,dy-x\,dz=0$.

**1221.** $3yz\,dx+2xz\,dy+xy\,dz=0$.

**1222.** $(z+xy)\,dx-(z+y^2)\,dy+y\,dz=0$.

**1223.** $(2yz+3x)\,dx+xz\,dy+xy\,dz=0$.

## Réponses

**15.** $f(x,y)=0$; $f'_x<0$ (max), $f'_x>0$ (min). **16.** a) $y=x^2+2x$; b) $x=2\operatorname{ch}y$; c) $xy^3=-(1-x^2)^2$; $y=0$; d) $f'_x+f\cdot f'_y=0$. **17.** $y=e^{xy'/y}$. **18.** $y'=3y^{2/3}$. **19.** $xy'=3y$. **20.** $y^2+y'^2=1$. **21.** $x^2y'-xy=yy'$. **22.** $2xyy'-y^2=2x^3$. **23.** $y'^3=4y(xy'-2y)$. **24.** $y'=\cos\frac{x\sqrt{1-y'^2}}{y}$. **25.** $x(x-2)y''-(x^2-2)y'+2(x-1)y=0$. **26.** $(yy''+y'^2)^2=-y^3y''$. **27.** $y''y^2(\ln y-1)=y'^2(xy'-y)$. **28.** $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$. **29.** $y'''y'=3y''^2$. **30.** $(y-2x)^2(y'^2+1)=(2y'^2+1)^2$. **31.** $xy'^2=y(2y'-1)$. **32.** $(xy'-y)^2=2xy(y'^2+1)$. **33.** $x^2y''-2xy'+2y=0$. **34.** $(y''y+y'^2+1)^2=(y'^2+1)^3$. **35.** $yy'+zz'=0$, $y^2+2xzz'=x^2z'^2$. **36.** $x^2+y^2=z^2-2z(y-xy')$; $x+yy'=zz'-z'(y-xy')$. **37.** $4yy'=-x$. **38.** $y'=-2y$. **39.** $(x^2+y)y'=-x$. **40.** $(x+y)y'=y-x$; $(x-y)y'=x+y$. **41.** $(x\mp y\sqrt{3})y'=y\pm x\sqrt{3}$. **42.** $(3x\mp y\sqrt{3})y'=y\pm 3x\sqrt{3}$. **43.** $(2x\mp y\sqrt{3})y'=y\pm 2x\sqrt{3}$. **44.** $r'\sin\theta=r^2$. **45.** $r'=\frac{1}{2}r\operatorname{cotg}\theta$. **46.** $r'=r\operatorname{cotg}(\theta\pm 45^\circ)$. **47.** $(x+2y)y'=-3x-y$; $(3x+2y)y'=y-x$. **48.** $y'[2xy\pm(x^2-y^2)]=y^2-x^2\pm 2xy$. **49.** $x(1+y'^2)=-2yy'$. **50.** $yy'^3+xy'^2=-1$. **51.** $y=C(x+1)e^{-x}$; $x=-1$. **52.** $\ln|x|=C+\sqrt{y^2+1}$; $x=0$. **53.** $y(\ln|x^2-1|+C)=1$, $y=0$; $y[\ln(1-x^2)+1]=1$. **54.** $y=2+C\cos x$; $y=2-3\cos x$. **55.** $y=(x-C)^3$; $y=0$; $y=(x-2)^3$; $y=0$. **56.** $y(1-Cx)=1$; $y=0$; $y(1+x)=1$. **57.** $y^2-2=Ce^{1/x}$. **58.** $(Ce^{-x^2}-1)y=2$; $y=0$. **59.** $e^{-s}=1+Ce^t$. **60.** $z=-\lg(C-10^x)$. **61.** $x^2+t^2-2t=C$.

**62.** $\operatorname{cotg}\frac{y-x}{2}=x+C$; $y-x=2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **63.** $2x+y-1=Ce^x$. **64.** $x+2y+2=Ce^y$; $x+2y+2=0$. **65.** $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2)=x+C$. **66.** $y=\operatorname{arc\,tg}\left(1-\frac{2}{x}\right)+2\pi$. **67.** $y=2$. **68.** a) $2y^2+x^2=C$; b) $y^2+2x=C$; c) $y^2=Ce^{x^2+y^2}$. **71.** $(C\pm x)y=2a^2$. **72.** $b\ln y-y=\pm x+C$, $0<y<b$. **73.** $a\ln(a\pm\sqrt{a^2-y^2})\mp\sqrt{a^2-y^2}=x+C$. **74.** $y=Cx^2$. **75.** $y=Cx^2$; $y^2=Cx$. **76.** $r(1\pm\cos\varphi)=C$. **77.** La quantité d'azote (en litres) est $x(t)=20-4e^{-t/200}$; $x(t)=19{,}8$ pour $t=200\ln 20\approx 600$ s $=10$ mn. **78.** La quantité de sel est $x(t)=10e^{-t/20}$; $x(60)=10e^{-3}\approx 0{,}5$ kg. **79.** Le volume de $CO_2$ (en $m^3$) est $x(t)=0{,}08+0{,}22e^{-t/10}$; $x(t)=0{,}1$ pour $t=10\ln 11\approx 24$ mn. **80.** La température du corps est $x(t)=20+80\cdot 2^{-t/10}$; $x(t)=25$ pour $t=40$ mn. **81.** La différence des températures de l'eau et du corps est $x(t)=55\cdot(3/5)^t$; $x(t)=1$ pour $t=\ln 55/(\ln 5-\ln 3)\approx 8$ mn. **82.** La température du métal est $x(t)=a+\frac{b-a}{60}\left(t-\frac{1-e^{-kt}}{k}\right)$; $x(60)=b-\frac{b-a}{60k}\times(1-e^{-60k})$. **83.** La vitesse (en m/s) est $v(t)=(2/3)^{(t/4)-1}$; $v(t)=0{,}01$ pour $t=4\left(\frac{2}{\lg 1{,}5}+1\right)\approx 50$ s; la distance est $s=\frac{6}{\ln 1{,}5}\approx 15$ m. **84.** La quantité de matière restante est $x(t)=x(0)\cdot 2^{-t/30}$; $x(t)=0{,}01x(0)$ pour $t=60/\lg 2\approx 200$ jours. **85.** La quantité restante de radium est $x(t)=x(0)\cdot(1-0{,}00044)^t$; $x(t)=\frac{1}{2}x(0)$ pour $t=\ln 0{,}5/\ln(1-0{,}00044)\approx 1600$ années. **86.** La quantité d'uranium est $x(t)=x(0)e^{-\alpha t}$, $\alpha=\ln 2/4{,}5\cdot 10^9$; $x(t)=100$, $x(0)=100+14\cdot\frac{228}{206}=116{,}2$; $t=4{,}5\cdot 10^9\cdot\frac{\lg 1{,}162}{\lg 2}\approx 970\cdot 10^6$ années. **87.** La quantité de lumière traversant une couche de $x$ cm est $y(x)=y(0)\cdot 2^{-t/35}$; $y(200)=y(0)\cdot 2^{-40/7}\approx 0{,}02y(0)$; la quantité absorbée est $100\%-2\%=98\%$. **88.** La vitesse est $v(t)=50\operatorname{th}\frac{t}{5}$, la distance (en mètres) est $s(t)=250\ln\operatorname{ch}\frac{t}{5}$; $s(t)=1000$ pour $\operatorname{ch}\frac{t}{5}=e^4$, $t\approx 5(4+\ln 2)\approx 23$ s. **89.** La vitesse est $v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}\operatorname{tg}\sqrt{kg}(C-t)$, $g=10$, $k=0{,}012$, $C=\frac{1}{\sqrt{kg}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{k}{g}}v(0)\approx 1{,}75$; $v(t)=0$ pour $t=C\approx 1{,}75$ s; la hauteur maximale est $h=\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{k}{g}v^2(0)+1\right)\approx 16{,}3$ m (sans résistance de l'air $t=2$ s, $h=20$ m). **90.** La vitesse est $v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}\operatorname{th}\sqrt{kg}\,t$, la distance est $s(t)=\frac{1}{k}\ln\operatorname{ch}\sqrt{kg}\,t$; $s(t)=$



$=h=16{,}3$ m pour $t=\frac{1}{\sqrt{kg}}\ln(e^{kh}+\sqrt{e^{2kh}-1})\approx 1{,}87$ s, $v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}(1-e^{-2kh})}\approx 16{,}4$ m/s. **91.** La hauteur du niveau d'eau est $h(t)$; $\sqrt{H}-\sqrt{h}=0{,}3\sqrt{2g}\frac{r^2}{R^2}t$; $h(t)=0$ pour $t=\frac{R^2}{0{,}3r^2}\times\sqrt{\frac{H}{2g}}\approx 1050$ s $=17{,}5$ mn. **92.** $(2R-h(t))^{3/2}=0{,}45\pi r^2\times\sqrt{2g}\frac{t}{H}$, $h(t)=0$ pour $t=\frac{2RH}{0{,}45\pi r^2}\sqrt{\frac{g}{R}}\approx 1040$ s. **93.** $\sqrt{H}-\sqrt{h(t)}=kt$, $k=\frac{\sqrt{H}}{5}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $h(t)=0$ pour $t=5(2+\sqrt{2})\approx 17$ mn. **94.** $H^{5/2}-[h(t)]^{5/2}=\frac{3d^2H^2t}{8R^2}\sqrt{2g}$; $h(t)=0$ pour $t=(4R^2/3d^2)\sqrt{2H/g}\approx 27$ s. **95.** La quantité d'eau (en litres) dans le réservoir est $x(t)$; $t=\frac{2q}{a^2}\ln\frac{q}{q-a\sqrt{x}}-\frac{2}{a}\sqrt{x}$, $q=1{,}8$, $a=10^{-3/2}$; $x(t)=360$ pour $t=260$ s (pour un réservoir sans orifice au fond $t=200$ s). **96.** L'allongement du bas de la corde de longueur $x$ est $y(x)=\frac{kPx^2}{2l}$, celui de toute la corde est $y(l)=\frac{kPl}{2}$. **97.** A la hauteur de $h$ km la pression atmosphérique est $p(h)=e^{-0{,}12h}$ ($kgf/cm^2$). **98.** La force de tension de l'amarre à une distance $\varphi$ (mesurée en radians) suivant l'arc à partir du point initial est $f(\varphi)=f(0)e^{\varphi/3}$; $f(6\pi)=10e^{2\pi}\approx 5000$ kgf. **99.** La quantité d'eau restante est $m(t)=m_0-v(q_1-q_0)\left(1-e^{-\frac{k}{v}t}\right)$, $k$ est le coefficient de proportionnalité. **100.** La combustion d'une masse $x$ de combustible imprime à la fusée une vitesse $v(x)=c\ln\frac{M}{M-x}$; $v(M-m)=c\ln\frac{M}{m}$. **101.** $x+y=Cx^2$; $x=0$. **102.** $\ln(x^2+y^2)=C-2\operatorname{arc\,tg}(y/x)$. **103.** $x(y-x)=Cy$; $y=0$. **104.** $x=\pm y\sqrt{\ln Cx}$; $y=0$. **105.** $y=Ce^{y/x}$. **106.** $y^2-x^2=Cy$, $y=0$. **107.** $\sin\frac{y}{x}=Cx$. **108.** $y=-x\ln\ln Cx$. **109.** $\ln\frac{x+y}{x}=Cx$. **110.** $\ln Cx=\operatorname{cotg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$; $y=xe^{2\pi k}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **111.** $x\ln Cx=2\sqrt{xy}$; $y=0$; $x=0$. **112.** $\arcsin\frac{y}{x}=\ln Cx\cdot\operatorname{sign}x$; $y=\pm x$. **113.** $(y-2x)^3=C(y-x-1)^2$; $y=x+1$. **114.** $2x+y-1=Ce^{2y-x}$. **115.** $(y-x+2)^2+2x=C$. **116.** $(y-x+5)^5\times(x+2y-2)=C$. **117.** $(y+2)^2=C(x+y-1)$; $y=1-x$. **118.** $y+2=Ce^{-2\operatorname{arc\,tg}\frac{y+2}{x-3}}$. **119.** $\ln\frac{y+x}{x+3}=1+\frac{C}{x+y}$. **120.** $\sin\frac{y-2x}{x+1}=C(x+1)$. **121.** $x^2=(x^2-y)\ln Cx$; $y=x^2$. **122.** $x=-y^2\ln Cx$; $y=0$. **123.** $x^2y^4\ln Cx^2=1$; $y=0$; $x=0$. **124.** $y^2e^{-1/xy}=C$; $y=0$;

$x=0$. **125.** $(2\sqrt{y}-x)\ln C(2\sqrt{y}-x)=x$; $2\sqrt{y}=x$. **126.** $1-xy=Cx^3(2+xy)$; $xy=-2$. **127.** $2\sqrt{(1/xy^2)-1}=-\ln Cx$; $xy^2=1$; $y=0$. **128.** $\arcsin \frac{y^2}{|x^3|}=\ln Cx^3$; $|x^3|=y^2$. **129.** $x^2y\ln Cy=1$; $y=0$. **130.** a) $y^2=C(x+y)$; $y=-x$; b) $(y+x)^2(y-2x)^4=C(y-x)^3$; $y=x$. **131.** $y=C(x^2+y^2)$. **132.** $x^2+y^2=Cx$. **133.** Pour $\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=1$. **136.** $y=Cx^2+x^4$. **137.** $y=(2x+1)\times(C+\ln|2x+1|)+1$. **138.** $y=\sin x+C\cos x$. **139.** $y=e^x\times(\ln|x|+C)$; $x=0$. **140.** $xy=C-\ln|x|$. **141.** $y=x(C+\sin x)$. **142.** $y=Ce^{x^2}-x^2-1$. **143.** $y+C\ln^2 x-\ln x$. **144.** $xy=(x^3+C)e^{-x}$. **145.** $x=y^2+Cy$; $y=0$. **146.** $x=e^y+Ce^{-y}$. **147.** $x=(C-\cos y)\times\sin y$. **148.** $x=2\ln y-y+1+Cy^2$. **149.** $x=Cy^3+y^2$; $y=0$. **150.** $(y-1)^2x=y-\ln Cy$; $y=0$; $y=1$. **151.** $y(e^x+Ce^{2x})=1$; $y=0$. **152.** $y(x+1)(\ln|x+1|+C)=1$; $y=0$. **153.** $y^{-3}=C\cos^3 x-3\sin x\cos^2 x$; $y=0$. **154.** $y^3=Cx^3-3x^2$. **155.** $y^2=Cx^2-2x$; $x=0$. **156.** $y=x^4\ln^2 Cx$; $y=0$. **157.** $y^{-2}=x^4(2e^x+C)$; $y=0$. **158.** $y^2=x^2-1+C\sqrt{|x^2-1|}$. **159.** $x^2(C-\cos y)=y$; $y=0$. **160.** $xy(C-\ln^2 y)=1$. **161.** $x^2=Ce^{2y}+2y$. **162.** $y^2=C(x+1)^2-2(x+1)$. **163.** $e^{-y}=Cx^2+x$. **164.** $\cos y=(x^2-1)\ln C(x^2-1)$. **165.** $y=2e^x-1$. **166.** $y=-2e^x$. **167.** $y=\frac{2}{x}+\frac{4}{Cx^5-x}$; $y=\frac{2}{x}$. **168.** $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{Cx^{2/3}+x}$; $y=\frac{1}{x}$. **169.** $y=x+\frac{x}{x+C}$; $y=x$. **170.** $y=x+2+\frac{4}{Ce^{4x}-1}$; $y=x+2$. **171.** $y=e^x-\frac{1}{x+C}$; $y=e^x$. **172.** $3x=C\sqrt{|y|}-y^2$; $y=0$. **173.** $xy=Cx^3+2a^2$. **174.** $xy=a^2+Cy^2$. **175.** Dans 20 m; 3,68 kgf. **176.** Dans 62 jours. **177.** $y=y_1+C(y_2-y_1)$. **178.** $y=\operatorname{tg} x-\sec x$. **179.** $b/a$. **180.** $b/a$. **181.** $x(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} e^{s-t}f(s)\,ds=\int\limits_{-\infty}^{0} e^{z}f(z+t)\,dz$. **182.** $y(x)=x\int\limits_{+\infty}^{x} e^{x^2-t^2}\,dt\to-\frac{1}{2}$ pour $x\to+\infty$. **183.** $y(x)=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-s-\sin s\cdot\cos(s+2x)}\times\sin(x+s)\,ds$. **186.** $3x^2y-y^3=C$. **187.** $x^2-3x^3y^2+y^4=C$. **188.** $xe^{-y}-y^2=C$. **189.** $4y\ln x+y^4=C$. **190.** $x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=C$. **191.** $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}=C$. **192.** $x-y^2\cos^2 x=C$. **193.** $x^3+x^3\ln y-y^2=C$. **194.** $x^2+1=2(C-2x)\sin y$. **195.** $2x+\ln(x^2+y^2)=C$. **196.** $x+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}=C$. **197.** $\sqrt{1+y^2}=xy+C$. **198.** $2x^3y^3-3x^2=C$. **199.** $y^2=x^2(C-2y)$; $x=0$. **200.** $(x^2-C)y=2x$. **201.** $x^2+\ln y=Cx^3$; $x=0$. **202.** $y\sin xy=C$. **203.** $\frac{x^2}{2}+xy+\ln|y|=C$; $y=0$. **204.** $-x+1=xy(\operatorname{arc\,tg} y+C)$; $x=0$; $y=0$.



**205.** $x+2\ln|x|+\frac{3}{2}y^2-\frac{y}{x}=C$; $x=0$. **206.** $\sin\frac{y}{x}=Ce^{-x^2}$. **207.** $\ln|y|-ye^{-x}=C$; $y=0$. **208.** $\ln\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)=2y+C$; $y=0$. **209.** $x^2y\ln Cxy=-1$; $x=0$; $y=0$. **210.** $x^2+y^2=y+Cx$; $x=0$. **211.** $x^2y+\ln|x/y|=C$; $x=0$; $y=0$. **212.** $2xy^2+(1/xy)=C$; $x=0$; $y=0$. **213.** $\ln\left|\frac{x+y}{y}\right|+\frac{y(1+x)}{x+y}=C$; $y=0$; $y=-x$. **214.** $\sin^2 y=Cx-x^2$; $x=0$. **215.** $y=C\ln x^2y$. **216.** $\sin y=-(x^2+1)\ln C(x^2+1)$. **217.** $xy(C-x^2-y^2)=1$; $x=0$; $y=0$. **218.** $y^2=Cx^2e^{x^2y^2}$. **219.** $x\sqrt{1+(y^2/x^2)}+\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+(y^2/x^2)}\right)=C$; $x=0$. **220.** $x^3-4y^2=Cy\sqrt[3]{xy}$; $x=0$; $y=0$. **221.** a) $y_0=0$, $y_1=x^2/2$, $y_2=(x^2/2)-(x^5/20)$. b) $y_0=1$, $y_1=x^3$, $y_2=1+x^3-x+(x^7-1)/7$. c) $y_0=1$, $y_1=1+2x$, $y_2=\frac{1}{2}(e^{2x}+1)+x+x^2$. d) $y_0=2\pi$, $y_1=\pi+x$, $y_2=2\pi+x+x\cos x-\sin x$. **222.** a) $y_0=1$, $z_0=0$; $y_1=x^2$, $z_1=x-1$; $y_2=x^2+(x-1)^2/2$, $z_2=(x^3-1)/3$. b) $x_0=1$, $y_0=2$; $x_1=1+2t$, $y_1=2+t$; $x_2=1+2t+(t^2/2)$, $y_2=2+t+2t^2+(4/3)t^3$ c) $y_0=1$, $y_1=1$, $y_2=1+x^2$. d) $x_0=2$, $x_1=3-t$, $x_2=5-4t+t^3$. **223.** a) $-0{,}5\leqslant x\leqslant 0{,}5$. b) $0{,}87\leqslant x\leqslant 1{,}13$. c) $0{,}8\leqslant t\leqslant 1{,}2$. d) $-0{,}1\leqslant t\leqslant 0{,}1$. **224.** $y_3=\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}-\frac{x^{11}}{4400}$, $|y-y_3|<0{,}00003$. **225.** a) Tout le plan. b) $y\neq 2x$. c) $x\neq 2$, $y>0$. d) $y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ e) $x>0$, $y\neq x$. f) $x\neq 0$, $|y|>|x|$. **226.** Pour $0<a<1$ aux points de l'axe $Ox$. **228.** a) $x_0$ et $y'_0$ sont quelconques, $y_0\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ b) $x_0\neq -1$, $y_0>0$, $y'_0$ est quelconque. c) $x_0\neq y_0$, $x_0y_0>0$, $y'_0\neq 0$, $y''_0$ est quelconque. d) $x_0\neq y'_0$, $y_0\neq 0$, $y''_0$ est quelconque. e) $t_0$ et $y_0$ sont quelconques, $x_0\neq 0$. f) $t_0>-1$, $x_0\neq 0$, $y_0\neq t_0$. **229.** a) Non. b) Oui. **230.** a) Non. b) Non. c) Oui. **231.** Pas de solutions pour $n=1$, une solution pour $n=2$, une infinité de solutions pour $n=3$. **232.** Pas de solutions pour $n=1$, lorsque $\operatorname{tg}\alpha\neq f(x_0, y_0)$, une solution lorsque $\operatorname{tg}\alpha=f(x_0, y_0)$; une solution pour $n=2$, une infinité de solutions pour $n\geqslant 3$. **233.** $n\geqslant 5$. **234.** $n\geqslant 4$. **236.** a) 3. b) 2. c) 4. d) 4. e) 3. f) 1. **237.** a) $0\leqslant a\leqslant 1$. b) $a\leqslant\frac{1}{2}$. c) $1\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$. d) $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 0$. **241.** $y=Ce^{\pm x}$. **242.** $y^2=(x+C)^3$; $y=0$. **243.** $y+x=(x+C)^3$; $y=-x$. **244.** $(x+C)^2+y^2=1$; $y=\pm 1$. **245.** $y(x+C)^2=1$; $y=0$. **246.** $y[1+(x-C)^2]=1$; $y=0$; $y=1$. **247.** $(y-x)^2=2C(x+y)-C^2$; $y=0$. **248.** $(x-1)^{4/3}+y^{4/3}=C$. **249.** $4y=(x+C)^2$; $y=Ce^x$. **250.** $y^2(1-y)=(x+C)^2$; $y=1$. **251.** $y=Ce^x$; $y=Ce^{-x}+x-1$. **252.** $x^2y=C$; $y=Cx$. **253.** $x^2+C^2=2Cy$; $y=\pm x$. **254.** $(x+C)^2=4Cy$; $y=0$; $y=x$. **255.** $\ln|1\pm 2\sqrt{2y-x}|=$