

Introduction aux systèmes dynamiques et à la modélisation

Alexei PANTCHICHKINE

Institut Fourier, Université Grenoble-1
B.P.74, 38402 St.-Martin d'Hères, FRANCE
e-mail : panchish@mozart.ujf-grenoble.fr, FAX : 33 (0) 4 76 51 44 78

Un cours de Licence MAT127 (Mathématiques pour les biologistes de 2e semestre 2006/2007)

Résumé

Le présent cours est inspiré par le cours "Mathématiques en DEUG SV 2ème année" de Prof. Yves Colin de Verdière, voir [YCV].

Nous utilisons comme prérequis le cours MAT110c ("Apprentissage du raisonnement et analyse élémentaire" de Prof. Hervé Pajot, voir [Pajot]) : fondements (raisonnements, ensembles, nombres, dénombrements) ; analyse : étude des fonctions (fonctions continues, dérivables, théorème des accroissements finis, fonctions usuelles, fonctions réciproques) ; calcul intégral (Intégrale d'une fonction, primitives).

En particulier, on développe plus en détail la géométrie en dimension 2 et 3, l'algèbre linéaire en dimension 2, les fonctions de plusieurs variables, les équations différentielles à coefficients constants, les systèmes 2x2, déjà vus au premier semestre.

On discute les applications de systèmes dynamiques.

On donne des exemples numériques avec des logiciels (Maple)

Programme

Champ de vecteurs dans le plan et introduction aux systèmes dynamiques avec des exemples liés aux sciences de la vie (dynamique des populations, cinétique chimique,...).

Modélisation à l'aide d'équations différentielles.

Étude d'exemples empruntés à la biologie ou à la chimie.

Activité	Heures	%
Cours Magistral (CM)	24	20
Travaux Dirigé (TD)	36	30
Travail personnel estimé	60	50
TOTAL	120	100

Planning du cours

Première partie. Modélisation

- ▶ 1. Modèles déterministes. Schéma d'une modélisation (voir [Bert], p.78)
- ▶ 2. Exemples de loi exponentielle. Solution analytique. Temps de doublement et de demi-vie (voir [Bert], p.80)
- ▶ 3. Adaptation d'un modèle. Exemple : Malthus modifié, loi logistique. Implications pour la phase de prévision.
- ▶ 4. Identification d'un modèle. Choix des paramètres. La méthode des moindres carrés : ajustement linéaire. Exemples numériques
- ▶ 5. Mise en équation des variables. Notion d'équation différentielle. Champs de directions, isoclines, courbes intégrales, espace de phase
- ▶ 6. Solution d'une équation différentielle. Problème de Cauchy.
- ▶ 7. Premières méthodes de solution. Équations différentielles à variables séparées ([Bert], p.102)

Deuxieme partie. Systemes dynamiques et equations differentielles

- ▶ 8. Systemes dynamiques : un langage pour la modelisation. Exemples provenant d'equations differentielles et de suites de recurrence
- ▶ 9. Equations differentielles lineaires. Methode de variation de la constante ([Bert], p.104)
- ▶ 10. Solution numerique. Methode d'Euler
- ▶ 11. Exemple : systemes ecologiques (modele de Lotka-Volterra)

Troisieme partie. Methodes d'algebre lineaire

- ▶ 12. Vecteurs et matrices. Operations
- ▶ 13. Bases et determinants.
- ▶ 14. Vecteurs propres, polynomes caracteristiques. Utilisation des nombres complexes.
- ▶ 15. Application aux equations differentielles et aux suites de recurrence.

Quatrieme partie. Methodes geometriques. Exemples d'une etude qualitative

- ▶ 16. Champs de vecteurs, points singuliers
- ▶ 17. Classification des points singuliers
- ▶ 18. Applications a l'etude qualitative de comportements autour des points singuliers
- ▶ 19. Notion de comportement chaotique de population

Partie I. Exemples de modélisation

Introduction

Qu'est ce que la modélisation ?

Qu'est ce qu'une équation différentielle ?

Schéma d'une modélisation

Exemples de modélisation en biologie

Croissance d'une population selon Malthus

Désintégration radioactive

Calcul des primitives et des intégrales

Adaptation d'un modèle. Équation logistique.

Identification d'un modèle. Méthode des moindres carrées

Fonctions de deux variables

'Equations différentielles

Équations différentielles autonomes sur la droite

La notion générale d'équation différentielle

Les méthodes de résolution.

Équations différentielles linéaires.

Méthode de variation de la constante

Types de méthodes de résolution

Méthodes numériques

7

Cours N°1, (disponible sur :

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~panchish/6mat127>)

I. Modélisation.

Comment les sciences peuvent-elles utiliser des mathématiques ?

Les physiciens ne se posent guère la question car leur science est très mathématisée : les lois fondamentales de la physique ont des expressions mathématiques. Pour ce qui est des sciences du vivant, la situation est moins claire. Certaines branches (l'hérédité, la dynamique des populations, le code génétique, la cinétique biochimique) se prêtent bien à un traitement mathématique. C'est moins clair pour d'autres !

8

Systèmes déterministes

De nombreux systèmes que l'on étudie dans les sciences comme la physique, la chimie, la biologie, l'économie, etc..., sont (en première approximation) des systèmes déterministes ; cela signifie que l'évolution du système au cours du temps est complètement déterminée par son état à un instant donné.

Citons par exemple l'évolution des concentrations des réactifs dans une réaction chimique, l'évolution de populations (de bactéries, de lapins, etc...) dans un système fermé, la radioactivité, etc... La description de ces systèmes se fait au moyen de quantités numériques, souvent appelées **variables ou observables**, dont il s'agit d'étudier l'évolution au cours du temps.

9

Modélisation

de point de vue mathématique, une modélisation est la donnée de :

- ▶ Le temps T (on considère soit **le temps discret** $T = \{lh \mid l \in \mathbb{Z}, h > 0 \text{ une constante fixée}\}$ (mesuré en heures, minutes, journées, années, ...), avec la notation $t_l = lh$, donc $t_{l+m} = t_l + t_m$); soit **le temps continu** $T = \mathbb{R}$);
- ▶ L'espace M (dit **l'espace des phases**) dont les points sont des vecteurs $e = (x, y, \dots) \in M$, où x, y, \dots sont des quantités numériques, souvent appelées **variables ou observables**, qui caractérisent un état de système dynamique en question.
- ▶ Un **processus dynamique** est une fonction mathématique $f : T \rightarrow M$, $f : t \mapsto (x(t), y(t), \dots) \in M$, telle que $f = f_{e_0}$ satisfait une **loi dynamique** avec la propriété $f(t_0) = e_0$, où e_0 est l'**état initial** du processus.

(**Exemples** de lois utilisées :

$$y(t_{l+1}) = 2y(t_l) \text{ (loi de doublement discrète);}$$

$$\Delta y(t) = ky(t)\Delta t \text{ (loi exponentielle continue)} \Rightarrow y' = ky$$

10

Loi physique, loi biologique, [Bert], p.28

L'étude de certains phénomènes biologiques, physiques, chimiques, mécaniques, économiques, ... se ramène à l'étude des **relations** qui existent entre plusieurs variables caractérisant le phénomène étudié.

Dans les sciences expérimentales ou biologiques, on cherche à établir une relation entre deux variables x et y donnée par une fonction $y = f(x)$.

La représentation graphique de la fonction est donnée par son graphe, ou par une table des valeurs.

Rappels sur les fonctions usuelles ([Bert], p.26-27)

- ▶ Fonctions puissances $f(t) = t^\alpha$, variable $t > 0$, paramètre α réel quelconque
- ▶ Fonctions exponentielles $f(t) = a^t$ variable t réel quelconque, paramètre $a > 0$
- ▶ Fonctions logarithmiques $f(t) = \log_a(t)$ variable $t > 0$, paramètre $a > 0$, $a \neq 1$: base du logarithme

11

Croissance comparée (on suppose $\alpha > 0$)

Lorsque t augmente infiniment :

- ▶ e^t tend vers l'infini plus vite que t^α , $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = \infty$
- ▶ t^α tend vers l'infini plus vite que $\ln t$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\alpha}{\ln t} = \infty$

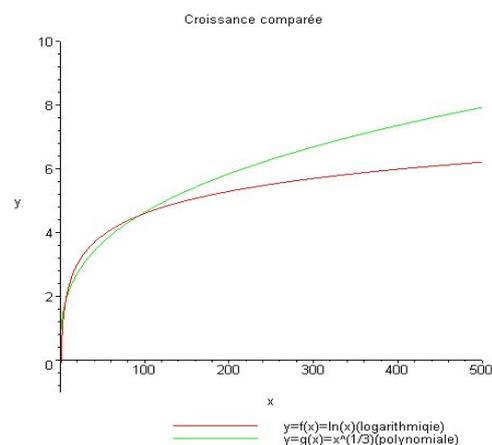
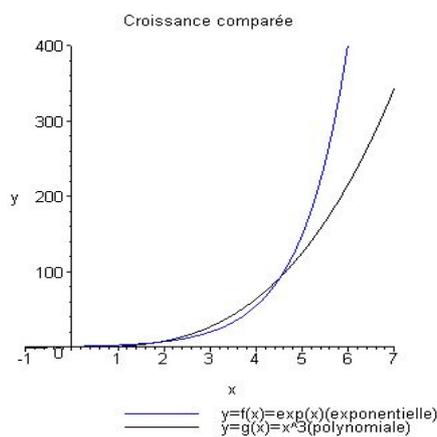


Fig.: 1. Croissance comparée

12

Exemple d'une loi physique : Deuxième loi de Newton ou Principe Fondamental de la Dynamique (voir

http://fr.wikipedia.org/wiki/Lois_du_mouvement_de_Newton, et [Brousse], Chapitre 9)

Si la masse d'un corps est constante, l'accélération subie par un corps de masse m est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m .

Ceci est souvent récapitulé dans l'équation :

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum \vec{F}_i \text{ ou } \sum \vec{F}_i = m\vec{a},$$

où F_i sont les forces exercées sur l'objet, m est sa masse, et a son accélération.

Exemple (2.1)

Considérons l'équation de Newton suivante : $mv'(t) = -\lambda v(t)$, où $v(t)$ est la vitesse d'un mouvement rectiligne d'un point de masse m , soumis à la force $-\lambda v(t)$. Vérifier que $v(t) = C \exp(-t\lambda/m)$ est une solution et que $v(t) = \sin(t)$ ne l'est pas.

13

Qu'est ce qu'une équation différentielle ?

Une équation différentielle du premier ordre est une équation qui met en jeu une relation entre une fonction et sa dérivée, et dont la solution est une fonction dérivable.

Ici la variable pour la fonction y est t , car une équation différentielle modélise parfois l'évolution d'un système (par exemple, l'évolution de la taille d'une population).

Considérons plus généralement l'équation différentielle du 1er ordre

$$y' = G(y, t) \tag{2.1}$$

Une solution de l'équation (2.1) sur un intervalle I est une fonction $y(t)$ dérivable I telle que pour tout $t \in I$ on ait :

$y'(t) = G(y(t), t)$ On choisit en général une solution **maximale**, c'est à dire qui ne peut pas être prolongée sur un intervalle J contenant strictement I .

14

Exemples (voir [Pajot], Ch.VII, p.1)

Exemple (2.2, une équation différentielle facile)

Considérons l'équation $y' + 5y = t$. Nous pouvons encore l'écrire $y' = -5y + t$. Donc, $y' = G(t, y)$, où $G(t, y) = -5y + t$. Une solution sur \mathbb{R} est $y(t) = (1/5)t - 1/25$. En effet, $y'(t) = 1/5 = -5y(t) + t$.

Exemple (2.3, une équation moins facile)

Considérons l'équation $y' + 5ty = t^2$. Nous pouvons encore l'écrire $y' = -5yt + t^2$. Donc, $y' = G(t, y)$, où $G(t, y) = -5yt + t^2$. Dans ce cas, les solutions sont plus difficiles à écrire.

Les équations données dans les exemples 2.2 et 2.3 sont des équations linéaires du premier ordre.

Rappelons qu'une fonction linéaire $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de la forme $f(x) = kx$.

Équations différentielles ordinaires et processus d'évolution

On étudie dans ce cours des **processus d'évolution déterministes** à l'aide de la **théorie des équations différentielles ordinaires**. On utilise de telles équations pour trouver les fonctions de la relation $y = f(x)$. La théorie des équations différentielles constitue l'un des principaux instruments des mathématiques.

Dans l'exemple précédent $mv'(t) = -\lambda v(t)$, on a $x := t$, $y := v$, et $y = f(x)$ se transforme en $v(t) = C \exp(-t\lambda/m)$ (une solution de l'équation différentielle de Newton).

Modèles déterministes et semi-déterministes

Exemples des processus d'évolution (voir [ArnED], p.11).

En mécanique classique, on étudie le mouvement des systèmes dont l'avenir et le passé sont univoquement définis par les positions et les vitesses initiales de tous les points du système.

On dit d'un processus qu'il est **déterministe** si toute son évolution et son passé sont univoquement définis par son état présent.

La propagation de la chaleur, elle, est un processus **semi-déterministe** en ce sens que son avenir est déterminé par son présent, tandis que son passé ne l'est pas.

Schéma d'une modélisation (voir [Bert], p.78)

La modélisation d'un phénomène peut se schématiser de la manière suivante (voir [Bert], p.78) :

Phase de mise en équation

On part de lois élémentaires (connues ou conjecturales) et on en déduit des relations entre les variables

↔

Phase mathématique

Si l'on exprime certaines variables x, y, \dots en fonction de l'une d'elles (par exemple le temps t) ces relations donnent lieu à des équations dont les inconnues sont les fonctions x, y, \dots (équations fonctionnelles)
On cherche des solutions de ces équations

↔

Phase de vérification

on regarde si les fonctions obtenues "mathématiquement" sont proches des fonctions données *expérimentalement* on dit alors que le modèle est valide
 { Si le modèle n'est pas valide, il faut modifier ou affiner la phase de mise en équation et construire un autre modèle

Phase de prévision

↔ Si le modèle est valide, il peut alors permettre dans des circonstances un peu différentes de prévoir l'évolution des variables dans des situations nouvelles

{ La vérification peut amener à une extension du modèle mathématique (en le modifiant éventuellement) et à la construction d'un autre modèle
 Le modèle permet alors d'expliquer et de décrire davantage de phénomènes

Deux notions interviennent toujours dans l'utilisation pratique des modèles mathématiques : -l'identification, - la validation. On s'arrête à la validation qui est le domaine de la statistique et de la probabilité (voir partie IV de [Bert]).

Rappels sur les nombres complexes (voir [YCV], p.26)

Dans la théorie d'équations différentielles on utilise beaucoup l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes : $z = x + iy$ est l'écriture du nombre complexe z . Les quantités x et y sont des nombres réels appelés respectivement partie réelle et partie imaginaire de z . On représente géométriquement z comme le point des coordonnées cartésiennes (x, y) du plan cartésien \mathbb{R}^2 .

Opérations :

- ▶ Le complexe conjugué de $z = x + iy$ est noté $\bar{z} = x - iy$.
- ▶ Le module de z est donné par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- ▶ $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$.
- ▶ $(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$.
- ▶ $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- ▶ $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$
- ▶ $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
- ▶ $e^{nz} = (e^z)^n$

Équations du second degré. Dérivées

Un nombre complexe non nul admet exactement 2 racines carrées opposées. Si a est un réel négatif, on a $\pm\sqrt{a} = \pm i\sqrt{|a|}$. L'équation $z^2 + az + b = 0$ admet comme solutions $z = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})$

Dérivées : $t \rightarrow z(t) = x(t) + iy(t)$ est une fonction dérivable ssi x et y le sont. On a alors $z_0 = x_0 + iy_0$. On a les mêmes formules que dans le cas réel : $(z^n)' = nz^{n-1}z'$; $(e^z)' = z'e^z$ et en particulier, si $a \in \mathbb{C}$, $(e^{at})' = ae^{at}$.

Exemples des problèmes (pour TD)

1. Voir [http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pajot/cours7.pdf](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pajot/cours7.pdf)
2. Utilisation des nombres complexes (voir [YCV], p.36)

Exercice (2.4)

- a) Calculer $(1 + i)^2$, $(1 + i)^3$.
- b) Montrer que $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$
- c) En déduire la valeur de $(1 + i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice (2.5)

Résoudre dans \mathbb{C} les équations : $z^2 + z + 2 = 0$, $z^2 + iz + 1 = 0$

Exercice (2.6)

Tracer les courbes représentatives des fonctions
 $t \rightarrow e^{it}$, $t \rightarrow e^{(1+i)t}$, $t \rightarrow e^{(1-i)t}$, $t \rightarrow e^{1-it}$

Cours N°2,

Exemples de loi exponentielle (voir [Bert], p.80, [Jean87], p.108)

Cas discret. Lorsqu'une population colonise un **milieu vierge** dont les composantes (espace, nourriture) sont illimitées, l'effectif de la population croît de plus en plus rapidement vers l'infini. Supposons qu'on introduise un organisme se reproduisant par **fission binaire** (bactérie, levure) dans un milieu de culture quelconque. Après une certaine période de temps, l'organisme se divise et donne deux individus qui, à leur tour, se divisent en deux. Ce type de croissance est appelé **progression géométrique**.

Pour le temps discret $T = \{lh \mid l \in \mathbb{Z}, h > 0 \text{ une constante fixée} \}$ (mesuré en heures, minutes, journées, années, ...), avec la notation $t_l = lh$, et la loi dynamique de **doublent discrète** $y(t_{l+1}) = 2y(t_l)$, on a $y(t_n) = 2^n y(t_0)$.

Croissance d'une population selon Malthus (cas continu)

Dans l'exemple suivant, on considère une population formée de N individus et évoluant en fonction du temps : N est une fonction du temps t (population humaine dans le cas de Malthus, population bactérienne ou autres). On considère N comme un nombre réel, en effet les populations concernées sont nombreuses et si on compte, par exemple, N en milliards d'individus, N prendra a priori toutes les valeurs décimales avec 9 chiffres après la virgule et on peut donc assimiler N à un nombre réel. L'hypothèse de base est que :

pendant un petit intervalle de temps Δt , la variation ΔN du nombre d'individus de la population est proportionnelle à N et à Δt : si $N(t)$ est la population à l'instant t , la population à l'instant $t + \Delta t$, vaut

$$N(t + \Delta t) = N(t) + kN(t)\Delta t, \text{ où } \Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t).$$

k est une constante positive, si la population croît, et négative, si la population décroît.

Mis en équation : relation différentielle de croissance

La population à l'instant $t + \Delta t$, où Δt est petit, vaut

$$N(t + \Delta t) = N(t) + kN(t)\Delta t.$$

Divisant par Δt et en passant à la limite quand Δt tend vers 0, on obtient en désignant par $N'(t)$ la dérivée de $N(t)$ par rapport à la variable t :

$$N'(t) = kN(t). \quad (3.1)$$

On notera aussi pour des raisons pratiques (calcul de dérivées) comme Leibniz : $\frac{dN}{dt} = kN$. Si $N(0) = N_0$, on va déduire de l'équation (3.1)

$$N(t) = N_0 e^{kt}.$$

La population a donc une croissance exponentielle, si $k > 0$, ce contre quoi Malthus mettait ses contemporains en garde...

Résolution mathématique

On a donc à résoudre une équation dont l'inconnue est une fonction ; une telle équation s'appelle une équation différentielle.

Il s'agit de chercher des fonctions (si possible, toutes les fonctions) vérifiant la relation $N'(t) = kN(t)$. Dans ce cas nous pouvons raisonner directement :

- **Variation de la constante** On vérifie bien qu'on a $N'(t) = kN(t)$ pour toutes les fonctions $N(t) = Ce^{kt}$, où C est une constante positive quelconque. Pour montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions, on fait "varier" la constante C : on cherche les solutions sous la forme $N(t) = C(t)e^{kt}$. On a $N'(t) = C'(t)e^{kt} + C(t)ke^{kt}$ et $kN(t) = kC(t)e^{kt}$, on doit donc avoir $C'(t)e^{kt} = 0$.

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, il en résulte que $C'(t) = 0$ partout sur \mathbb{R} . D'après le théorème des accroissements finis, la fonction $C(t)$ ne peut être que constante (les résultats du cours 110c). Les solutions sont bien toutes de la forme $N(t) = Ce^{kt}$, où C est une constante positive quelconque.

Utilisation de primitives pour l'équation $N'(t) = kN(t)$

- **Utilisation de primitives (séparation des variables)**

On se ramène à la recherche d'une primitive, en remarquant que la fonction N'/N est la dérivée de la fonction $\ln(N)$ (voir les rappels sur les primitives plus bas).

On a donc $(\ln(N))' = k$. Il en résulte que $\ln(N) = kt + K$, où K est une constante quelconque. En prenant les exponentielles des deux membres, on retrouve bien

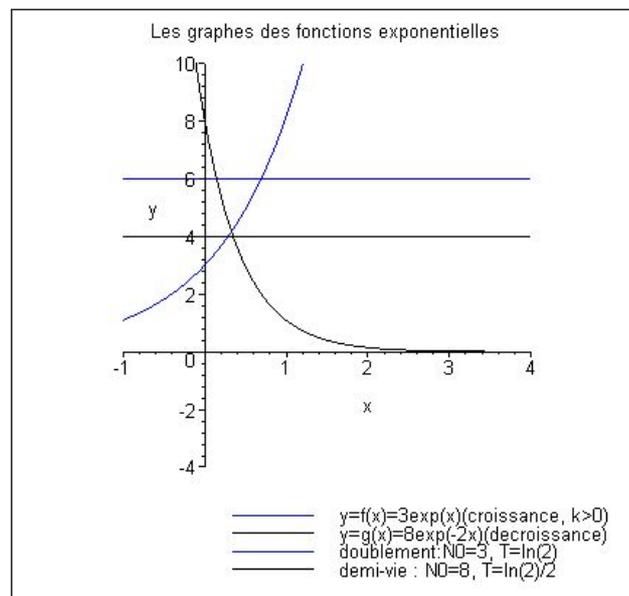
$$N(t) = e^{kt+K} = e^{kt} e^K = Ce^{kt},$$

où $C = e^K$ est une constante positive quelconque.

Représentation graphique

Si N_0 est la valeur de la fonction N pour $t = 0$, l'évolution de la population est décrite par la fonction $N(t) = N_0 e^{kt}$ (loi exponentielle)

Courbes exponentielles :
croissant très rapidement si $k > 0$
décroissant très rapidement si $k < 0$



27

Temps de doublement et de demi-vie

Le coefficient k introduit lors de la mise en équation caractérise la rapidité de croissance ou de décroissance de la population. On utilise souvent T défini comme

- ▶ temps de doublement de la population si $k > 0$
- ▶ temps de division par deux (ou temps de demi-vie si $k < 0$).

Il existe une relation simple entre T et la constante k :

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

$$N(t + T) = N_0 e^{k(t+T)} = e^{kT} N_0 e^{kt} = e^{kT} N(t).$$

On a un doublement, si $e^{kT} = 2$ avec $k > 0$, c'est-à-dire si

$$T = \frac{\ln 2}{k} \approx \frac{0,69}{k}$$

On a une division par deux, si $e^{kT} = \frac{1}{2}$ avec $k < 0$, c'est-à-dire

$$\text{si } T = \frac{\ln 2}{-k} \approx \frac{0,69}{-k}$$

28

Applications concrètes

Les lois exponentielles se rencontrent assez souvent dans la nature. Pour ne citer que quelques cas :

- en **radioactivité**, le nombre d'atomes radioactifs suit une loi exponentielle décroissante de désintégration radioactive,
- en **biologie**, le début de développement d'un organisme ou d'un organe est en général bien décrit par une loi exponentielle (phase exponentielle du développement). Les cellules se divisent en deux au bout du temps T ; donc, aux temps $T, 2T, 3T, \dots$, le nombre de cellules serait environ de $2N_0, 4N_0, 8N_0, 16N_0, \dots$, ce qui correspond à la fonction $N(t) = N_0 2^{t/T} = N_0 e^{\ln 2 \cdot (t/T)}$. Même dans le cas où on part d'une seule cellule, $N_0 = 1$, c'est cette fonction qui décrit correctement le phénomène au bout de quelques cycles de reproduction.
- en **démographie**, si on suppose les taux τ_n de natalité et taux τ_m de mortalité constants, et si on admet l'hypothèse de base, la population suit une loi exponentielle (loi de Malthus), de coefficient $k = \tau_n - \tau_m$,
- en **médecine**, l'élimination d'un médicament vers l'extérieur suit une loi exponentielle. Une élimination peut être considérée comme "l'émigration" d'une population de molécules à travers une membrane ; cela amène à un autre type de modèle.

Datation isotopique : la méthode du carbone 14

La datation des fossiles est importante pour les paléontologues. La méthode du carbone 14 est basée sur les 2 observations suivantes :

- (1) Le taux τ_0 de l'isotope C_{14} dans un organisme vivant est toujours le même.
- (2) Lorsque l'organisme meurt, le taux de C_{14} décroît par désintégration naturelle du C_{14} en C_{12} . Cette désintégration se fait proportionnellement à la population de C_{14} , ce qui conduit à l'équation différentielle

$$\tau'(t) = -k\tau(t); \tau(0) = \tau_0$$

La solution de cette équation différentielle est

$$\tau(t) = \tau_0 e^{-kt}$$

si $t = 0$ représente l'instant de la mort de l'organisme.

On définit k au moyen de la demi-durée de vie T

par

$$\tau(T) = \frac{1}{2}\tau(0),$$

soit

$$T = \frac{\ln 2}{|k|}$$

Connaissant le temps de demi-vie du carbone 14 (environ 5700 ans), on en déduit, par mesure du taux de carbone 14 présent dans l'échantillon, l'ancienneté du fossile.

Exemple (3.1, pour les TD)

La désintégration de 50 % du carbone 14 s'est produite dans 5700 ans. Dans combien de temps restera-t-il 5 % de toute la quantité initiale ?

Réponse : $t \approx 5700 \cdot \frac{\ln 20}{\ln 2} = 5700 \cdot \frac{3,00}{0,69} = 24600$.

Rappels sur le calcul des primitives et des intégrales (voir ([Bert], p.63-73))

On part de la notion d'aire d'une surface du plan limitée par une courbe simple. On ne cherche pas à définir rigoureusement cette notion, mais plutôt, en admettant des propriétés évidentes ("additivité des aires de surfaces disjointes, aire d'un rectangle, d'un trapèze, ..."), à calculer de telles aires.

On s'intéressera surtout au cas d'une surface limitée par la courbe définie par une équation du type $y = f(x)$. Dans ce cas, l'aire peut se calculer numériquement, si on connaît une fonction F dont la dérivée est la fonction f (i.e. si on connaît une primitive F de f).

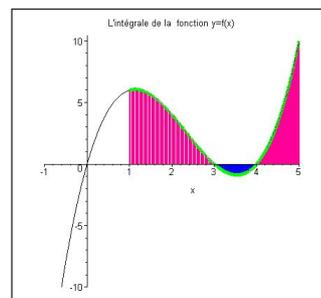
Définition de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$

On suppose d'abord $a < b$. On considère la surface limitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe Ox et les parallèles $x = a$, $x = b$ à l'axe Oy . Si $f \geq 0$, l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est l'aire de cette surface. Sur les intervalles où $f \leq 0$, l'aire est affectée du signe moins : l'intégrale de f est l'aire algébrique de la surface.

Notation

L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ se note

$$\int_a^b f(x)dx \text{ ou } \int_a^b f(t)dt \text{ ou } \int_a^b fdt$$



Calcul numérique des intégrales

Méthode des rectangles.

On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles égaux. Le pas h de la méthode est égal à $\frac{(b-a)}{n}$. On approche l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ par la somme R_n des aires des rectangles

$$R_n = h[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(n-1)h)]$$

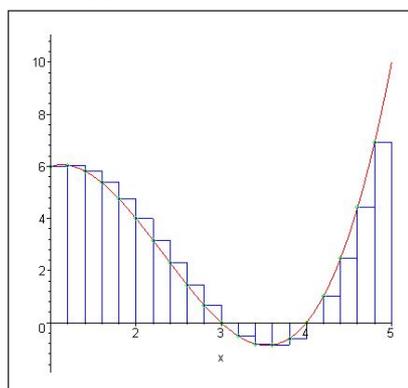
Erreur de la méthode.

On suppose que la fonction f est dérivable et que sa dérivée f' est majorée en valeur absolue sur $[a, b]$ par M' ; on en déduit la majoration

$$|I - R_n| \leq \frac{n}{2} h M' h \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M'$$

On vérifie que R_n est d'autant plus proche de I que n est grand : la suite (R_n) tend vers l'intégrale I .

$n \rightarrow \infty$



Propriétés de l'intégrale

Propriétés algébriques

► *Linéarité sur l'intervalle fixé* : $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$,

$\int_a^b k \cdot f(t)dt = k \cdot \int_a^b f(t)dt$ pour toute constante $k \in \mathbb{R}$.

► *Propriétés relatives à l'intervalle d'intégration* : Pour $a < b$ on pose :

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$, alors $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ (l'égalité de Chasle).

Relations entre l'intégrale et la primitive

► *Primitive d'une fonction*. Si F est une fonction dérivable telle que $F' = f$, on dit que F est une primitive de f . On suppose f continue sur un intervalle.

La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f .

Indication : On veut montrer $F'(x) = f(x)$. L'identité de Chasle donne :

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dx = \Delta x \cdot f(x) + E(x), \text{ avec}$$

$$|E(x)| \leq \Delta x \Delta f(x) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x), \text{ puisque } \frac{E(x)}{\Delta x} \rightarrow 0.$$

► *Formule fondamentale du calcul intégral* : $\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$

35

Tableau des primitives usuelles

(toute autre primitive est de la forme $F + \text{constante}$).

- Fonctions puissances $f(x) = x^\alpha$, $F(x) = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ (pour $\alpha \neq -1$)
- Fonctions exponentielles $f(x) = e^{\lambda x}$, $F(x) = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$ (pour $\lambda \neq 0$)
- Fonctions trigonométriques $f(x) = \cos(\omega x)$, $F(x) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)$ (pour $\omega \neq 0$)
 $f(x) = \sin(\omega x)$, $F(x) = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega x)$ (pour $\omega \neq 0$)
 $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \text{tg}x$ (pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ou ...)
- $f(x) = \frac{1}{x+a}$, $F(x) = \ln|x+a|$ (pour $x < -a$ ou pour $x > -a$)
- $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ (pour $x < -1$ ou pour $-1 < x < 1$ ou $x > 1$)
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \text{arctg}x$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \arcsin x$ (pour $-1 < x < 1$)
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $F(x) = \text{arcsinh}x$

36

Cours N°3,

Méthodes de calcul des primitives

Intégration par parties. $(uv)' = uv' + vu'$ implique

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b uv' dx + \int_a^b vu' dx = \int_a^b u dv + \int_a^b v du, \text{ d'où}$$

$$\boxed{\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du} \text{ ou encore}$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Exercice (3.2. Application : recherche d'une primitive de $f(x) = \ln(x)$)

Montrer que F , définie par $F(x) = x \ln(x) - x$ (pour $x > 0$), est une primitive de $\ln(x)$.

Utilisation de la notation différentielle.

Exercice (3.3. Application : recherche d'une primitive de $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$)

Montrer que si $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$, $F(x) = \ln |\ln(x)|$ (pour $x > 1$),

Changement de variables

Règle pratique du changement de variables :

- ▶ On choisit la nouvelle variable $u = u(x)$
- ▶ On transforme les différentielles suivant les règles habituelles : $du = u'(x)dx$, d'où $dx = \frac{du}{u'(x)}$
- ▶ On transforme l'élément différentiel à intégrer de manière à obtenir un élément différentiel en u et du .
- ▶ On transforme les bornes : \int_a^b devient $\int_{u(a)}^{u(b)}$.

Exercice (3.4. Application : recherche d'une primitive de $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$)

Montrer que si $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, $F = \ln |\operatorname{tg}(\frac{x}{2})|$ (pour $\sin(x) \neq 0$),

Exercice (3.5. Fonctions logarithmiques)

Soit $f(x) = \operatorname{tg}(x)$. Pour quel $x > 0$ on a $F = -\ln |\cos(x)|$?

Généralisations, voir [Bert], p.73-75

Intégrale sur un intervalle infini. Soit f une fonction de la variable x définie et continue pour $x > 0$. On considère l'intégrale $I_A = \int_a^A f(x)dx$, où A est un nombre réel $> a$.

Si I_A a une limite quand A tend vers $+\infty$, on appelle cette limite l'*intégrale* de f sur $[a, +\infty]$, et on la note $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$. Dans le cas où la fonction $f \geq 0$, cette limite mesure la surface infinie comprise entre la courbe représentative de f , l'axe des x et la droite $x = a$.

Définitions analogues pour $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ et pour $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Exemples (3.6.)

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$.

En effet $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{A} + 1 \right) = 1$.

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ n'existe pas.

Généralisations (suite) voir [Bert], p.73-75

Intégrale d'une fonction non-bornée. Soit f une fonction de la variable x définie sur un intervalle $]a, b]$. On considère l'intégrale $I_u = \int_{a+u}^b f(x)dx$, où u est un nombre réel strictement positif.

Si I_u a une limite quand u tend vers 0, on appelle cette limite l'*intégrale* de f sur $[a, b]$, et on la note $I = \int_a^b f(x)dx$. Dans le cas où la fonction $f \geq 0$, cette limite mesure la surface infinie comprise entre la courbe représentative de f , l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = b$.

Exemples (3.7.)

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$.

En effet $\lim_{u \rightarrow +0} \int_u^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{u \rightarrow +0} (2\sqrt{x}) \Big|_u^1 = \lim_{u \rightarrow +0} (2 - 2\sqrt{u}) = 2$.

b) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ n'existe pas.

Exemples de problèmes (pour TD, voir [Ayr], p.49-50)

1. Si la population d'un pays double en 50 ans, en combien de temps triplera-t-elle, compte tenu de ce que le taux instantané d'accroissement est proportionnel au nombre d'habitants ?

Réponse : 79 ans $\approx 50 \cdot \ln(3)/\ln(2)$.

2. Dans une culture le taux instantané d'accroissement du nombre des bactéries est proportionnel à ce nombre.

(a) Si l'on constate que ce nombre double en 4 heures, quel sera-t-il au bout de 12 heures ?

(b) S'il y a 10^4 bactéries au bout de 3 heures et $4 \cdot 10^4$ au bout de 5 heures, quel était le nombre initial ?

Réponse : (a) 8 fois (b) Il y avait $10^4/8$ bactéries initialement.

Calcul des primitives et d'intégrales avec Maple (optionnel)

```
> with(Student[Calculus1]):
ApproximateIntTutor();
ApproximateIntTutor(cos(x));
ApproximateIntTutor(cos(x), 0..Pi/2);
ApproximateIntTutor(cos(x), x=0..Pi/2);
```

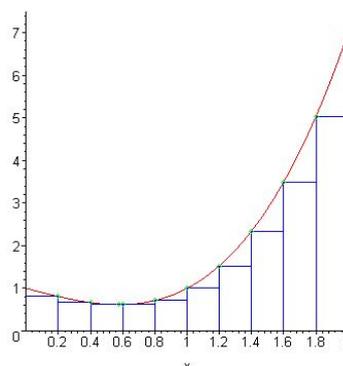


Fig.: 2

$$\left(\frac{1}{2} \cos(x) \sin(x) + \frac{x}{2} \right)' = \cos(x)^2,$$

$$\int_1^2 \cos(x)^2 dx = -\frac{1}{2} \cos(1) \sin(1) + \frac{1}{2} \cos(2) \sin(2) + \frac{1}{2} \approx 0.08347501947$$

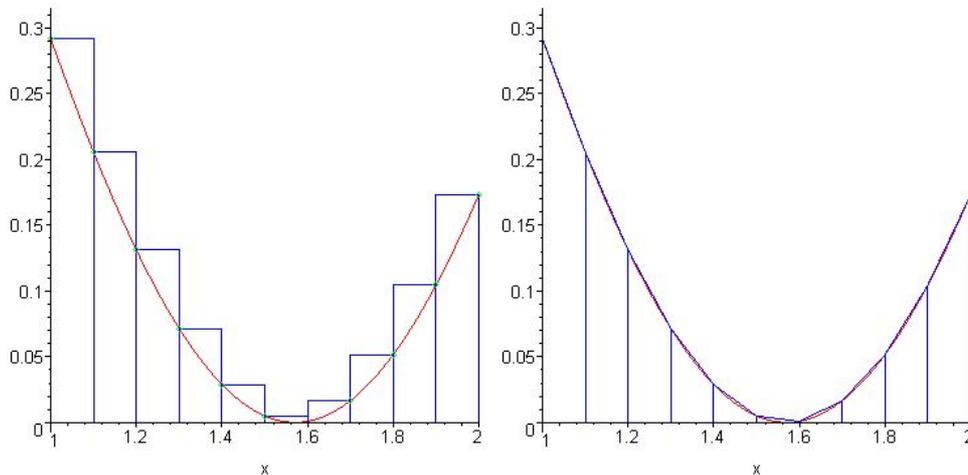


Fig.: 3

43

Cours N°4,

Remarques sur l'intégration

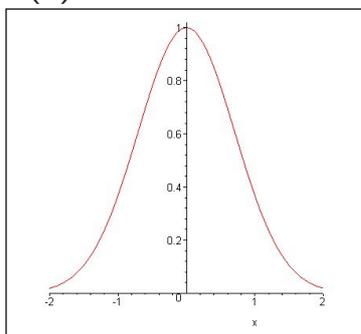
Soit f une fonction exprimée en fonctions usuelles, alors f' s'exprime de nouveau en fonctions usuelles.

Par contre, une primitive F de f ne s'exprime pas en général en fonctions usuelles.

Exemple

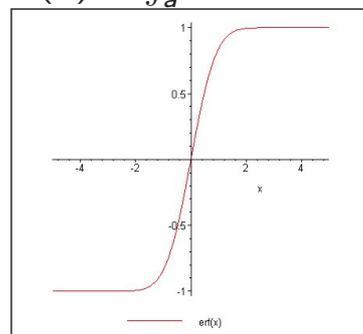
$$f(t) = te^{-t^2}$$

$$f(t) = e^{-t^2}$$



$$F(x) = \int_a^x te^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_a^x e^{-t^2} dt^2 = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$F(x) = \int_a^x e^{-t^2} dt =: \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x) \text{ ("error function")}$$



44

Fonction de Gauss et l'intégrale de Poisson

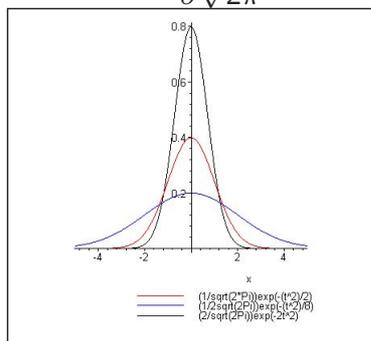
$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{Indication : en utilisant les coordonnées polaires on}$$

$$\text{montre que } \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Exemple

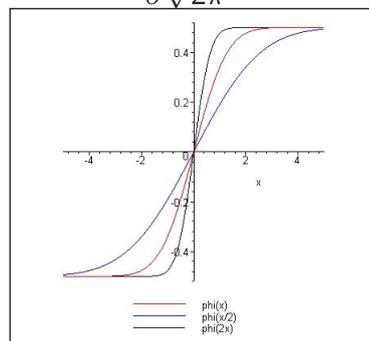
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f_{\sigma,m}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$



$$\text{fonction de Gauss } \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)$$



45

Adaptation d'un modèle. Exemple : Malthus modifié. Implications pour la phase de prévision.

Le raisonnement de Malthus a un défaut majeur, il ne tient pas compte du fait que le taux d'accroissement de la population humaine va diminuer à cause de différents facteurs comme la diminution de l'espace disponible ou des ressources ainsi que ... du niveau d'éducation.

On peut donc dans un modèle un peu amélioré imaginer que k dépend de N de façon décroissante, le plus simple étant une décroissance linéaire du type $k(N) = k_0(N^* - N)$ (pour la population humaine dans le cas de Malthus, et pour population bactérienne ou autres on imagine un milieu ne pouvant nourrir plus de N^* individus). On obtient ainsi l'équation différentielle $N'(t) = k_0(N^* - N(t))N(t)$ dont on verra plus bas qu'elle prédit une population tendant vers un équilibre $N(t) = N^*$ ("charge biotique", voir [Jean87], p.119).

46

Loi logistique. Résolution mathématique

On obtient ainsi l'équation différentielle $N'(t) = \gamma(N^* - N(t))N(t)$, où $\gamma = k_0$.
En utilisant la séparation des variables on trouve la solution générale :

$$N(t) = \frac{N^*}{1 + K^{-1}e^{-\gamma N^* t}}, \text{ où } K \text{ est une constante positive}$$

Une telle fonction est appelée **fonction logistique**.

En effet ([Bert], p. 102), $\frac{N'}{N(N^*-N)} = \gamma$, et $\frac{1}{N(N^*-N)} = \frac{1}{N^*} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{(N^*-N)} \right)$, d'où

$$\frac{N'}{N(N^*-N)} = \frac{1}{N^*} \left(\frac{N'}{N} - \frac{(N^*-N)'}{(N^*-N)} \right) = \frac{1}{N^*} \left(\ln \left| \frac{N}{(N^*-N)} \right| \right)' = (\gamma t)', \text{ et}$$

$$\frac{1}{N^*} \ln \left| \frac{N}{(N^*-N)} \right| = \gamma t + C. \text{ Il vient } \left| \frac{N}{(N^*-N)} \right| = e^{N^* \gamma t} e^{N^* C}.$$

On pose $K = e^{N^* C}$, alors $N = \pm K(N^* - N)e^{N^* \gamma t}$, et

$N(t) = \frac{N^*}{1 \pm K^{-1}e^{-\gamma N^* t}}$, avec $\pm 1 = \text{sgn}(N^* - N)$. Il reste à remarquer que $N^* - N > 0$ pour ce modèle. ■

47

Loi logistique. Implications pour la phase de prévision

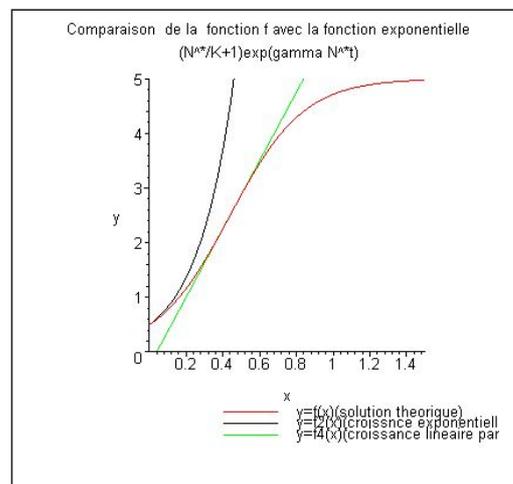
Exemple typique : développement d'une population de bactéries en milieu fermé

On suppose que le nombre de bactéries à l'instant initial $t = 0$ est très inférieur au nombre maximum N^* pouvant vivre dans le milieu.

Les constantes γ et $K = e^{N^* C}$ sont alors positives,

la constante K étant grande.

On voit que la fonction N est croissante et tend vers N^* quand le temps t tend vers $+\infty$.



48

Loi logistique. Exemples numériques

Exemple (loi logistique) $y' = y(5 - y)$ (visualisation avec Maple)

Exemple (loi logistique) $y' = y(5 - y)$

```
> restart;with(DEtools):
```

```
ode := diff(y(x),x)=y(x)*(5-y(x));
```

```
dsolve(ode);
```

$$ode := \frac{d}{dx} y(x) = y(x) (5 - y(x))$$

$$y(x) = \frac{5}{1 + 9 e^{(-5x)}}$$

```
> dsolve( {ode, y(0)=0.5}, y(x));
```

$$y(x) = \frac{5}{1 + 9 e^{(-5x)}}$$

49

Exemple (loi logistique) $y' = y(5 - y)$ (avec Maple)

```
> r:=diff(f(x),x$2);
```

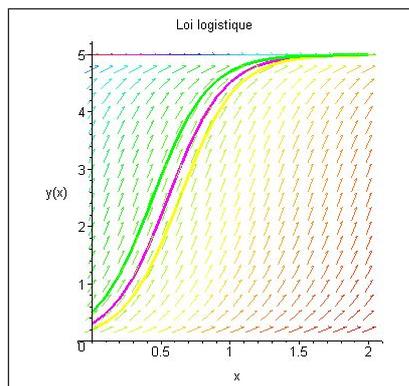
```
> xi:=evalf(solve(r,x));
```

```
#point d'inflexion de y(x)
```

$$\xi := 0.4394449156$$

```
> DEplot(ode,y(x),x=0..2,[[y(0)=0.5],[y(0)=0.2],[y(0)=0.3]],
linecolor=[green,yellow,magenta]);
```

Montrer que tous
les points d'inflexion
des solutions $y(x)$
se trouvent sur la droite
 $[y(5 - y)]'_y = 0$, i.e. $y = 5/2$.



50

Identification d'un modèle. Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés.

Dépendance fonctionnelle. Dans le plan rapporté aux axes Ox , Oy , on associe à la fonction f l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, cet ensemble s'appelle la courbe représentative ou graphe de la fonction f .

On peut aussi représenter une fonction par une table de valeurs. On parlera de **dépendance fonctionnelle approchée** s'il existe une fonction f telle que $f(x)$ soit une approximation de y .

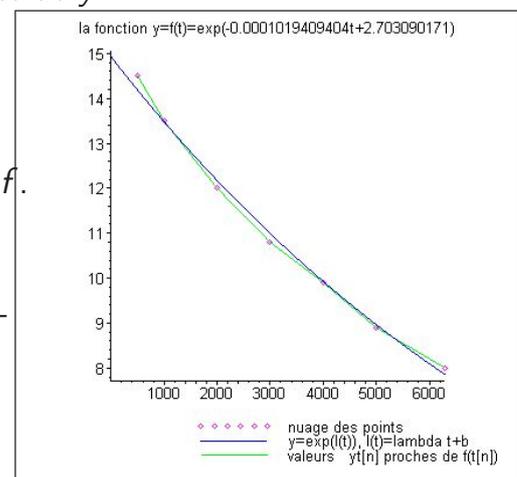
51

Nuage des points

On parlera de **dépendance fonctionnelle approchée** s'il existe une fonction f telle que $f(x)$ soit une approximation de y .

Dans le plan euclidien rapporté à deux axes rectangulaires on associe à chaque observation du couple (x, y) le point M ayant pour coordonnées les valeurs correspondantes de x et de y .

On obtient un nuage des points qui dans le cas d'une dépendance fonctionnelle stricte, sont situés sur la courbe représentative de la fonction f . Dans le cas de deux variables x, y telles que y soit "proche" de la valeur $f(x)$ - situation fréquente dans les sciences expérimentales - le nuage des points $\{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N), \dots\}$ est "aplati" le long du graphe de la fonction f .



52

Identification d'un modèle : choix des paramètres.

Dans les sciences expérimentales ou biologiques, la relation qu'on cherche à établir en première approximation entre deux variables x et y est souvent donnée par une fonction linéaire $y = ax + b$ (**loi linéaire**). La représentation graphique (coordonnées habituelles) est simple : le nuage de points est sur la droite d'équation $y = ax + b$ (dépendance stricte) ou ne s'en écarte pas trop (dépendance approchée).

D'autres lois qui interviennent fréquemment dans les sciences expérimentales ou biologiques sont

- ▶ les **lois exponentielles** $y = Ce^{\mu x}$ (développements de populations, désintégration radioactive, évolution de concentration dans une réaction chimique, ...)
- ▶ les **lois puissances** $y = Cx^\alpha$ (développements des organismes, rapports entre dimensions, ...)

Cours N°5,

Problème de l'ajustement

Le problème de l'ajustement consiste à chercher parmi les fonctions de certain type, la fonction f telle que les approximations $y_1 = f(x_1), \dots, y_N = f(x_N), \dots$ soient les meilleurs possibles, c'est-à-dire la fonction approchée dont le graphe approche le "mieux possible" les points du "nuage des points" $\{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N), \dots\}$.

La famille des fonctions parmi lesquelles on cherche la "meilleure fonction" est donnée en général par le problème expérimental lui-même ; il s'agit de **lois linéaires, exponentielles ou puissances**.

Ajustement linéaire ([Bert],p.29)

Pour traiter ces situations, on se ramène par un *changement de variable approprié* (logarithmique ou semi-logarithmique) à une loi linéaire. On dispose d'une série de N observations de deux variables donnée par un nuage de points $\{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N), \dots\}$; on suppose que ce nuage de points a une forme presque rectiligne.

Si, par exemple, l'équation théorique donnée par le modèle est

$y(t) = N^*/(1 + \exp(b - \lambda x))$, on obtient une loi semi-logarithmique

$b - \lambda x = \ln\left(\frac{N^* - y(x)}{y(x)}\right)$. Sachant les valeurs expérimentales y_i proches de $y(x_i)$, on

trouve le *nuage des points linéarisé*

$$\{(x_i, a_i) | i = 1, \dots, N\}, \text{ où } a_i = \ln\left(\frac{N^* - y_i}{y_i}\right).$$

On suppose que la *loi $y = f(x)$ est déjà linéaire*. On cherche une fonction

$y = \alpha x + \beta$ telle que les approximations $y_1 = \alpha x_1 + \beta, \dots, y_N = \alpha x_N + \beta, \dots$ sont les "meilleures possibles".

Méthode des moindres carrés ([Bert],p.29)

Ecart entre un nuage de points et une droite.

On pose $E(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^N (y_n - \alpha x_n - \beta)^2$. On va chercher à rendre l'écart $E(\alpha, \beta)$ minimum par un bon choix des paramètres.

On suppose d'abord α fixé : $E(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^N (y_n - \alpha x_n - \beta)^2$

$\Rightarrow E(\alpha, \beta) = N\beta^2 - 2\beta \sum_{n=1}^N (y_n - \alpha x_n) + \sum_{n=1}^N (y_n - \alpha x_n)^2$. On obtient un

trinôme $E(\alpha, \beta)$ du second degré de la forme $A\beta^2 + 2B\beta + C$, où A, B, C ne dépendent pas de β et A est positif; par suite $E(\alpha, \beta)$ est minimum pour la valeur de β égale à $b = -\frac{B}{A} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_n - \alpha x_n)$.

On voit que $b = \bar{y} - \alpha \bar{x}$, où $(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n, y_n)$ est le centre de gravité du nuage $\{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N), \dots\}$, c'est-à-dire que la droite cherchée $y = \alpha x + \beta$ passe par (\bar{x}, \bar{y}) .

On suppose maintenant $\beta = b$ (autrement dit : on considère *toutes les droites passant par le centre de gravité*).

Méthode des moindres carrés (suite)

On considère toutes les droites passant par le centre de gravité.

Si l'on pose $X_n = x_n - \bar{x}$, $Y_n = y_n - \bar{y}$, on a $Y_n - \alpha X_n = y_n - \alpha x_n - b$, donc

$E(\alpha, \beta) = \alpha^2 \sum_{n=1}^N X_n^2 - 2\alpha \sum_{n=1}^N X_n Y_n + \sum_{n=1}^N Y_n^2$. C'est un trinôme du second degré de la forme $A'\alpha^2 + 2B'\alpha + C'$, où A', B', C' ne dépendent pas de α et A' est positif; par suite il est minimum lorsque α prend la valeur

$$a = \frac{\sum_{n=1}^N X_n Y_n}{\sum_{n=1}^N X_n^2} = \frac{\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2}$$

Pour obtenir b , il reste à substituer a dans l'équation utilisée $b = \bar{y} - \alpha \bar{x}$.

La droite trouvée $y = ax + b$ rend minimum l'écart $E(\alpha, \beta)$.

Exemples numériques : loi linéaire.

On considère le nuage des points donné par les valeurs

$$x = [0, 1, 2, 3], y = [2, 0.9 = 1 - 0.1, 0.1 = 0 + 0.1, -1]$$

(c'est-à-dire, un nuage "aplati" le long du graphe de la fonction $f = 2 - x$).

Pour retrouver une équation linéaire $y = ax + b$ à partir du nuage

$\{[0, 2], [1, 0.9], [2, 0.1], [3, -1]\}$, on calcule **le centre de gravité**

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \frac{1}{4}[0 + 1 + 2 + 3, 2 + 0.9 + 0.1 - 1] = [1.5, 0.5].$$

On calcule les points centrés

$$X = [x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, x_3 - \bar{x}, x_4 - \bar{x}], Y = [y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, y_3 - \bar{y}, y_4 - \bar{y}],$$

$$X = [-1.5, -0.5, 0.5, 1.5], Y = [-1.5, -0.4, 0.4, 1.5]$$

$$X \cdot X = 2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25 = 5.0,$$

$$X \cdot Y = -2.25 - 0.20 - 0.20 - 2.25 = -4.9,$$

$$a = \frac{X \cdot Y}{X \cdot X} = \frac{-4.9}{5.0} = -0.98, b = \bar{y} - a\bar{x} = 0.5 + 0.98 \cdot 1.5 = 1.97,$$

$$y = -0.98x + 1.97.$$

Exemples numériques

- Loi exponentielle.

$$y = [7.39, 2.46, 1.11, 0.368],$$

$$y_1 \approx e^2, y_2 \approx e^{0.9}, y_3 \approx e^{0.1}, y_4 \approx e^{-1}.$$

$$\Rightarrow y = e^{-0.98x+1.97}.$$

- Loi logistique.

$$y = [0.119, 0.289, 0.474, 0.730],$$

$$y_1 \approx \frac{1}{1+e^2}, y_2 \approx \frac{1}{1+e^{0.9}}, y_3 \approx \frac{1}{1+e^{0.1}}, y_4 \approx \frac{1}{1+e^{-1}},$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{1+e^{-0.98x+1.97}}.$$

59

Exemples numériques. Datation au moyen du carbone 14 ([Bert], p.34).

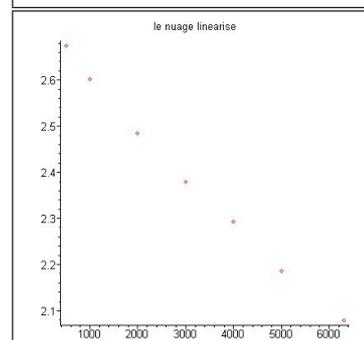
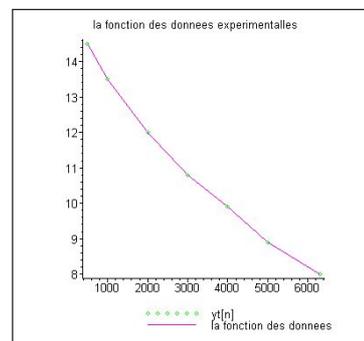
Un étalonnage de la méthode a été réalisé par l'analyse de troncs de très vieux arbres *Séquoia gigantea* et *Pinus aristata* (ouvrage de A.G.Marshall) :

> N :=7 :

t :=[500, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6300] :

yt :=[14.5, 13.5, 12.0, 10.8, 9.9, 8.9, 8.0] :

```
> for n from 1 to N do lt[n] :=ln((yt[n]));od :
lt := [2.674148649, 2.602689685, 2.484906650,
2.379546134, 2.292534757, 2.186051277,
2.079441542]
```



60

Pour trouver l'équation de la droite,
on utilise la méthode de moindres carrés :

```
> moyenne :=(1/N)*(add([t[n],lt[n],yt[n]],n=1..N)) :
> xb :=moyenne[1] :yb :=moyenne[2] :'[xb,yb]'=[xb,yb];
(le centre de gravité du nuage linéarisé)
> with(linalg) : for n from 1 to N do
X[n] :=t[n]-xb;Y[n] :=lt[n]-yb;od :
X :=[seq(X[i],i=1..N)] :Y :=[seq(Y[i],i=1..N)] :
> with(Student[LinearAlgebra]) :evalm(X.X) : evalm(X.Y) :
> lambda :=-evalm(X.Y)/evalm(X.X) :
b :=yb+lambda*xb : l :=-lambda*x+b;
> L :=plot(l(x), x=0..t[N]) :
```

```
pointsplot(points) :
```

```
L2 :=plot(pointslt, style=point,
```

```
(la droite des moindres carrés)
```

```
legend="nuage des points linéarisé, lt[n]=ln(yt[n])" :
```

```
L3 :=pointplot([xb,yb]) :
```

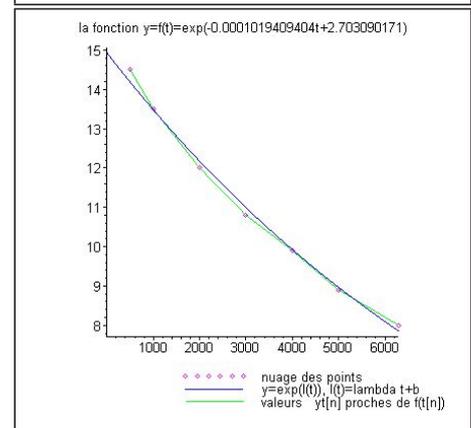
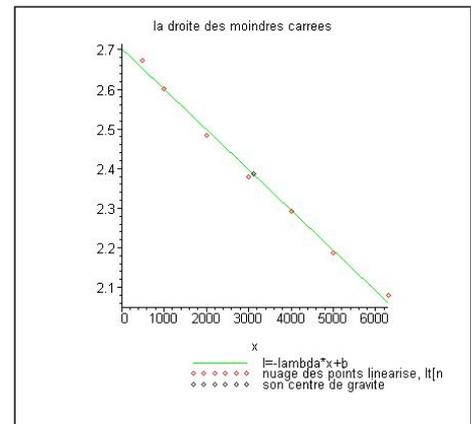
```
display(L,L2, L3);
```

```
l := -0.0001019409404 x + 2.703090171
```

```
f(x) := -0.0001019409404 x + 2.703090171
```

la valeur initiale $N_0 = e^b \approx 14.93$, la demi

-vie : $T = \ln(2)/0.0001019409404 \approx 6790$.



Cours N°6, Exemples numériques (R.Pearl, 1925) :

Expérience de T.CARLSON (voir [Bert], p.96)

l'étude de la croissance en milieu fermé d'une population de saccharomyces (levures) a donné les résultats suivants, où le temps t est exprimé en heures, et où N est un nombre proportionnel au nombre total de levures vivantes à l'instant t :

```
> Ns:=665;
t:=[0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18];
N:=[9.6,18.3, 47.2,119.1,257.3,441.0,559.7,629.4,651.1,661.8];
for n from 1 to 10 do a[n]:=ln((Ns-N[n])/N[n]);od;
> a[1] := 4.223482638 a[2] := 3.564981448
a[3] := 2.571770888 a[4] := 1.522472332
a[5] := 0.4602888905 a[6] := -0.6773988237
a[7] := -1.670587507 a[8] := -2.872421347
a[9] := -3.846774400 a[10] := -5.331812586
```

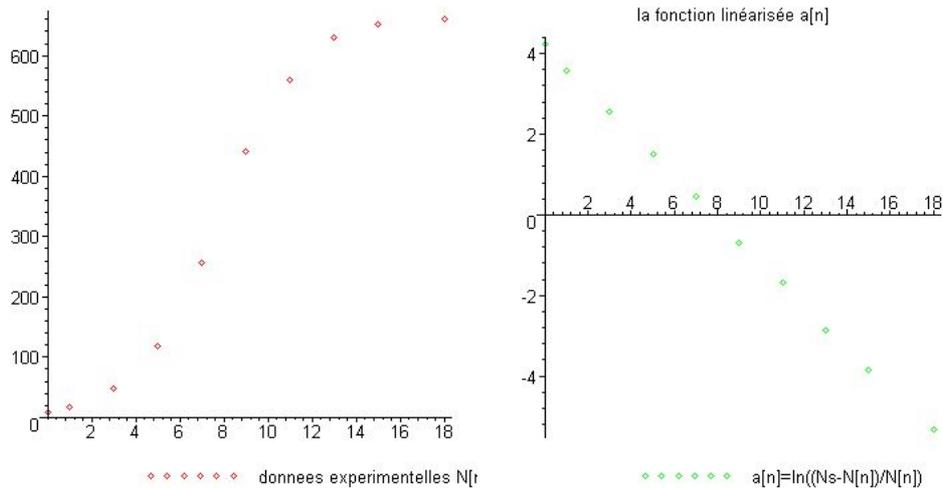


Fig.: 4. Données expérimentales et la fonction linéarisée $a[n] = \ln((Ns - N[n])/N[n])$

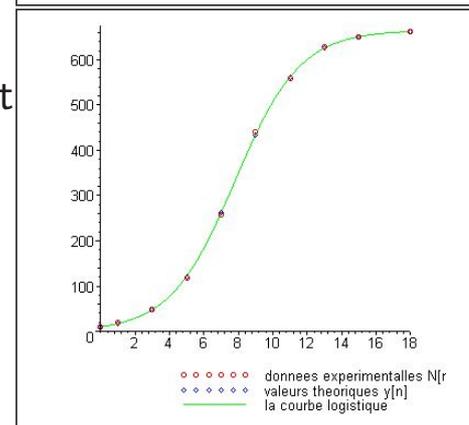
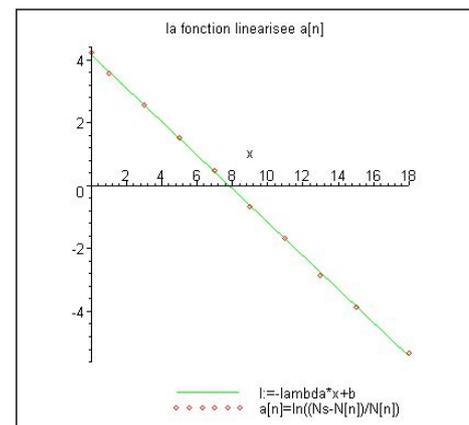
Pour trouver l'équation de la droite, on utilise la méthode de moindres carrés (voir [Bert], p.30) :

$$l := -0.5323127461 x + 4.159364671$$

L'équation théorique donnée par le modèle est

$$y(t) = \frac{Ns}{1 + e^{b-\lambda t}}$$

$$= \frac{665}{1 + e^{4.159364671 - 0.5323127461 t}}$$



Pour ceux qui le souhaitent, les programmes de ces calculs en utilisant le logiciel Maple sont disponibles à l'adresse :

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~panchish/6mat127-maple>, dans des fichiers .mws). Dans ce cas il faut disposer une version assez récente de Maple

Pour travailler avec ces fichiers, on peut :

- ▶ les ouvrir avec Netscape,
- ▶ "enregistrer sous ..." comme un fichier .mws,
- ▶ les ouvrir avec une version de Maple .

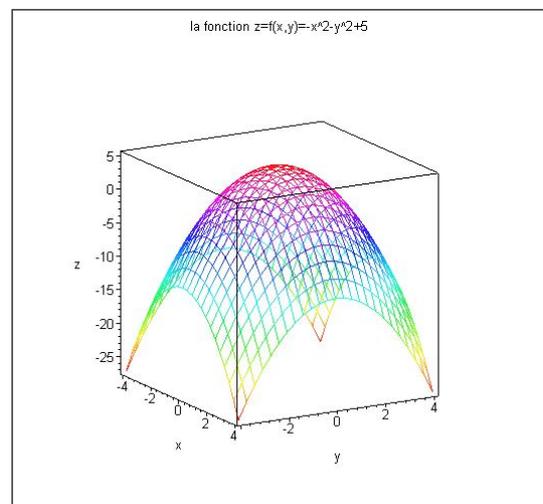
65

Fonctions de deux variables ([Bert], p.41)

Au cours d'une série d'expérimentations ou d'observations, on s'intéresse à trois variables x, y, z liées au phénomène étudié, par exemple : pression, volume, température d'un gaz, ou encore taille, âge d'un individu.

Les relations entre les variables s'appuient sur la notion de fonction de deux variables et, géométriquement, correspondent aux notions de courbe ou de surface dans l'espace en trois dimensions.

Voici le graphe de la fonction $z = f(x, y) = -x^2 - y^2 + 5$



66

Continuité des fonctions de deux variables

Soit f une fonction des deux variables x et y . On dit que f est continue au point (x_0, y_0) si la valeur $z = f(x, y)$ tend vers $z_0 = f(x_0, y_0)$ lorsque x tend vers x_0 , et y tend vers y_0 simultanément.

Exercice

1) On pose $f(x, y) = 1$, si $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ et $x > 0$ et $f(x, y) = 0$, sinon. Est-ce que la fonction $f(x, y)$ est continue en $(x_0, y_0) = (0, 0)$?

2) Montrer que toute fonction polynômiale de deux variables est continue.

Dérivées partielles

Si l'on fixe une des variables, par exemple $y = y_0$, z est la fonction de la seule variable x :

$x \mapsto z = f(x, y_0)$. La dérivée de cette fonction s'appelle la dérivée partielle de f par rapport à x : on la note $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$.

On définit de manière analogue la dérivée partielle par rapport à y .

67

Exemples

- ▶ $f(x, y) = ax + by$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b$.
- ▶ $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
- ▶ $f(x, y) = kxy$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ky$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = kx$.

Accroissement et différentielle Soit

$\Delta z = z - z_0 = f(x, y) - f(x_0, y_0)$, $\Delta x = x - x_0$ et $\Delta y = y - y_0$

Supposons que les dérivées partielles

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues

en tout point voisin de (x_0, y_0) .

Alors on trouve l'accroissement Δz

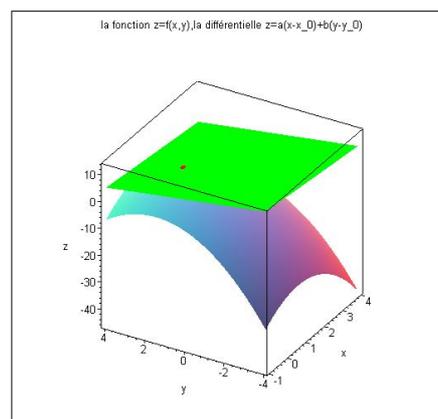
$$\begin{aligned} & \text{en termes de } \Delta x \text{ et } \Delta y : f(x, y) - f(x_0, y_0) \\ &= (f(x, y) - f(x, y_0)) + (f(x, y_0) - f(x_0, y_0)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, \eta)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

où $\xi \in [x, x_0]$, $\eta \in [y, y_0]$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \eta) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, et $\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y_0) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

La différentielle de f en (x_0, y_0) est la fonction

$$df(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$



68

Mis en équation des variables. Notion d'équation différentielle.

Equations différentielles autonomes du premier ordre Rappelons qu'une équation différentielle du premier ordre est une équation qui met en jeu une relation entre une fonction et sa dérivée, et dont la solution est une fonction dérivable (voir (2.1)).

Par exemple, $y' = 2y$, $y' = 3y(4 - y)$, $y' = 2y + t$, où $y = y(t)$, $y' = \frac{dy}{dt}$.

Les exemples précédents conduisent à des équations différentielles du type :

$$y' = F(y) \quad (4.1)$$

On dit qu'on a une **équation différentielle autonome**, car t n'y figure pas explicitement. L'inconnue est la fonction $y(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y' = \frac{dy}{dt}$ est sa dérivée.

Une **équation différentielle générale du 1er ordre** s'écrirait

$y' = G(y, t)$, où G est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} (une fonction à deux variables).

Cours N°7,

Équation différentielle générale du 1er ordre

Considérons généralement l'équation différentielle du 1er ordre

$$y' = G(y, t) \quad (4.2)$$

Une **solution** de l'équation (4.2) sur un intervalle I est une fonction $y(t)$ dérivable I telle que pour tout $t \in I$ on ait :

$$y'(t) = G(y(t), t)$$

Théorème de l'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle du premier ordre avec une condition initiale

On considère une équation différentielle du 1er ordre $y' = G(y, t)$. Une équation différentielle a, en général, une infinité de solutions. Pour en préciser une, on se donne la valeur $y(t_0)$ de y à un instant t_0 (souvent égal à 0) choisi. Le problème ainsi posé s'appelle problème de Cauchy. Sous des hypothèses de régularité assez faibles sur G on montre que le problème de Cauchy admet une solution maximale unique.

Théorème (Cauchy-Lipschitz)

Soient dans un domaine fermé $D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ les fonctions G et G'_y continues. Alors l'équation $y' = G(y, t)$ admet dans un intervalle $|t - t_0| \leq d$ une solution unique vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

On choisit en général une solution **maximale**, c'est à dire qui ne peut pas être prolongée sur un intervalle J contenant strictement I .

Exemple de solutions

Exemples (4.2)

- ▶ Les équations $y' = ky$, $y' = 2y + t$, $y' = y^2$ etc. admettent toujours une unique solution **locale** (c'est-à-dire, dans un intervalle $|t - t_0| \leq d$).
- ▶ Par contre, les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont prises en défaut par le problème de Cauchy suivant

$$y' = 2|y|^{1/2}, y(0) = 0$$

qui admet une infinité de solutions données par $y(t) = 0$ pour $t \leq a$ (avec $a \geq 0$) et $y(t) = (t - a)^2$ pour $t \geq a$.

Solutions locales et globales

Remarque (4.3, Solutions locales et globales [DDGR], p.26)

Il existe des équations différentielles autonomes dont les solutions ne peuvent pas être définies pour tout $t \in \mathbb{R}$: $y' = y^2$ a pour solutions

$$y(t) = \begin{cases} \frac{A}{C-t}, & \text{si } t \in [-\infty, C[\\ 0, & \text{si } t \in \mathbb{R}, \\ \frac{A'}{C'-t}, & \text{si } t \in [C', +\infty[, \end{cases}$$

mais (grâce au théorème Cauchy-Lipschitz), il est toujours possible de définir une solution locale, par exemple, $y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t}$, avec

$$t \in \left[-\infty, \frac{1}{y_0}\right[, \text{ si } y_0 > 0$$

73

Équations différentielles à variables séparées ([Bert], p.102)

Ce sont les équations différentielles qu'on peut écrire sous la forme $y' = \frac{a(t)}{b(y)}$.

Règle de résolution

On écrit l'équation sous la notation différentielle $\frac{dy}{dt} = \frac{a(t)}{b(y)}$

On sépare les variables t et y : $b(y)y' = a(t)$.

Soit B une primitive de b , et soit A une primitive de a ,

on écrit $\frac{dB(y)}{dy} = b(y)$, $B(y)'_t = b(y)y'$,

$a(t) = (A(t))'$

$(B(y))' = (A(t))'$

puisque la dérivée de la fonction $B(y) - A(t)$ est nulle,

on en déduit $B(y) = A(t) + C$, où C est une constante

On cherche, si possible, une expression de y en fonction de t .

74

Exemple de solution analytique

Résoudre l'équation

$$(t + 1) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + t y(t)^2 = 0, \text{ avec } y(1) = 1.$$

Indication : Dans ce cas

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{t}{t+1} \Rightarrow a(t) = -\frac{t}{t+1}, b(y) = \frac{1}{y^2}.$$

Puisque $-\frac{t}{t+1} = -1 + \frac{1}{t+1}$, on trouve les primitives

$A(t) = -t + \ln|t+1|$, $B(y) = -\frac{1}{y}$, d'où $\frac{1}{y} = t - \ln|t+1| + C$, et

$$y(t) = \frac{1}{t - \ln(t+1) + C}, \text{ avec } C = \ln(2).$$

75

Équations différentielles linéaires (voir [Pajot], Ch.VII, p.6)

Soient $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Rappelons que la fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle linéaire

$$y' = ay + b$$

si y est dérivable sur I et pour tout $t \in I$,

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

Proposition (4.4. Solutions d'équations linéaires homogènes)

Supposons que la fonction $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ soit continue sur un intervalle I de \mathbb{R} et soit A une primitive de a sur I . Alors, les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $t \rightarrow Ce^{A(t)}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Il y a bien existence de solutions pour l'équation considérée.

76

Démonstration. Le principe de la preuve est le même que celui que nous avons vu dans le cas où a est une fonction constante.

Tout d'abord, si $y(t) = Ce^{A(t)}$ pour $t \in I$, alors

$$y'(t) = C(A'(t)e^{A(t)}) = Ca(t)e^{A(t)} = a(t)y(t).$$

Donc, y est une solution de $y' = ay$. Réciproquement, soit y une solution de $y' = ay$. Posons, pour $t \in I$, $C(t) = y(t)e^{-A(t)}$. Alors,

$$\begin{aligned} C'(t) &= y'(t)e^{-A(t)} - y(t)A'(t)e^{-A(t)} \\ &= e^{-A(t)}(y'(t) - A'(t)y(t)) = e^{-A(t)}(y'(t) - a(t)y(t)). \end{aligned}$$

Donc C est constante sur I . Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $C(t) = C$, soit encore $y(t)e^{-A(t)} = C$ pour $t \in I$. Il s'ensuit que $y(t) = Ce^{A(t)}$ pour tout $t \in I$. ■

Lien entre les solutions d'équations homogènes et non-homogènes

Que se passe-t-il si l'équation a un second membre ? Nous considérons l'équation

$$(E) \quad y' - ay = b$$

Nous lui associons l'équation homogène

$$(E') \quad y' - ay = 0.$$

Supposons que l'on connaisse deux solutions y_0 et y_1 de (E). Alors, formellement,

$(y_1 - y_0)' - a(y_1 - y_0) = (y_1' - ay_1) - (y_0' - ay_0) = b - b = 0$. Donc, $y_1 - y_0$ est solution de (E') et donc, d'après ce qui précède, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $y_1(t) - y_0(t) = Ce^{A(t)}$, ou encore

$$y_1(t) = y_0(t) + Ce^{A(t)}.$$

Méthode de variation de la constante

Pour trouver une solution particulière y_0 de (E), on utilise de nouveau la méthode de variation de la constante. Nous cherchons une solution de $y' - ay = b$ sous la forme $y_0 = C(t)e^{A(t)}$. Ainsi C doit vérifier

$$C'(t)e^{A(t)} + C(t)A'(t)e^{A(t)} = a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t),$$

soit encore, puisque $A' = a$, $C'(t) = b(t)e^{-A(t)}$.

Exemple (4.5)

Considérons l'équation $y' + 5y = t$. Nous pouvons encore l'écrire $y' = -5y + t$, $a = -5$, $b = t$. Donc, $y' = G(t, y)$, où $G(t, y) = -5y + t$. Une solution particulière sur \mathbb{R} est $y(t) = C(t)e^{A(t)} = C(t)e^{-5t}$, où $C(t)$ est une primitive de te^{5t} , i.e. $(1/5)te^{5t} - 1/25e^{5t}$ (l'intégration par parties). Donc, $y(t) = C'(t)e^{A(t)} = (1/5)te^{5t-5t} - 1/25e^{5t-5t} = (1/5)t - 1/25$ (comparer avec Exemple 2.2).

Cours N°8,

Les méthodes de résolution d'équations linéaires

On distingue plusieurs types de méthodes de résolution :

(1) **Les méthodes analytiques** : on cherche à calculer explicitement les solutions au moyen des fonctions dites usuelles (fonctions exponentielles et logarithmes, fonctions trigonométriques, ...). Historiquement, c'est la méthode la plus ancienne. Elle a beaucoup d'inconvénients, le principal étant de ne pas être toujours applicable ; par exemple, on ne peut pas résoudre une équation aussi simple que $y' = \sqrt{1 + y^4}$.

Lorsqu'elle marche, elle fournit parfois des expressions très compliquées et difficiles à étudier. Elle reste la méthode dominante dans les manuels scolaires, car elle donne lieu à des moyens simples pour évaluer les étudiants...

Les méthodes numériques et les méthodes qualitatives

(2) **Les méthodes numériques** : on se contente de chercher une approximation de la solution cherchée à 10^{-N} près. L'avantage est que ces méthodes sont universelles, c'est à dire indépendantes de l'équation étudiée. Elles sont très utilisées depuis que l'on dispose de moyens de calculs automatiques.

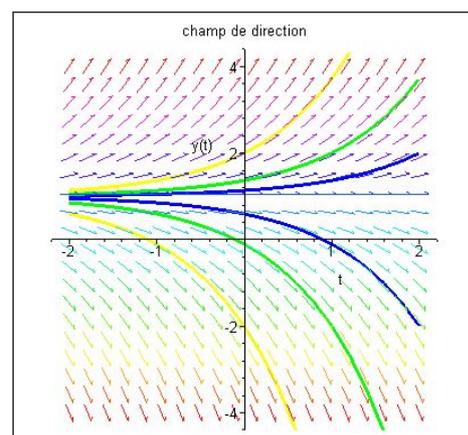
(3) **les méthodes qualitatives** : on abandonne l'objectif d'une connaissance quantitative précise des solutions en se rabattant sur des objectifs plus limités : recherche des solutions stationnaires, étude de leur stabilité, comportement des solutions quand $t \rightarrow +\infty$, caractère chaotique. Le premier à s'être intéressé à un tel point de vue sur les équations différentielles est sans doute Henri Poincaré au début du XXème siècle.

81

Étude graphique. Champs de directions, isoclines, courbes intégrales

Le graphe d'une solution a pour tangente au point (t, y) la droite de coefficient angulaire $G(y, t)$; comme ce graphe est parcouru dans le sens des t croissants, on peut visualiser le phénomène en traçant au point (t, y) une flèche d'origine ce point, portée par la droite de coefficient angulaire $G(y, t)$ et orienté dans le sens des t croissants.

On obtient ainsi un "champ de flèches" associé à l'équation différentielle ; une solution de l'équation est une fonction dont le graphe est tangente en chaque point à la flèche ayant pour l'origine ce point.



82

Champ de directions

On s'intéresse aux graphes des solutions (maximales) $y(t)$ de l'équation (2.1).

Quelle propriété géométrique partagent-ils? En chaque point (t_0, y_0) du plan des (t, y) , on peut considérer la droite passant par ce point et de pente $p_0 = G(y_0, t_0)$.

On obtient ce que les mathématiciens appellent un champ de directions, par analogie avec un champ de blé où en chaque point on a une tige de blé avec une certaine direction.

On peut représenter graphiquement ce champ de la façon suivante : on choisit une grille de points, ceux de coordonnées (ma, na) où $m, n \in \mathbb{Z}$ et $a > 0$ est à choisir.

On dessine en chaque point $M_{m,n}$ de coordonnées cartésiennes (ma, na) un segment centré au point $M_{m,n}$ dont la projection sur l'axe des y a pour longueur a et dont la pente est $G(ma, na)$. Cela donne une idée du champ de direction.

Soit $y(t)$ une solution de l'équation différentielle $y' = G(y, t)$,

alors, pour tout $t_0 \in I$, le graphe de $y(t)$ en $(t_0, y_0 = y(t_0))$ est tangente à la droite du champ précédent associée au point (t_0, y_0) .

Exemples : on peut résoudre géométriquement les équations différentielles suivantes :

(1) $y' = 2$

(2) $y' = 0$ si $|y| > 1$, $y' = 1$ si $|y| \leq 1$

(3) $y' = -t/y$

Isoclines. On s'intéresse aux points $m = (t, y)$ du plan tels que la solution qui passe par ce point ait une pente p . On note I_p cet ensemble, appelé isocline de pente p . Il est remarquable que cet ensemble peut être décrit avant de résoudre l'équation différentielle, en effet on a :

$$I_p = \{(t, y) | G(y, t) = p\}$$

Le tracé de quelques isoclines permet de prévoir l'allure des solutions.

Points d'inflexion. *Rappel* : Les points d'inflexion sont les points pour lesquels la dérivée seconde $y''(t)$ change de signe. De $y'(t) = G(y(t), t)$, on tire $y''(t) = G'_y(y(t), t)y'(t) + G'_t(y(t), t) = GG'_y + G'_t$. Le lieu des points d'inflexion est donc donné par $(GG'_y + G'_t)(y, t) = 0$ et dans le cas autonome par $F'(y) = 0$.

Solution numérique. Méthode d'Euler.

Supposons qu'on veuille résoudre le problème de Cauchy

$$y' = G(y, t), y(t_0) = y_0$$

et trouver une valeur approchée de $y(a)$.

On choisit un entier N et on subdivise l'intervalle $[t_0, a]$ en N sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N-1$ avec $t_i = t_0 + i\Delta T$ avec $\Delta T = (a - t_0)/N$. On calcule alors une solution approchée $\tilde{y}(t_i) = y_i$ par $y_{i+1} = y_i + G(y_i, t_i)\Delta T$. On peut calculer ainsi y_1 , puis y_2 jusqu'à $y_n = \tilde{y}(a)$. On montre que lorsque $N \rightarrow \infty$, $\tilde{y}(a) \rightarrow y(a)$.

Exemple (4.6)

$y' = y, y_0 = 1, t_0 = 0$, on a : $y_{n+1} = y_n + \Delta T y_n = (1 + \Delta T)y_n$, $y_n = (1 + \Delta T)^n$ et $y_N = (1 + \frac{a}{N})^N$ qui converge quand $N \rightarrow \infty$ vers e^a .

On peut largement améliorer la méthode d'Euler de façon à avoir une convergence plus rapide. Le lecteur intéressé peut consulter le livre de Jean-Pierre Demailly aux PUG, voir [Dem].

Voici un programme Maple typique pour mettre en oeuvre la méthode d'Euler pour l'équation différentielle $y' = \frac{ty}{2}$

```
> G:=t*y/2;
T:=[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0];
y[1]:=1;
for n from 1 to 10 do
Gn:=eval(G, [y=y[n], t=T[n]]);
y[n+1]:=y[n]+(T[n+1]-T[n])*Gn;

print('n'=n, 'T[n]'=T[n], 'y[n]'=y[n],
'G(y[n], t[n]) *(T[n+1]-T[n])'=Gn*(T[n+1]-T[n]));
od:
```

```

> print('y'=[y[1], y[2], y[3], y[4], y[5], y[6], y[7], y[8], y[9], y[10], y[11]]);
      T := [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0]
y[1] := 1
n=1, T[n]=0, y[n]=1, G(y[n], T[n]) (T[n+1]-T[n])=0.
n=2, T[n]=0.1, y[n]=1., G(y[n], T[n]) (T[n+1]-T[n])=0.005000000000
n=3, T[n]=0.2, y[n]=1.005000000, G(y[n], T[n]) (T[n+1]-T[n])=0.01005000000
n=4, T[n]=0.3, y[n]=1.015050000, G(y[n], T[n]) (T[n+1]-T[n])=0.01522575000
n=5, T[n]=0.4, y[n]=1.030275750, G(y[n], T[n]) (T[n+1]-T[n])=0.02060551500
n=6, T[n]=0.5, y[n]=1.050881265, G(y[n], T[n]) (T[n+1]-T[n])=0.02627203162
n=7, T[n]=0.6, y[n]=1.077153297, G(y[n], T[n]) (T[n+1]-T[n])=0.03231459891
n=8, T[n]=0.7, y[n]=1.109467896, G(y[n], T[n]) (T[n+1]-T[n])=0.03883137636
n=9, T[n]=0.8, y[n]=1.148299272, G(y[n], T[n]) (T[n+1]-T[n])=0.04593197088
n=10, T[n]=0.9, y[n]=1.194231243, G(y[n], T[n]) (T[n+1]-T[n])=0.05374040595
y= [1, 1., 1.005000000, 1.015050000, 1.030275750, 1.050881265,
1.077153297, 1.109467896, 1.148299272, 1.194231243, 1.247971649]

```

```

> with(plots):
pointsy:= [seq([T[n], y[n]], n=1..11)]:
R1:=plot(pointsy, style=point,
legend="calcul numérique de y[n]"
):
R2:=plot(pointsy,
color=blue,
title="la méthode d'Euler",
legend="y[n+1]=y[n]+(T[n+1]-T[n])T[n]y[n]/2"
):
display(R1, R2):
> with(DEtools):
ode:=diff(Y(x), x)=x*Y(x)/2;
dsolve(ode, Y(x));
with(plots):
C:=plot(exp(1/4*x^2), x=0..1, color=gold,
legend='Solution théorique d'une équation différentielle ordinaire',
thickness=2):
C1:=dfieldplot(ode, Y(x), x=0..1,
Y=1..1.5,
color=Y*exp(-1/4*x^2)):
R3:=DEplot(diff(Y(x), x)=x*Y(x)/2, Y(x), x=0..1, [[Y(0)=1]],
color=Y*exp(-1/4*x^2),
linecolor=[gold]
):
display(R1, R2, C, C1);

```

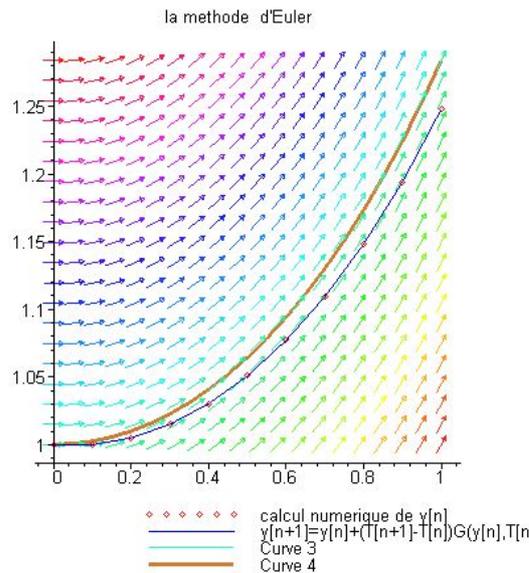


Fig.: 5. Solution théorique $y = e^{(1/4)t^2}$ de $y' = ty/2$, $y(0) = 1$, et solution numérique (par la méthode d'Euler : $y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n)G(y_n, t_n)$ ($G(y, t) = ty/2, n = 1, \dots, N.$)

Solutions stationnaires et positions d'équilibre

Revenons maintenant dans la suite de cette section au cas autonome $y' = F(y)$. Une solution est dite stationnaire si $y(t)$ est constante. Cela correspond en mécanique à ce qu'on appelle les positions d'équilibre. Ici les solutions stationnaires sont faciles à déterminer : $y(t) = c$ est stationnaire si et seulement si $F(c) = 0$. On s'attachera donc dans un premier temps à déterminer les solutions de $F(y) = 0$ qui en général partagent l'intervalle de définition de F en sous-intervalles où F est de signe constant. Ces signes vont jouer un rôle important dans l'étude qualitative. Soient $a < b$ deux solutions consécutives de $F(y) = 0$. Si $a < y_0 < b$, la solution du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ est entièrement comprise entre a et b . Si son graphe croisait la droite $y = a$, on aurait non unicité pour le problème de Cauchy. On en déduit que les solutions non stationnaires sont strictement monotones et donc inversibles : on peut ainsi les voir comme des fonctions $t(y)$.

Partie II. Systemes dynamiques et equations differentielles

Systemes dynamiques : un langage pour la modelisation.

Qu'est ce qu'un systeme dynamique ?

Systemes dynamiques discrets

Systemes dynamiques continus

Comportement qualitatif et stabilite

Etude de stabilite pour un systeme dynamique discret

Application : systemes ecologiques

Le modele de Volterra-Lotka.

Cours N°9,

II. Systemes dynamiques : un langage pour la modelisation
(voir [DDGR], p.5)

Depuis le 17e siecle, les scientifiques ont utilise les **equations differentielles** et les equations aux derivees partielles comme langage de modelisation.

Newton, Leibniz, Euler, les Bernoulli ont cree les premieres bases de la theorie. Depuis, les scientifiques n'ont pas cesse de perfectionner le langage, les outils, les methodes.

Modélisation

Rappelons que de point de vue mathématique, une modélisation est la donnée de :

- ▶ T est le temps (soit un ensemble discret
 $T = \{t_l = lh \mid l \in \mathbb{Z}, h > 0 \text{ une constante fixée}\}$, soit
 $T = \{t_l = lh \mid l \in \mathbb{N}, h > 0 \text{ une constante fixée}\}$ soit
 $T = \mathbb{R}$ (ou $T = \mathbb{R}_{\geq 0}$) donc $t + s \in T$ pour tout $t, s \in T$).
- ▶ L'espace M (dit **l'espace des phases**) dont les points sont des vecteurs
 $X = (x, y, \dots) \in M$, où x, y, \dots sont des quantités numériques, souvent
appelées **variables ou observables**, qui caractérisent un état de système
dynamique en question.
- ▶ Un **processus dynamique** est une fonction mathématique $f : T \rightarrow M$,
 $f : t \mapsto (x(t), y(t), \dots) \in M$, telle que $f = f_{X_0}$ satisfait une **loi dynamique**
avec la propriété $f(0) = X_0$, où X_0 est l'**état initial** du processus.

Espace des phases

La formulation exacte des principes généraux ci-dessus fait appel aux notions d'espace des phases (espaces de configurations). On a vu déjà la notion de processus **déterministe** : toute son évolution et son passé sont univoquement définis par son état présent.

L'ensemble de tous les états d'un tel processus s'appelle **espace de phases**.

Voyons un exemple où la seule introduction de l'espace des phases permet de résoudre un exercice épineux.

Exemple d'utilisation de l'espace des phases (voir [ArnED], p.12)

Exemple (6.1)

Les villes A et B sont reliées par deux routes ne se coupant nulle part. On sait que deux mobiles empruntant chacun l'une de ces voies et liés entre eux par une ficelle d'une longueur inférieure à $2l$, peuvent se rendre de A en B sans rompre cette ficelle. On se demande si deux véhicules sphériques de rayon l , dont les centres se déplacent sur chacune de ces routes, l'un à la rencontre de l'autre, peuvent se croiser sans se heurter.

Solution : Examinons le carré $M = \{x_1, x_2 \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$. On peut représenter la position de deux mobiles (l'un se déplaçant sur la première route, l'autre sur la seconde) par un point du carré M : il suffit pour cela de désigner par x_i la fraction de distance AB parcourue par la route i en partant de A .

Toutes les positions des deux mobiles sont représentées par des points du carré M . Ce carré est appelé *espace des phases* et ses points *points représentatifs*. Par conséquent, à chaque déplacement des mobiles correspond le déplacement d'un point représentatif dans l'espace des phases.

Utilisation de l'espace des phases

Les mobiles partent de la ville A que nous supposons correspondre à l'angle inférieur gauche du carré ($x_1 = x_2 = 0$), quant à leur déplacement de A en B , il est représenté par la courbe qui mène à l'angle opposé. De la même manière les véhicules sphériques partant de l'angle inférieur droit ($x_1 = 0, x_2 = 1$), quant à leur mouvement, il est représenté par la courbe conduisant à l'angle opposé du carré.

Or dans un carré deux courbes quelconques joignant des sommets opposés se coupent. Par conséquent, quel que soit le mouvement des véhicules sphériques, il arrivera un instant où ils occuperont une position déjà occupée par le couple des mobiles. Á cet instant la distance séparant les centres des véhicules sphériques sera inférieure à $2l$. De sorte qu'il leur est impossible de ne pas se heurter. ■

Dans cet exemple, le raisonnement est proche de ceux dans la théorie qualitative d'équations différentielles : il est très utile d'assimiler les états d'un processus à un point d'un espace convenable.

Opérateur d'évolution

Si donc M est un espace de configurations (espace de phases) nous pouvons considérer l'évolution temporelle du système à partir d'une position initiale $X_0 \in M$ occupée par le système au temps t_0 , Si ce système se trouve à une position $X_1 \in M$ au temps t_1 , on pose $X_1 = \varphi_{t_1, t_0}(X_0)$, où $\varphi_{t_1, t_0} : M \rightarrow M$ est dit **l'opérateur d'évolution**.

Si cet opérateur ne dépend pas du temps initial, c'est-à-dire qu'il ne dépend que de $t = t_1 - t_0$, on le note φ_t .

Propriétés supplémentaires (déterministes) de l'opérateur d'évolution :

$\varphi_{t_2, t_1} \circ \varphi_{t_1, t_0} = \varphi_{t_2, t_0}$, et $\varphi_{t, t} = \text{Id}$. Cette propriété dit $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{a+b}$, $\varphi_0 = \text{Id}$ pour un système autonome (indépendant de temps), où $a = t_2 - t_1$, $b = t_1 - t_0 \in T$. Ici le temps T est vu comme un ensemble vérifiant les propriétés : $0 \in T$, si $a, b \in T$ alors $a + b \in T$.

Exemple (6.2)

Soit $M = T = \mathbb{R}$, alors $\varphi_t(X) = Xe^t$ est un opérateur d'évolution : pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\varphi_a \circ \varphi_b(X) = Xe^b e^a = \varphi_{a+b} = Xe^{a+b}$.

Définition d'un système dynamique

Pour un opérateur d'évolution autonome on note : $\varphi_t(X) := \Phi(t, X)$. Autrement dit, $\Phi(t, X) = f_X(t)$, où $f = f_X : M \rightarrow M$ est la fonction du processus dynamique avec l'état initiale $f_X(0) = X \in M$.

Définition (6.3)

Un **système dynamique** est un triplet (M, T, Φ) , dans lequel M est l'espace de configuration, T est le temps. et $\Phi : T \times M \rightarrow M$ est une application telle que :

$$\forall X \in M, \forall s, t \in T, \Phi(t, \Phi(s, X)) = \Phi(s + t, X), \Phi(0, X) = X.$$

L'application $\Phi : T \times M \rightarrow M, (t, X) \mapsto \Phi(t, X)$ est appelé **flot** du système dynamique (M, T, Φ) .

Pour un système dynamique, on note $\varphi_t(X) := \Phi(t, X)$, un ensemble $\{\varphi_t\}_{t \in T}$ des applications $\varphi_t : M \rightarrow M$ vérifiant $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$.

Flots, orbites et dynamique : cas discret ([DDGR], p.19)

On considère le temps $T = \mathbb{Z}$. Dans ce cas un flot discret Φ est une application $\Phi : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M, (k, X) \mapsto \Phi(k, X)$, telle que

- ▶ toutes les applications $\varphi_k = \Phi(k, \cdot) : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M, X \mapsto \Phi(k, X)$ sont suffisamment régulières,
- ▶ $\forall X \in M, \Phi(0, X) = \text{Id}(X) = X$
- ▶ $\forall X \in M, \forall k, l \in \mathbb{Z}, \Phi(l, \Phi(k, X)) = \Phi(k + l, X)$ (cette propriété est appelée déterminisme du système).

Définition (6.4, orbite d'un flot discret)

Pour un flot $\Phi : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ l'ensemble

$\mathcal{O}_\Phi(X_0) = \{\Phi(k, X_0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est dit l'orbite de X_0 , et $\Phi(k, X_0)$ le k^{e} point de l'orbite de X_0 .

La fonction dynamique (cas déterministe)

Définition (6.5, la fonction dynamique)

Soit (M, \mathbb{Z}, Φ) un système dynamique discret, on pose

$$\varphi(X) = \Phi(1, X),$$

alors $\varphi : M \rightarrow M$ une application appelée **dynamique** du système, et on a

$\Phi(k, X_0) = \varphi^k(X_0)$ (la k^{e} itération de φ), et

$\Phi(-k, X_0) = (\varphi^{-1})^k(X_0)$ (la k^{e} itération de l'application inverse φ^{-1} pour tout entier positif k).

Exemple (6.6)

Soit $\varphi : M \rightarrow M$ une bijection, on pose $\Phi(k, X_0) = \varphi^k(X_0)$ (la k^{e} itération de φ), et

$\Phi(-k, X_0) = (\varphi^{-1})^k(X_0)$ (la k^{e} itération de l'application inverse φ^{-1} pour tout entier positif k).

Cas discret semi-déterministe

On considère le temps $T = \mathbb{N}$. Dans ce cas un flot discret Φ est une application $\Phi : \mathbb{N} \times M \rightarrow M, (k, X) \mapsto \Phi(k, X)$, telle que

- ▶ toutes les applications $\varphi_k = \Phi(k, \cdot) : \mathbb{N} \times M \rightarrow M, X \mapsto \Phi(k, X)$ sont suffisamment régulières,
- ▶ $\forall X \in M, \Phi(0, X) = \text{Id}(X) = X$
- ▶ $\forall X \in M, \forall k, l \in \mathbb{N}, \Phi(l, \Phi(k, X)) = \Phi(k + l, X)$ (cette propriété est appelée semi-déterminisme du système).

Remarque

Il se peut que la fonction dynamique semi-déterministe

$$\varphi = \varphi_1 : M \rightarrow M$$

ne soit pas bijective, puisque $\varphi_k(X) = \Phi(k, X) = \varphi^k(X)$, mais $k = -1 \notin \mathbb{N}$, donc φ^{-1} n'est pas définie par $\Phi(k, X)$ (voir l'exemple suivant).

Exemple : un système dynamique discret semi-déterministe

Exercice (6.8, voir [YCV], p.42)

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ l'application linéaire par morceaux définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Tracer le graphe de φ et de $\varphi^{\circ 2} = \varphi \circ \varphi$.
- (b) Calculer les points fixes et les points périodiques de période 2 de φ .
- (c) Montrer que la composition de fonctions affines est encore affine et en déduire le graphe de φ^n .

Cours N°10,

Points fixes et points périodiques

Soient M un ensemble et $\varphi : M \rightarrow M$ une application,
 $\Phi : \mathbb{N} \times M \rightarrow M$ le système dynamique associé (rapellons que
 $\Phi(k, x) = \varphi^{\circ k}(x)$ pour tous $(k, x) \in \mathbb{N} \times M$).

Définition (6.9)

Un point $X^* \in M$ est dit point fixe de φ si $\varphi(X^*) = X^*$.

Un point $X^* \in M$ est un point périodique de φ s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi^N(X^*) = X^*$, et $\varphi(X^*) \neq X^*$. Le plus petit N qui vérifie cette égalité est appelé la **période** de X^* .

103

Stabilité des points fixes

Définition (6.10, un point fixe stable)

Un point fixe $X^* \in M$ est dit stable, si

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, tel que $|X_0 - X^*| < \delta \implies \forall k \geq 0, |X_k - X^*| < \varepsilon$.

Exemple

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ l'application linéaire par morceaux définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Tracer le graphe de φ et de $\varphi^{\circ 2} = \varphi \circ \varphi$.

(b) Calculer les points fixes et les points périodiques de période 2 de φ .

104

Cas continu

Un flot Φ sur un ouvert $M \subset \mathbb{R}^n$ est une application

$\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, (t, X) \mapsto \Phi(t, X)$ suffisamment régulière, telle que

- ▶ $\forall X \in M, \Phi(0, X) = \text{Id}(X) = X$
- ▶ $\forall X \in M, \forall s, t \in \mathbb{R}, \Phi(t, \Phi(s, X)) = \Phi(s + t, X)$

Pour un **flot continu** Φ on obtient une famille $\varphi_t(X) := \Phi(t, X)$, des fonctions dynamiques $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}, \varphi_t : M \rightarrow M$ vérifiant $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$.

Définition (6.12, orbite ou trajectoire d'un flot continu)

- Pour un flot $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ l'ensemble

$\mathcal{O}_\Phi(X_0) = \{\Phi(t, X_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est dit l'orbite ou trajectoire de X_0 .

- X_0 est un point fixe ou point d'équilibre du flot si $\mathcal{O}_\Phi(X_0) = X_0$;

- Une trajectoire périodique du flot Φ est une trajectoire représenté par une courbe fermé : il existe $P > 0$ tel que $\Phi(P, X) = X$. La valeur minimale de P qui convient est appelé période de X .

Propriétés des trajectoires

Pour un système autonome, les trajectoires sont disjointes ou confondues dans l'espace des phases : en effet si deux trajectoires se coupent en un point \bar{X} ,

$\exists(t_1, X_1) \in \mathbb{R} \times M, \exists(t_2, X_2) \in \mathbb{R} \times M$ tels que

$$\begin{cases} \bar{X} = \Phi(t_1, X_1) \\ \bar{X} = \Phi(t_2, X_2), \end{cases}$$

alors

$$\Phi(t_1, X_1) = \Phi(t_2, X_2), \text{ et } X_2 = \Phi(-t_2, \Phi(t_2, X_2)) =$$

$$\Phi(-t_2, \Phi(t_1, X_1)) = \Phi(t_1 - t_2, X_1),$$

i.e. $X_2 \in \mathcal{O}_\Phi(X_1)$, donc $\mathcal{O}_\Phi(X_2) \subset \mathcal{O}_\Phi(X_1)$, et de même $\mathcal{O}_\Phi(X_1) \subset \mathcal{O}_\Phi(X_2)$, ce qui signifie que les trajectoires sont confondues.

Comportement des solutions d'une équation différentielle ; orbites (voir [YCV], p.9)

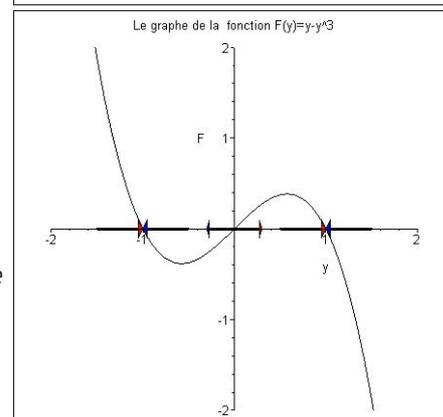
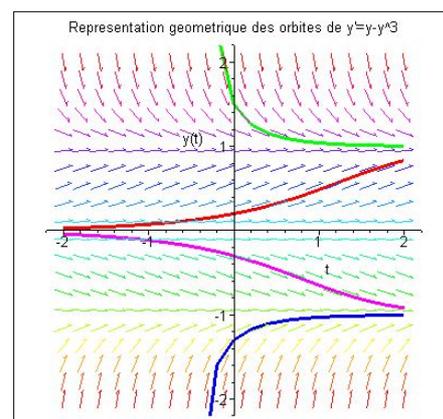
On remarque que si $y(t)$ est une solution d'une équation différentielle autonome, et $c \in \mathbb{R}$, $y(t - c)$ en est une autre. Cela implique en général, qu'il n'y a qu'un nombre fini de solutions à considérer qui chacune parcourt un des intervalles où F est de signe constant. Considérons par exemple un intervalle $]a, b[$ où $F > 0$ et $F(a) = F(b) = 0$. Soit $y(t)$ une solution telle que $a < y(0) < b$. Alors on peut montrer que la solution maximale du problème de Cauchy satisfait $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = b$ et $y(t)$ est strictement croissante sur \mathbb{R} . L'orbite correspondante parcourt donc $]a, b[$. On peut la représenter géométriquement en marquant l'intervalle $]a, b[$ d'une flèche vers la droite.

107

Stabilité

Soit a tel que $F(a) = 0$ et $F'(a) > 0$, on déduit de ce qui précède que si $y(t_0) \neq a$ est proche de a , $y(t)$ s'éloigne de a lorsque $t \rightarrow +\infty$. Plus précisément, soit $b < a < c$ tel que $F > 0$ sur $]a, c[$ et $F < 0$ sur $]b, a[$. Il existe $t_1 > t_0$ tel que $y(t) \notin [b, c]$ pour $t \geq t_1$. La solution stationnaire $y(t) = a$ est dite *instable* (par exemple, $a = 0$ pour $F(y) = y - y^3$).

Soit, au contraire a tel que $F(a) = 0$ et $F'(a) < 0$. Soit $b < a < c$ tel que $F < 0$ sur $]a, c[$ et $F > 0$ sur $]b, a[$. Alors si $y(t_0) \in [b, c]$, $y(t) \rightarrow a$ quand $t \rightarrow +\infty$. La solution stationnaire $y(t) = a$ est alors dite *stable* (par exemple, $a = \pm 1$ pour $F(y) = y - y^3$).



108

Le cas des intervalles infinis est plus délicat :

- ▶ Supposons d'abord $F(a) = 0$ et $F(y) > 0$ sur $]a, +\infty[$, alors les solutions maximales sont définies sur un intervalle du type $I =]-\infty, T_0[$ avec T_0 fini ou non. Sur I , $y(t)$ est strictement croissante et si $T_0 < \infty$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow T_0} y(t) = +\infty$$

- ▶ Supposons $F(a) = 0$ et $F(y) < 0$ sur $]a, +\infty[$, alors les solutions maximales sont définies sur $]T_0, +\infty[$ et satisfont

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = a$$

109

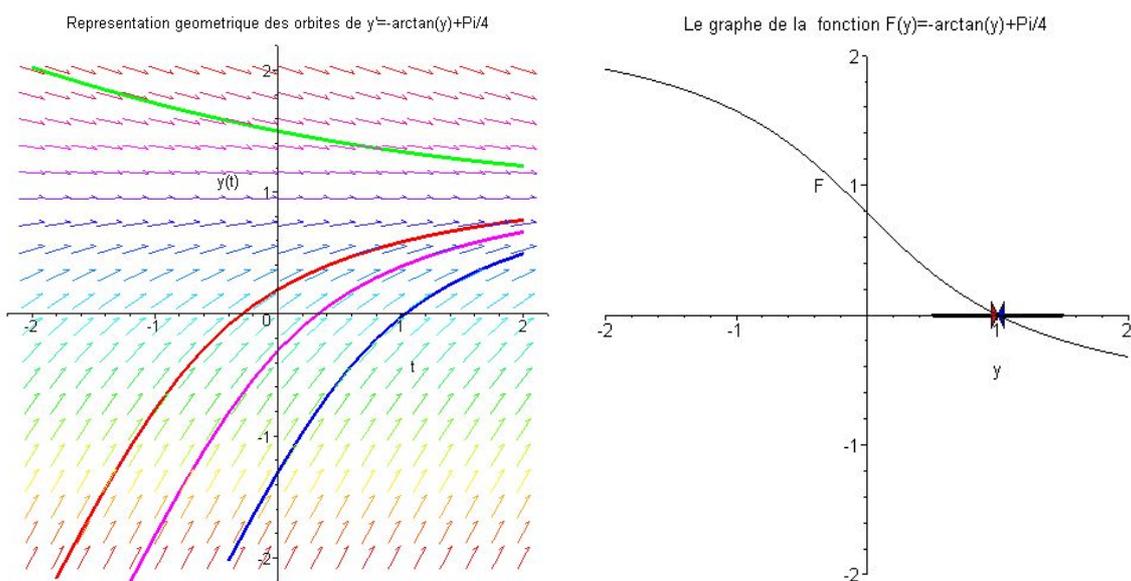


Fig.: 6. Le point $y = 1$ est stable pour $y' = -\arctan(y) + \frac{\pi}{4}$

110

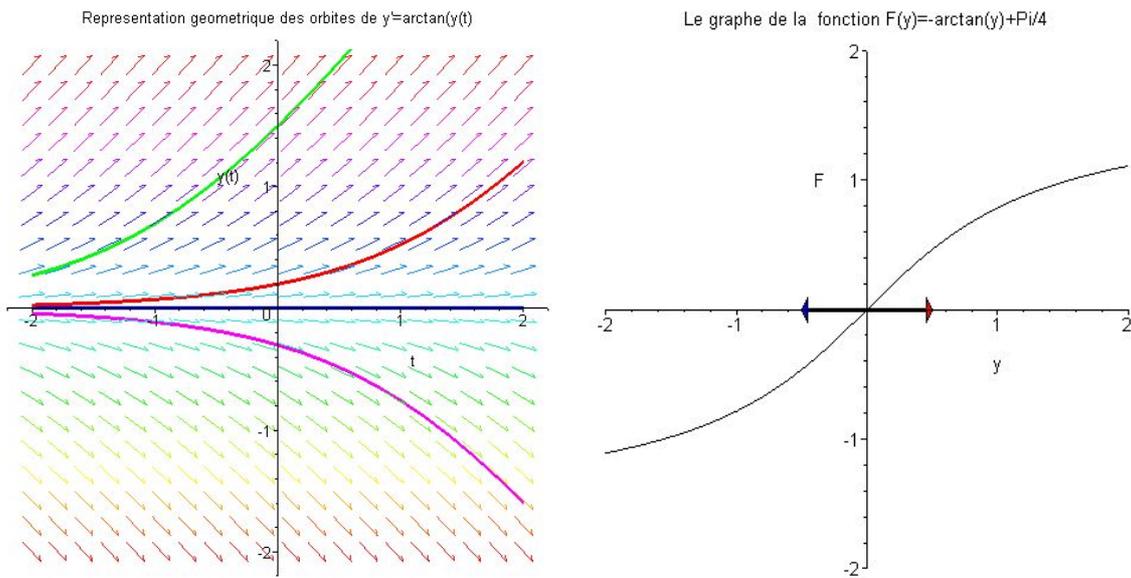


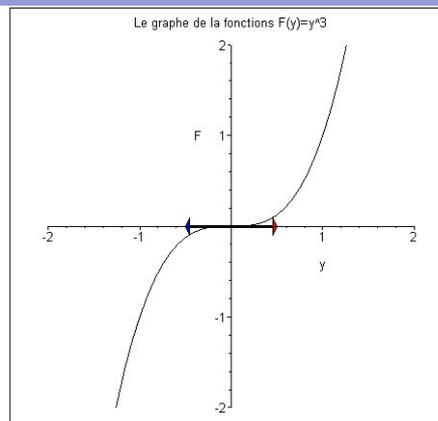
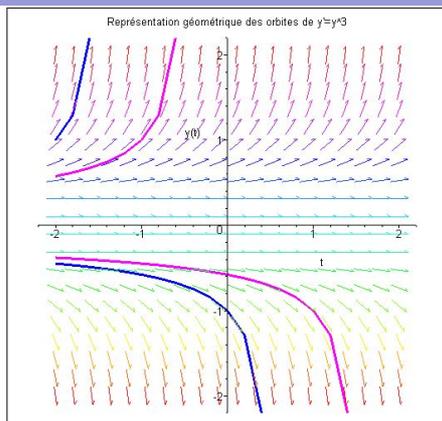
Fig.: 7. Le point $y = 0$ est instable pour $y' = \arctan(y)$

Lorsque la dérivée s'annule et que $F(a) = 0$,
 on a une stabilité dès que $F(y) > 0$
 pour $y < a$ proche de a , et
 $F(y) < 0$ pour $y > a$ proche de a .
 On a instabilité dès que $F(y) < 0$
 pour $y < a$ proche de a ou
 $F(y) > 0$ pour $y > a$ proche de a .
 L'avantage de l'étude précédente est
 qu'elle permet de prévoir la liste des orbites
 et la stabilité des orbites stationnaires.

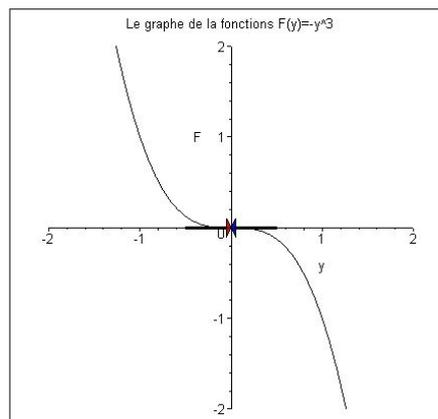
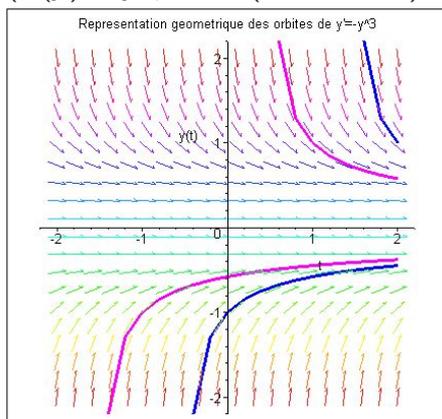
Exemples :

$F(y) = y^3, a = 0$ (cas instable), $F(y) = -y^3, a = 0$ (cas stable),
 $F(y) = y^2, a = 0$ (cas instable), $F(y) = -y^2, a = 0$ (cas instable).

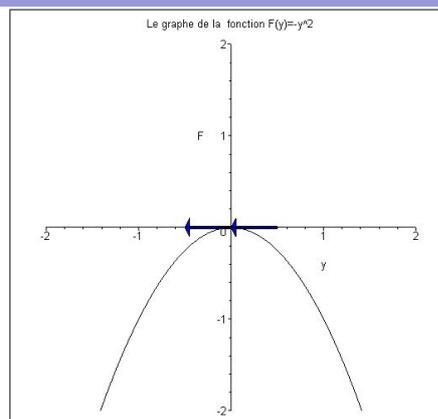
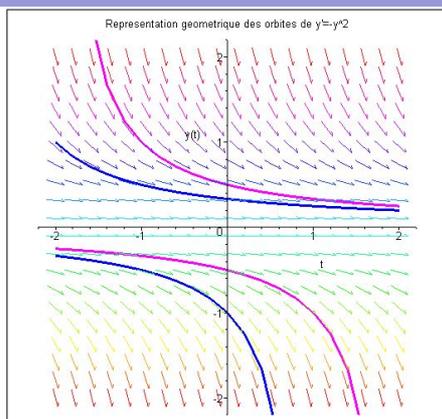
Soit a un point stationnaire stable, le bassin d'attraction de a est l'ensemble des données de Cauchy telles que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = a$, c'est un intervalle contenant a et facile à déterminer avec les considérations précédentes.



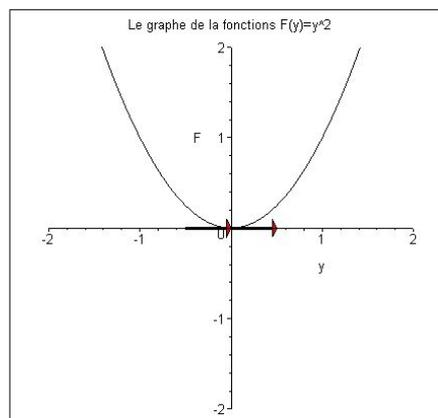
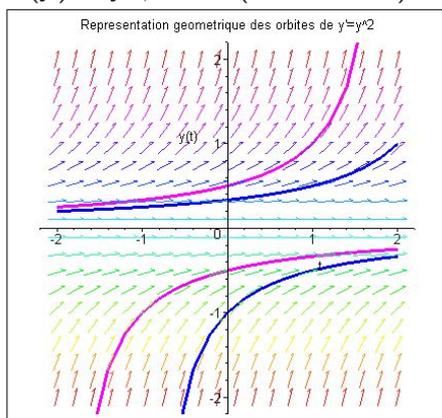
$(F(y) = y^3, a = 0$ (cas instable)



$(F(y) = -y^3, a = 0$ (cas stable))



$F(y) = y^2, a = 0$ (cas instable)



$F(y) = -y^2, a = 0$ (cas instable)

Étude de stabilité pour un système dynamique discret

Exercice (6.1, une fonction dynamique)

Considérons $\varphi(x) = \gamma x(1 - x)$. Pour quelles valeurs de γ la fonction φ applique-t-elle l'intervalle $I = [0, 1]$ sur lui-même ? Pour une telle valeur, trouver les points fixes de φ ainsi que les trajectoires de période 2. Étudier leur stabilité en fonction de γ .

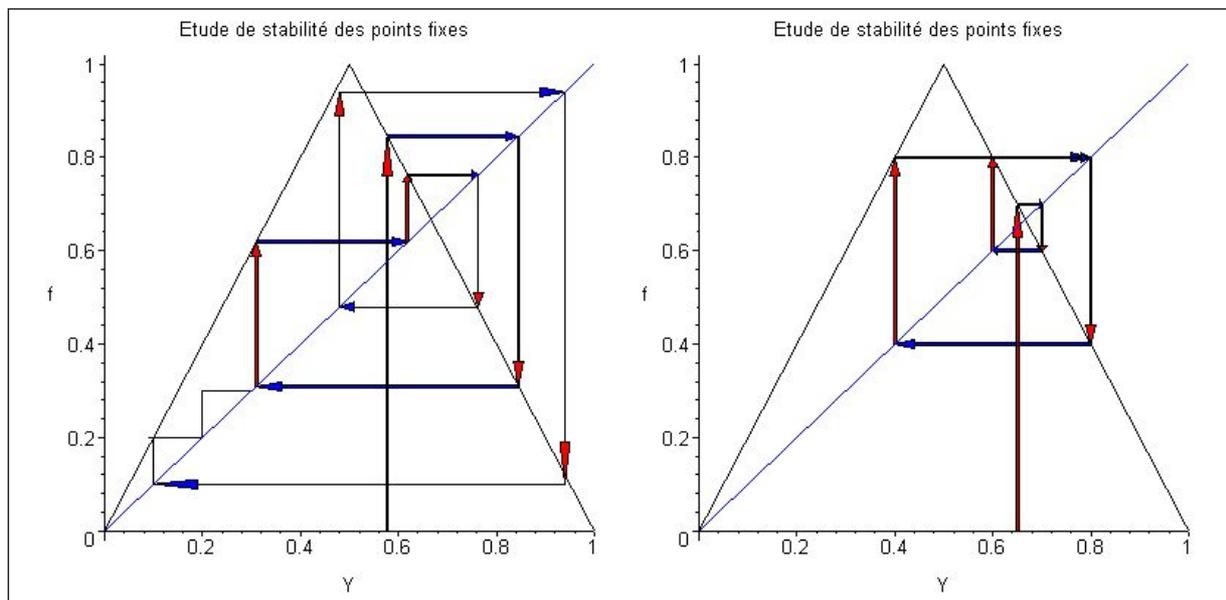
Exercice (6.2, un système dynamique discret, voir [YCV], p.42)

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ l'application linéaire par morceaux définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Calculer les points fixes et les points périodiques de période 2 de φ .
- (b) Étudier leur stabilité en utilisant le graphe de φ^n .

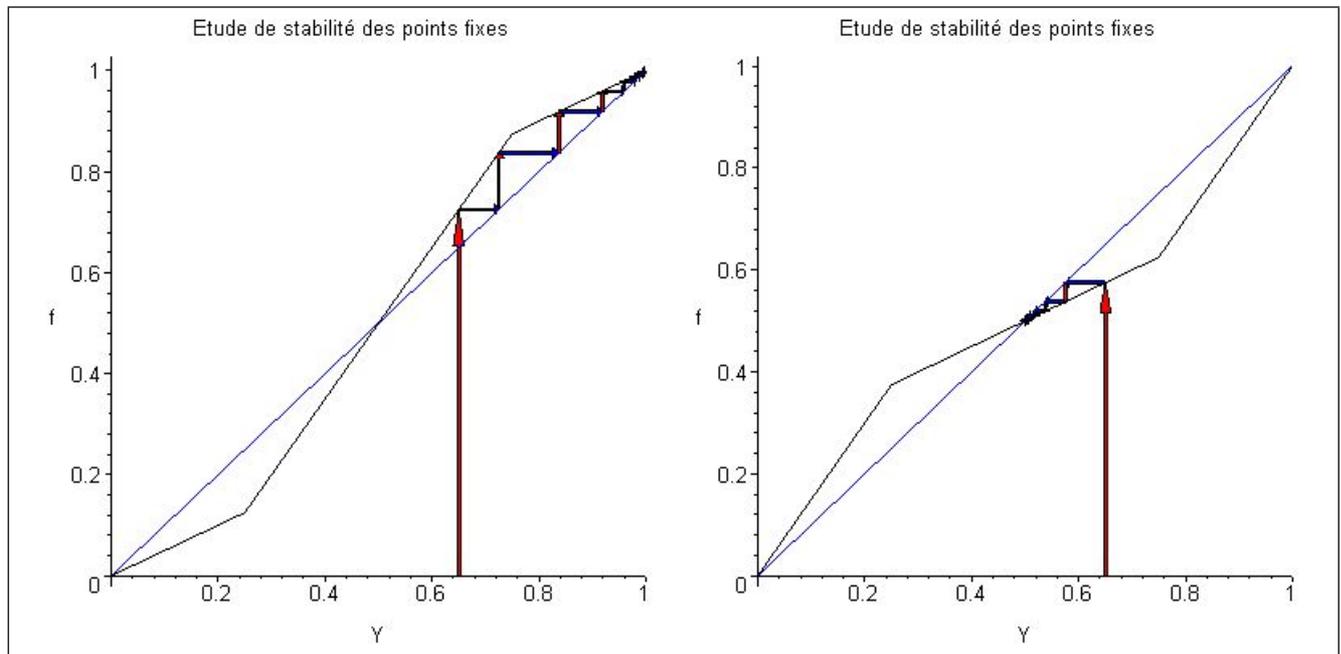
Cas $\lambda = -2 < -1$ (instable) ou périodique, $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $y_0 = \frac{13}{20}$



Les valeurs de $y_n := \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, -2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}, \dots, 592 - \frac{1024\sqrt{3}}{3} \right]$
 $\approx [0.5773, 0.845, 0.309, 0.619, 0.763, 0.48, 0.94, 0.10, 0.2, 0.3]$

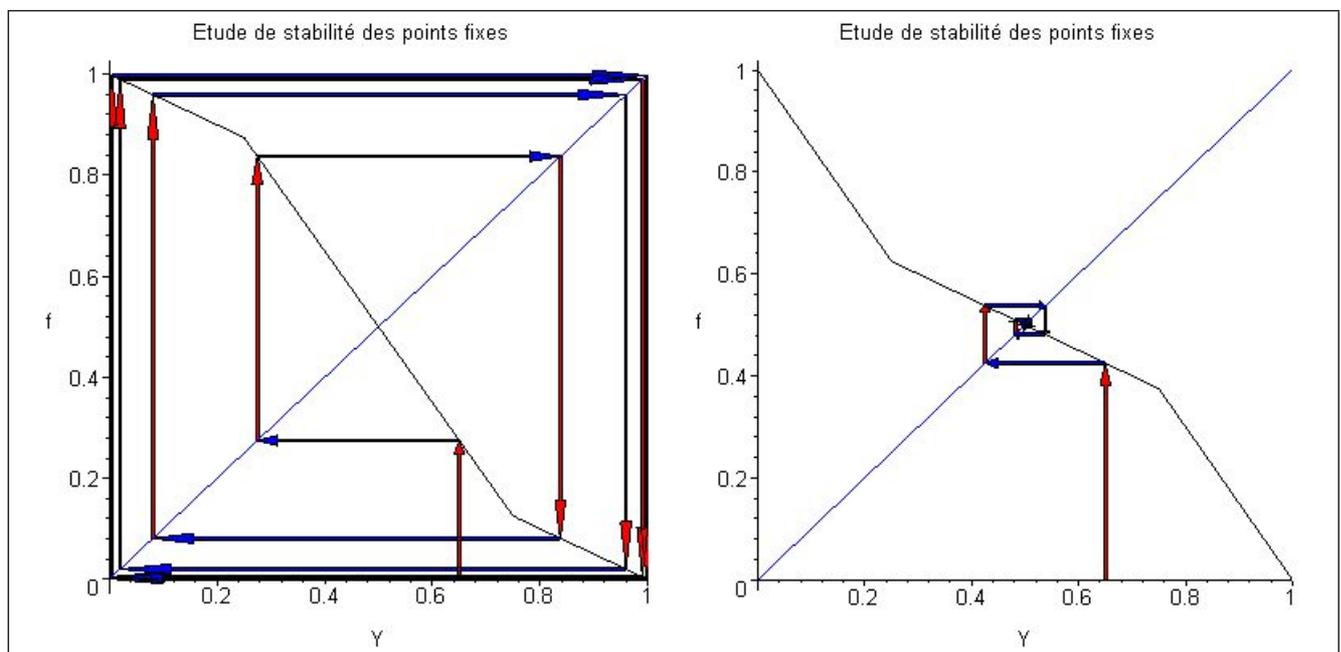
Cas $\lambda = 4/3 > 1$ (instable) et $\lambda = 1/2, |\lambda| < 1$ (stable),

$$y_0 = \frac{13}{20}$$



117

Cas $\lambda = -4/3 < -1$ (instable) et $\lambda = -1/2, |\lambda| < 1$ (stable), $y_0 = \frac{13}{20}$



118

Cours N°11,

Exemple : systèmes écologiques (modèle de Lotka-Volterra)

Nous allons présenter un modèle d'évolution dynamique de population, donné par un système d'équations différentielles (voir [Pajot], Ch.VII, p.14). Il s'agit donc d'un modèle d'évolution de 2 populations : les proies dont le nombre vaut $u > 0$ et les prédateurs dont le nombre vaut $v > 0$.

Umberto d'Ankona qui était un des responsables de la pêche italienne pendant la Première Guerre Mondiale avait remarqué (en regardant les données statistiques en sa possession) que la population de requins et autres prédateurs qu'on attrapait était inférieure pendant la guerre à ce qu'elle était avant et après la guerre, période où la pêche était alors réduite.

Vito Volterra, qui avait été contacté par D'Ankona, proposa, au début des années 1920, l'explication suivante.

119

Soit $u(t)$ le nombre de poissons (pour nous, des sardines) et $v(t)$ le nombre des prédateurs (pour nous, des requins).

Supposons que

- ▶ (i) Les sardines ont assez de nourriture et seul les requins s'opposent à la croissance de leur population.
- ▶ (ii) Le nombre de requins dépend du nombre de sardines dont ils disposent pour manger.

De plus Volterra suppose

- ▶ (iii) qu'en absence de requins, le nombre de sardines croît exponentiellement, c'est à dire u satisfait $u' = au$ et que
- ▶ (iv) le nombre de requins en absence des sardines décroît exponentiellement, c'est à dire v satisfait $v' = -pv$ pour une constante $p > 0$.

Comment traiter leur "vie commune" ? Le nombre des rencontres est supposé dépendre du produit uv , il est défavorable pour les sardines et favorable pour les requins. Donc, il existe $b, q > 0$ tels que

$$\begin{cases} u' = au - buv \\ v' = -pv + quv \end{cases}$$

120

En général, il s'agit d'un modèle d'évolution de 2 populations : les proies dont le nombre vaut $u > 0$ et les prédateurs dont le nombre vaut $v > 0$. On pose

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = au - buv \\ \frac{dv}{d\tau} = -pv + quv \end{cases} \quad (7.1)$$

où a est le taux de croissance de la population de proies en l'absence de prédateurs et p le taux de décroissance des prédateurs en l'absence de proies.

Le modèle (7.1) est connu sous le nom **modèle de Lotka-Volterra** parce que les mêmes équations ont été dérivées par A.J.Lotka (1920) à partir d'une réaction chimique hypothétique qui manifestait un comportement périodique des concentrations chimiques.

Étude de solutions

Les changements $x = qu/p, y = bv/a, t = \tau/a, \alpha = p/a$ conduisent au système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - y) \\ \frac{dy}{dt} = \alpha y(x - 1) \end{cases}$$

Ce système admet le point singulier (1,1). On pose $f(u) = \ln(ue^{-u})$ et on vérifie que la fonction

$$\Phi(x, y) = f(y) + \alpha f(x)$$

est constante le long des orbites. De l'allure du graphe de f , on déduit l'endroit, où toutes les orbites sont périodiques. Cela implique que les 2 populations sont des fonctions périodiques du temps dont les maxima sont décalés, ce qui est conforme à certaines observations. Pour les détails, consulter [Murr89] chapitre 3.

Intégrale première du système de Volterra-Lotka

Exemple

a) Vérifier que $f(x, y) = x^\alpha y e^{-\alpha x - y}$ est une intégrale première du système de Volterra-Lotka :

$$\begin{cases} x' = x(1 - y) \\ y' = \alpha y(x - 1) \end{cases} \quad (7.2)$$

considéré dans le quart de plan $x > 0, y > 0$.

b) Tracer les courbes de niveaux $f = 0$ et $f = e^{-2}$. Montrer (*) que, pour $0 < a < e^{-2}$, les courbes de niveaux sont "fermées".

c) En déduire que les trajectoires du système (7.2) sont périodiques si la donnée initiale n'a aucune coordonnée nulle et est $\neq (1, 1)$.

123

Exemple de Mapleplot du modèle de Lotka-Volterra

```
> with(DEtools):
[diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)), diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1)];
```

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = x(t)(1 - y(t)), \\ \frac{d}{dt} y(t) = 0.3 y(t)(x(t) - 1) \end{cases}$$

```
> dfieldplot([diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),
diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1)],
[x(t),y(t)],t=-2..2, x=-1..2, y=-1..2, arrows=LARGE,
title='modèle de Lotka-Volterra',
color=[.3*y(t)*(x(t)-1),x(t)*(1-y(t)),.1]);
```

124

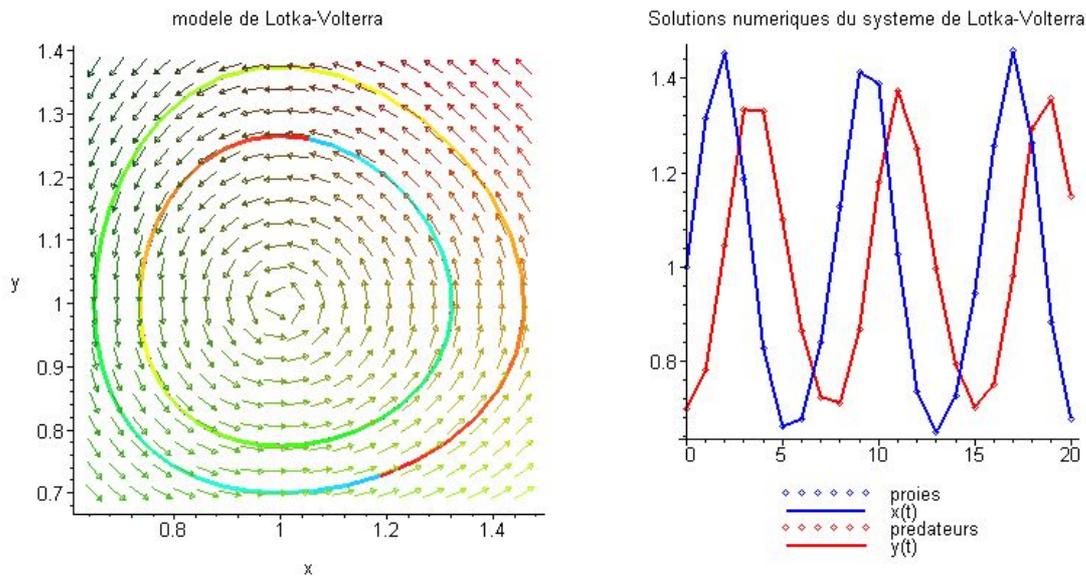


Fig.: 8

Exemples d'exercices pour TD

On considère le système
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t)(1 - y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = \alpha y(t)(x(t) - 1) \end{cases}$$

1) En considérant y comme fonction de x pour $x, y > 0$, déduire

$$\frac{y'_x(1 - y)}{y} = \alpha \frac{x - 1}{x} \Rightarrow (\ln |y| - y)'_x = \alpha(x - \ln |x|)'_x \Rightarrow (\ln |y|e^{-y}) + \alpha(\ln |x|e^{-x}) = C$$

2) On considère le système autour du point critique $(1, 1)$ (c'est-à-dire, un point où les parties droites s'annulent). On le remplace par un système linéaire en

remarquant que
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x(t) - 1 + 1)(1 - y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = (\alpha y(t) - 1 + 1)(x(t) - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} \approx 1 - y(t), \\ \frac{dy}{dt} \approx \alpha(x(t) - 1) \end{cases}$$

Remarquer que le dernier système linéarisé correspond au processus complexe périodique $t \rightarrow z(t) = x(t) + i\frac{y(t)}{\sqrt{\alpha}}$, tel que $z' = \sqrt{\alpha}i(z - 1 - \frac{i}{\sqrt{\alpha}})$. Trouver la période du système linéarisé.

Exemples d'exercices pour TD (suite)

On considère le modèle de Lotka-Volterra du système écologique

$$\text{lapin (L)/renard (R)} \begin{cases} \frac{dL}{d\tau} = aL(\tau) - bL(\tau)R(\tau), \\ \frac{dR}{d\tau} = -pR(\tau) + qL(\tau)R(\tau) \end{cases},$$

où a est le taux de croissance de la population de proies en l'absence de prédateurs et p le taux de décroissance des prédateurs en l'absence de proies.

3) Montrer que les trajectoires du couple $(L(\tau), R(\tau))$ sont des courbes fermées autour du point $(a/b, p/q)$, donc a/b est la **moyenne du nombre de prédateurs**, et p/q est la **moyenne du nombre de proies** (voir [Bert], p.93).

127

Exemples d'exercices pour TD (suite)

4) **Les effets d'intervention sur les populations** : supposons qu'on veuille diminuer le nombre des proies ; on pourra augmenter le nombre de prédateurs ; ceci revient à faire changer le point (L, R) de trajectoire (les coefficients (a, b, p, q) restants les même) ; cela ne change pas la moyenne d/c du nombre de proies.

Montrer qu'une telle intervention faite à un mauvais moment du cycle, lorsque $L(\tau) > p/q$ et $R(\tau) > a/b$, peut augmenter le nombre maximum de proie.

5) Une autre idée pour diminuer le nombre de proies, consiste à les éliminer par piégeage, traitement chimique, ... Cela revient à augmenter le nombre de décès dans chaque population, c'est-à-dire, à remplacer a par $a' < a$, p par $p' > p$, les coefficient b et q restant les mêmes. Montrer qu'une telle intervention augmente la moyenne des proies, ce qui est le contraire du résultat cherché.

128

Exemples d'exercices pour TD (suite)

6) On considère le modèle de Lotka-Volterra du système écologique

$$\text{lapin (L)/renard (R)} \quad \begin{cases} \frac{dL}{d\tau} = aL(\tau) - bL(\tau)R(\tau), \\ \frac{dR}{d\tau} = -pR(\tau) + qL(\tau)R(\tau) \end{cases} ,$$

où a est le taux de croissance de la population de proies en l'absence de prédateurs et d le taux de décroissance des prédateurs en l'absence de proies.

Montrer que les changements $x = qu/p, y = bv/a, t = \tau/a, \alpha = p/a > 0$

conduisent au système système linéarisé $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - y(t), \\ \frac{dy}{dt} = \alpha(x(t) - 1) \end{cases}$. Remarquer que

le dernier système linéarisé correspond au processus complexe périodique $t \rightarrow z(t) = x(t) + i\frac{y(t)}{\sqrt{\alpha}}$, tel que $z' = \sqrt{\alpha}i(z - 1 - \frac{i}{\sqrt{\alpha}})$. Trouver la période du système linéarisé. En déduire la période en la variable τ .

Partie III. Méthodes d'algèbre linéaire

Vecteurs et matrices.

Opérations sur les vecteurs et matrices.

Vecteurs propres, polynôme caractéristique.

Utilisation des nombres complexes.

Application aux équations différentielles et aux suites de récurrence.

Application aux équations différentielles.

Application aux suites de récurrence.

III. Algèbre linéaire.

Vecteurs et matrices. Opérations. Bases et déterminants.

Linéaire et non-linéaire

Les adjectifs "linéaire" et "non-linéaire" sont employés dans beaucoup de contextes. En gros et dans le langage courant, une transformation $X \rightarrow Y = F(X)$ est linéaire si elle est telle que les effets (Y) sont proportionnels aux causes (X). Par exemple dans la loi de Malthus, le taux d'accroissement de la population (l'effet) est proportionnel à la population (la cause). Dans une résistance électrique, l'intensité du courant (l'effet) est proportionnel à la différence de potentiel (la cause). Les lois non linéaires jouent un grand rôle en physique : par exemple l'énergie cinétique d'un projectile (ou d'une voiture) n'est pas une fonction linéaire de la vitesse (la cause), mais quadratique : $E = \frac{1}{2}mv^2$.

Dans un système dynamique, même déterministe, de petites causes (petites modifications des données initiales) peuvent avoir de grands effets dus à la non-linéarité. On a beaucoup parlé de l' "effet papillon" : le battement d'une aile de papillon en un point du globe terrestre pourrait au bout de quelque temps déclencher une tempête.

Le contexte mathématique approprié pour discuter la linéarité est celui des vecteurs et des applications linéaires. Nous ne l'aborderons qu'en dimension 1 ou 2 ci-dessous.

La dimension 1. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que F est linéaire si $\forall x \in \mathbb{R}, F(\lambda x) = \lambda F(x)$ (**proportionnalité**). En posant $F(1) = a$, on voit que $F(x) = ax$. On en déduit aussi $F(x + y) = F(x) + F(y)$. Cette propriété (**superposition**) devra être prise dans les axiomes en dimension ≥ 2 .

Vecteurs et déterminants

Dans la suite on notera sous la forme matricielle suivante le vecteur X de coordonnées x et y de \mathbb{R}^2 : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On définit la somme de 2 vecteurs par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ et le produit par un réel λ : $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Définition (9.1, déterminant)

Soient $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, on définit le déterminant $\det(V_1, V_2)$ par la

formule $\det(V_1, V_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$, noté aussi $\det(V_1, V_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$.

Interprétation géométrique : la valeur absolue du déterminant est l'aire du parallélogramme engendré par V_1 et V_2 . Son signe (s'il est non nul) est donné par l'orientation du couple V_1, V_2 .

Formule en géométrie euclidienne : on suppose ici que le plan \mathbb{R}^2 est euclidien orienté. Si θ est l'angle (V_1, V_2) , on a $\det(V_1, V_2) = \|V_1\| \|V_2\| \sin \theta$.

Bases et applications linéaires.

Indépendance : 2 vecteurs V_1, V_2 sont dits linéairement dépendants si l'un des 2 est nul ou s'ils sont proportionnels. Ils sont dits indépendants s'ils ne sont pas linéairement dépendants.

Proposition (9.2, critère d'indépendance linéaire)

V_1 et V_2 sont indépendants si et seulement si leur déterminant est non nul.

Définition (9.3, base)

Un couple (V_1, V_2) de 2 vecteurs est une base de \mathbb{R}^2 si tout vecteur X de \mathbb{R}^2 s'exprime de façon unique comme une combinaison linéaire $X = uV_1 + vV_2$.

Proposition (9.4, critère de base)

(V_1, V_2) est une base si et seulement si $\det(V_1, V_2) \neq 0$.

Exercice (9.5)

Montrer que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base et écrire le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sous la forme $X = uV_1 + vV_2$.

Applications linéaires

Définition (9.6, application linéaire)

Une application $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est dite linéaire si

$$(s) \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2, F(X + Y) = F(X) + F(Y)$$

et

$$(p) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^2; F(\lambda X) = \lambda F(X)$$

L'équation (s) est l'axiome de superposition et l'équation (p) l'axiome de proportionnalité.

Soit F linéaire et

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

alors

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$$

135

et donc F est déterminée par les 4 nombres $(a; b; c; d)$.

Forme matricielle d'une application linéaire

On écrit alors F sous la forme $F = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ qui est l'écriture matricielle de F . On dit aussi que $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est la matrice de F . Les colonnes de la matrice F sont les images des vecteurs de la base canonique.

Définition (9.7, déterminant)

On appelle déterminant de F le nombre $ad - bc$ et on note

$$\det(F) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Proposition (9.8)

Si F est une application linéaire, les 4 propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) F est injective
- (2) $F(X) = 0$ admet $X = 0$ comme unique solution
- (3) $\det(F) \neq 0$
- (4) F est bijective

136

Produit de deux matrices

La composée $K = M \circ L$ de 2 applications linéaires est encore linéaire et on peut calculer la matrice de la composée K à partir des matrices de M et L . On définit ainsi le produit de 2 matrices. De façon précise $(M \circ L) = (M)(L)$ où le produit est noté par juxtaposition. Ce produit est associatif comme la composition des applications :

$$(AB)C = A(BC)$$

mais pas commutatif; en général $AB \neq BA$.

Le produit de matrices est donné par la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Le produit est effectué ligne par colonne suivant la recette $(A, B) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = AC + BD$. On l'applique en calculant l'élément de la i -ème ligne et j -ème colonne du produit comme produit de la i -ème ligne de la 1-ère matrice par la j -ème colonne de la seconde.

137

Exemple (9.9)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

On vérifie que

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

Exercice (9.10)

- a) Ecrire la matrice M de l'application linéaire donnée par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+7y \end{pmatrix}$.
 b) Calculer $M^2 = M \cdot M$, $M^3 = M \cdot M^2$ et M^{-1} ($M \cdot M^{-1} = \text{Id}$).

Exercice (9.11)

On se place dans \mathbb{R}^2 .

- a) Soit V_1, V_2, V_3 3 vecteurs, 2 à 2 indépendants, tels que $V_1 + V_2 + V_3 = 0$. Montrer qu'il existe une application linéaire F telle que $F(V_1) = V_2$; $F(V_2) = V_3$, et $F(V_3) = V_1$. Montrer que $F \cdot F \cdot F = \text{Id}$. b) Réciproque?
 c) Trouver la matrice de F pour $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

138

Cours N°12, Vecteurs propres, polynôme caractéristique.

Vecteurs propres et valeurs propres. Si F est une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans lui-même, un vecteur $V \in \mathbb{R}^2$, *non nul*, est dit vecteur propre de F associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ si $F(V) = \lambda V$: Si $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre λ , on a

$$\begin{cases} (a - \lambda)x + cy = 0 \\ bx + (d - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

qui n'a de solutions non nulles que si son déterminant (celui de $F - \lambda \text{Id}$) s'annule :

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

ou

$$(1) \quad \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

139

L'équation caractéristique.

Cette équation (1) du second degré en λ s'appelle l'équation caractéristique de F . Si l'équation caractéristique admet deux racines (réelles) distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 2 vecteurs propres associés (V_1, V_2) forment une base de \mathbb{R}^2 . En effet 2 vecteurs propres proportionnels correspondraient à la même valeur propre (le cas hyperbolique).

Attention !! Les zéros de l'équation caractéristique peuvent ne pas être réels, mais ce qui suit se modifie simplement dans ce cas. Si on prend comme base (V_1, V_2), la matrice de l'application linéaire prend la forme simple

$$(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

140

Sous cette forme (dite diagonale), on peut calculer les puissances de l'application linéaire F . On a : $(F^n) = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$. Plus précisément, si V est un vecteur quelconque, on écrit $V = xV_1 + yV_2$ et on a $F^n(V) = x\lambda_1^n V_1 + y\lambda_2^n V_2$. On verra plus bas que cette base permet aussi de résoudre le système différentiel $X' = F(X)$.

Remarque. Dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ il y a deux possibilités :

(a) $F = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (cas scalaire)

(b) Il existe deux vecteurs (V_1, V_2) qui forment une base de \mathbb{R}^2 , et tels que $F(V_1) = \lambda V_1$, $F(V_2) = \lambda V_2 + V_1$ (cas parabolique) (en exercice)

Utilisation des nombres complexes.

Le cas des valeurs propres complexes conjuguées (cas elliptique).

Dans le cas où les valeurs propres sont complexes, elles sont conjuguées et on peut choisir 2 vecteurs propres à composantes complexes conjuguées W_1 et $W_2 = \overline{W_1}$. Si V est réel et qu'on décompose V sur W_1, W_2 , on a : $V = xW_1 + yW_2$ où $y = \bar{x}$ est le complexe conjugué de x .

Application aux systèmes linéaires d'équations différentielles : résolution générale.

On considère un système linéaire d'équations différentielles à coefficients constants écrite sous la forme matricielle :

$$\frac{dX}{dt} = AX, X(0) = X_0 \quad (10.1)$$

où $X \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est linéaire. La linéarité a pour conséquence le principe de superposition : si $X(t)$ et $Y(t)$ sont 2 solutions et u_1, u_2 deux constantes réelles, $Z(t) = u_1X(t) + u_2Y(t)$ est une solution de donnée initiale $Z(0) = u_1X(0) + u_2Y(0)$. Il suffit donc de connaître $X(t)$ et $Y(t)$ ainsi que la décomposition $Z(0) = u_1X(0) + u_2Y(0)$ pour résoudre notre problème. Cette méthode marche si $(X(0), Y(0))$ est une base de \mathbb{R}^2 .

143

Si V est un vecteur propre de A de valeur propre réelle λ , et $X_0 = V$, on a : $X(t) = e^{\lambda t} V$.

La même expression reste vraie dans le cas complexe à condition d'interpréter

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Les solutions générales sont obtenues en superposant des solutions particulières du type précédent, à condition d'avoir une base de vecteurs propres, ce qui est le cas dès que les 2 valeurs propres de A sont distinctes.

La solution de l'équation (10.1) est donc donnée par :

$X(t) = u_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + u_2 e^{\lambda_2 t} V_2$ où V_1 et V_2 sont des vecteurs propres et $X_0 = u_1 V_1 + u_2 V_2$ (deux conditions initiales données par une seule égalité vectorielle dans \mathbb{R}^2).

144

Dans le cas parabolique, on considère le système

$$\frac{dX}{dt} = A(X), X(0) = X_0 \quad (10.2)$$

où $X \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est linéaire. On utilise deux vecteurs (V_1, V_2) qui forment une base de \mathbb{R}^2 , et tels que $A(V_1) = \lambda V_1$, $A(V_2) = \lambda V_2 + V_1$.

Il suffit de connaître deux solutions $X(t)$ et $Y(t)$ linéairement indépendent ainsi que la décomposition $Z(0) = u_1 X(0) + u_2 Y(0)$ pour résoudre notre problème. Cette méthode marche si $(X(0), Y(0))$ est une base de \mathbb{R}^2 . Puisque V_1 est un vecteur propre de A de valeur propre réelle λ , et $X_0 = V_1$, on a : $X(t) = e^{\lambda t} V_1$.

Puis on pose $Y(t) = e^{\lambda t}(tV_1 + V_2)$, alors la dérivation (par rapport à t) donne

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \lambda e^{\lambda t}(tV_1 + V_2) + e^{\lambda t} V_1 \\ &= e^{\lambda t} tA(V_1) + e^{\lambda t} A(V_2) = A(e^{\lambda t}(tV_1 + V_2)) = A(Y(t)). \end{aligned}$$

La solution de l'équation (10.2) est donc donnée par : $X(t) = u_1 e^{\lambda t} V_1 + u_2 e^{\lambda t}(tV_1 + V_2)$ où V_1 et V_2 sont des vecteurs tels que $A(V_1) = \lambda V_1$, $A(V_2) = \lambda V_2 + V_1$ et $X_0 = u_1 V_1 + u_2 V_2$ (conditions initiales)

Méthode de résolution

- (1) Ecrire la matrice de A .
- (2) Ecrire l'équation caractéristique.
- (3) Résoudre l'équation caractéristique et voir si elle a 2 solutions distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
- (4) Chercher 2 vecteurs propres V_1 (resp. V_2) tels que $AV_1 = \lambda_1 V_1$ (resp. $AV_2 = \lambda_2 V_2$).
- (5) Décomposer $X(0) = u_1 V_1 + u_2 V_2$.
- (6) On a alors $X(t) = u_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + u_2 e^{\lambda_2 t} V_2$.

Exemple de résolution. On choisit pour simplifier des valeurs numériques $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

On obtient pour les différentes étapes de la résolution :

$$(1) A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$(2) \lambda^2 + 14\lambda + 40 = 0$$

$$(3) \lambda_1 = -10, \lambda_2 = -4$$

$$(4) V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(5) X(0) = \frac{x_0}{6}(V_1 + V_2)$$

$$(6) X(t) = \frac{x_0}{6}(e^{-10t} V_1 + e^{-4t} V_2) \text{ ou encore}$$

$$x(t) = \frac{x_0}{6}(e^{-10t} + 5e^{-4t}), y(t) = \frac{x_0}{6}(-e^{-10t} + e^{-4t})$$

On veut étudier l'allure des orbites d'un **champ linéaire** $X' = AX$ dans le plan de phases, i.e. l'allure des courbes $t \rightarrow (x(t), y(t))$ dans le plan \mathbb{R}^2 . On supposera dans la suite que A admet 2 valeurs propres distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Soit (V_1, V_2) une base de vecteurs propres associées à ces valeurs propres. Soit $X(t) = u(t)V_1 + v(t)V_2$ une solution de $X' = AX$, alors u et v satisfont les équations différentielles très simples suivantes :

$$u'(t) = \lambda_1 u(t), v'(t) = \lambda_2 v(t)$$

qui se résolvent par :

$$u(t) = u_0 e^{\lambda_1 t}, v(t) = v_0 e^{\lambda_2 t},$$

Les orbites dans le plan des (u, v) sont donc les courbes

$$t \rightarrow (u_0 e^{\lambda_1 t}, v_0 e^{\lambda_2 t})$$

Dans le cas où les valeurs propres **ne sont pas réelles**, la base (V_1, V_2) ne l'est pas non plus, mais si $AV_1 = (\alpha + \beta i)V_1$ avec $V_1 = W_1 - iW_2$, (W_1, W_2) est une base réelle de \mathbb{R}^2 dans laquelle on peut étudier les courbes intégrales à l'aide d'un passage en coordonnées polaires. Etudions les différents cas :

Le cas des valeurs propres réelles distinctes

Soient $\lambda_1 < \lambda_2$ les 2 valeurs propres supposées réelles distinctes. Ce sont les solutions de l'équation caractéristique $\lambda^2 - S\lambda + P = 0$ avec $S = a + d$ et $P = ad - bc$. On est donc dans le cas où $\Delta = S^2 - 4P > 0$. Soient (u, v) les coordonnées dans une base de vecteurs propres on a : $u' = \lambda_1 u, v' = \lambda_2 v$. L'allure des solutions est donc donnée par ce modèle facile à résoudre :

$$u(t) = u_0 e^{\lambda_1 t}, v(t) = v_0 e^{\lambda_2 t},$$

Noeuds

Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, on a un **noeud stable** et, si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, un **noeud instable**. Cela correspond respectivement à $S < 0, P > 0$ et $S > 0, P > 0$, où $\lambda^2 - S\lambda + P = 0$ est l'équation caractéristique.

Dans le cas des valeurs propres < 0 , toutes les trajectoires, sauf la trajectoire constante égale à l'origine, convergent pour $t \rightarrow +\infty$ vers l'origine qui est ainsi un point d'équilibre stable. Dans le cas des valeurs propres > 0 , toutes les trajectoires divergent pour $t \rightarrow +\infty$ vers l'infini et l'origine est alors un point d'équilibre instable.

Cols Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, on a un point **col**. Cela correspond à $P < 0$, Si la donnée initiale n'est pas sur la droite D engendrée par V_1 (correspondant à la valeur propres négative), le point $X(t)$ tend vers l'infini quand $t \rightarrow +\infty$. Si, au contraire, la donnée initiale est sur la droite D engendrée par V_1 , $X(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. La droite D s'appelle la *variété stable* du point col.

Les cas des valeurs propres complexes conjuguées.

On suppose maintenant que $S^2 - 4P < 0$. Soit $\alpha \pm i\beta$, avec $\beta > 0$, les valeurs propres. Il existe un vecteur complexe non nul V_1 tel que $AV_1 = (\alpha + i\beta)V_1$. Si $V_2 = \overline{V_1}$, on a : $AV_2 = (\alpha - i\beta)V_2$ et (V_1, V_2) est une base complexe de \mathbb{C}^2 . Soit $X(0)$ la donnée de Cauchy supposée réelle, on décompose $X(0) = z_0V_1 + \overline{z_0}V_2$ et on a, d'après le calcul général,

$$X(t) = z_0e^{(\alpha+i\beta)t}V_1 + \overline{z_0}e^{(\alpha-\beta)t}V_2.$$

Cette écriture ne permet pas directement de décrire les courbes intégrales, on introduit la décomposition de V_1 en parties réelles et imaginaires pures sous la forme : $V_1 = W_1 - iW_2$ et donc $V_2 = W_1 + iW_2$. Le couple (W_1, W_2) est une base réelle de \mathbb{R}^2 , mais ce n'est plus une base de vecteurs propres. Néanmoins, on va voir que l'équation des trajectoires s'écrit de façon simple dans cette base.

En décomposant $X(t)$ en termes de W_1 et W_2 , il vient après 2 lignes de calcul : $X(t) = u(t)W_1 + v(t)W_2$ avec :

$$u(t) = z_0e^{(\alpha+i\beta)t} + \overline{z_0}e^{(\alpha-\beta)t}, \quad v(t) = i(-z_0e^{(\alpha+i\beta)t} + \overline{z_0}e^{(\alpha-\beta)t}),$$

Si on pose $z(t) = u(t) + iv(t)$, on a finalement $z(t) = 2z_0e^{(\alpha+i\beta)t}$. Si $2z_0 = r_0e^{i\theta_0}$, on a : $z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ avec $r(t) = r_0e^{\alpha t}$ et $\theta(t) = \theta_0 + \beta t$. Ce qui donne une description des trajectoires en coordonnées polaires dans le repère (W_1, W_2) . Le sens de rotation des trajectoires autour de l'origine est donné par l'orientation de la base (W_1, W_2) . Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Ce sens est donné par le signe de b (qui est aussi l'opposé du signe de c , pourquoi ?). Il suffit de considérer le signe du déterminant $\det(X, X')$ avec, par exemple, X un des vecteurs de base.

Un exemple

Montrons concrètement comment s'applique la méthode générale. Soit à résoudre l'équation différentielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a $\lambda_1 = -1 + 2i$ et on peut prendre $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$: On écrit $V_1 = W_1 - iW_2$, soit

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les trajectoires $u(t)W_1 + v(t)W_2$ sont donc données, en posant $Z(t) = u(t) + iv(t)$, par :

$$Z(t) = Z(0)e^{(1+2i)t}.$$

Le repère (W_1, W_2) étant positif, ce sont des spirales qui s'enroulent autour de 0 dans le sens trigonométrique (foyer stable positif dans la nomenclature ci après)).

153

Foyers.

Si $S < 0$ (resp. $S > 0$), on a un foyer stable (resp. instable). Les trajectoires sont des spirales convergentes vers 0 dans le 1er cas, divergentes vers l'infini dans le second. Un foyer sera dit positif (resp. négatif) si les spirales s'enroulent dans le sens trigonométrique (resp. trigo. inverse).

Centres. Si $S = 0$, on a un centre. Les trajectoires sont toutes périodiques : ce sont des ellipses. La période des trajectoires est $T = 2\pi/\beta$ si les valeurs propres sont $\pm\beta i$. Un centre sera dit positif (resp. négatif) si les ellipses s'enroulent dans le sens trigonométrique (resp. trigo. inverse).

154

Exercice (10.1)

Soit A_m la matrice définie par

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{pmatrix}$$

Discuter suivant la valeur de m la nature de la dynamique et tracer la trajectoire telle que $X(0) = (1, 1)$.

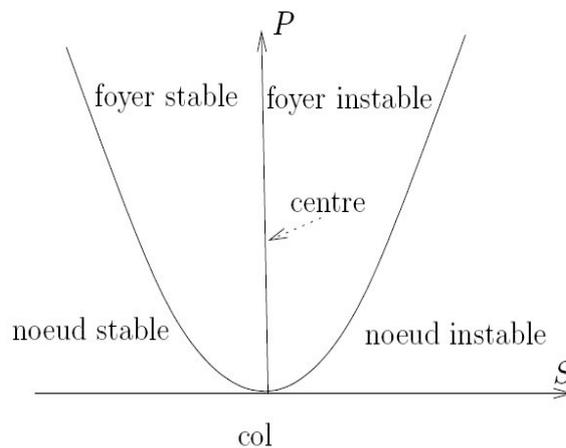


Fig.: 9 Nature de la dynamique suivant le polynôme caractéristique $\lambda^2 - S\lambda + P$.

Cas discret : application aux suites de récurrence (en TD)

On considère l'évolution d'un vecteur $X(n) \in \mathbb{R}^2$ pour $n \in \mathbb{N}$, telle que

$$X(n+1) = A(X(n)), X(0) = X_0 \quad (10.3)$$

où $X \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est linéaire.

La linéarité a pour conséquence le principe de superposition : si $X(t)$ et $Y(t)$ sont 2 solutions et λ, μ deux constantes réelles, $Z(t) = C_1 X(t) + C_2 Y(t)$ est une solution de donnée initiale $C_1 X(0) + C_2 Y(0)$. Il suffit donc de connaître $X(n)$ et $Y(n)$ ainsi que la décomposition $Z(0) = C_1 X(0) + C_2 Y(0)$ pour résoudre notre problème.

Si (V_1, V_2) est une base de vecteurs propres associées à des valeurs propres distinctes, alors la solution de l'équation (10.3) est donc donnée par : $X(n) = C_1 \lambda_1^n V_1 + C_2 \lambda_2^n V_2$ où V_1 et V_2 sont des vecteurs propres et $X_0 = C_1 V_1 + C_2 V_2$.

Dans le cas parabolique on utilise deux vecteurs (V_1, V_2) qui forment une base de \mathbb{R}^2 , et tels que $A(V_1) = \lambda V_1$,

$A(V_2) = \lambda V_2 + V_1$. Alors

$A(A(V_2)) = A(\lambda V_2 + V_1) = \lambda(\lambda V_2 + V_1) + \lambda V_1 = \lambda^2 V_2 + 2\lambda V_1$,

... , et on obtient aisément deux solutions : $X(n) = \lambda^n V_1$ et

$Y(n) = \lambda^{n-1}(nV_1 + \lambda V_2)$ (pour $n > 0$, $Y(0) = V_2$).

En effet, $X(n+1) = \lambda^{n+1} V_1 = \lambda X(n) = A(X(n))$,

$Y(n+1) = \lambda^n(n+1)V_1 + \lambda^{n+1} V_2 = \lambda^n((n+1)V_1 + AV_2 - V_1) = \lambda^{n-1}nAV_1 + \lambda^n A(V_2) = A(Y(n))$ (pour $n > 0$). Dans ce cas la

solution de l'équation (10.3) est donc donnée par :

$X(n) = \lambda^{n-1}(\lambda C_1 + nC_2)V_1 + C_2 \lambda^n V_2$ où V_1 et V_2 sont des vecteurs propres et $X_0 = C_1 V_1 + C_2 V_2$.

Systèmes linéaires non-homogènes d'équations différentielles linéaires (avec second terme)

$$\frac{dX}{dt} = A(X) + b(t), X(0) = X_0 \quad (10.4)$$

On utilise de nouveau le lien avec le système linéaire homogène associé (10.1). On obtient la solution générale du système (10.4) sous la forme : $C_1 X(t) + C_2 Y(t) + Z_0(t)$, où $X(t), Y(t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes du système linéaire homogène associé (10.1) (sans second terme), et $Z_0(t)$ une solution particulière du système (10.4) (avec second terme).

Pour trouver Z_0 , on utilise la [méthode de variation de la constante](#) : on cherche Z_p sous la forme : $Z_p(t) = C_1 X(t) + C_2 Y(t)$,

$$\begin{aligned} Z_p'(t) &= A(Z_p(t)) + b(t) = C_1 X'(t) + C_2 Y'(t) + C_1' X(t) + C_2' Y(t) \\ &= A(C_1 X(t) + C_2 Y(t)) + C_1' X(t) + C_2' Y(t) \end{aligned}$$

$$A(Z_p(t)) + b(t) \Rightarrow \boxed{C_1' X(t) + C_2' Y(t) = b(t)} \quad (\text{une égalité vectorielle})$$

Equations différentielles linéaires du second degré à coefficients constants

On appelle équation linéaire du second degré à coefficients constants une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad (10.5)$$

où a, b, c sont des constantes réelles ($a \neq 0$), f une fonction de la variable t .

On pose $u = y'$, $v = y$, $a = 1$, alors on obtient un **système linéaire du premier ordre** (avec second terme)

$$\begin{cases} u' = -bu - cv + f \\ v' = u \end{cases} \iff \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -c \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.6)$$

Partie IV. Méthodes géométriques.

Champs de vecteurs

Les points singuliers

Classification des points singuliers

Exemples d'étude qualitative autour d'un point singulier

Un exemple linéaire : évolution du taux d'alcool dans le sang

Étude qualitative de comportement autours des points singuliers

Portrait de phases : le pendule simple

Notion de comportement chaotique de populations

Cours N°13, IV. Méthodes géométriques. Exemples d'une étude qualitative. Observables et espace des phases

On s'intéresse à la modélisation d'un système déterministe. Pour cela, on commence par choisir une famille d'observables, notées x, y, \dots qui sont des quantités numériques décrivant l'état du système. Par exemple, pour un pendule simple, x pourra être un angle repérant la position du pendule par rapport à la verticale et y la vitesse du pendule. Pour un modèle de N populations, on aura en général des observables x_1, \dots, x_N où x_i est le nombre d'individus de i -ème population. Pour un modèle de cinétique chimique, les observables sont les concentrations des différents réactifs.

161

Ces observables doivent être choisies de façon à décrire suffisamment les propriétés macroscopiques du système et de façon que l'évolution des observables à partir du temps t_0 ne dépende que de leurs valeurs en t_0 . L'espace des phases Ω associé à un système décrit par N observables (x_1, \dots, x_N) est l'ensemble des valeurs prises par ces observables. Par exemple, pour $N = 2$, cas étudié dans la suite, est une partie du plan. Pour un modèle avec 2 populations, est le quart de plan où les observables sont positives. Pour des concentrations mesurées en %, $\Omega = [0, 100]^N$. Dans la suite de cette partie, Ω , l'espace de phases, est un ouvert de \mathbb{R}^2 , généralement, pour ce qui nous concerne, un ensemble de points défini par un nombre fini d'inéquations $f_j(x, y) > 0$ avec f_j continues.

162

Champs de vecteurs

Un champ de vecteurs V dans Ω est la donnée pour tout $(x, y) \in \Omega$ d'un vecteur

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Ce champ de vecteurs représente l'évolution du système

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = V(x, y)$$

en un temps petit : si $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, on a

$x(\delta t) \approx x_0 + \delta t P(x_0, y_0)$, $y(\delta t) \approx y_0 + \delta t Q(x_0, y_0)$ lorsque $\delta t \approx 0$.

Courbes intégrales

Une courbe intégrale (ou trajectoire) est une courbe paramétrée dérivable (c'est-à-dire, une application) $X : t \rightarrow (x(t), y(t)) \in \Omega$, où $t \in I$ un intervalle contenant t_0 , Ω est un domaine contenant (x_0, y_0) , telle que l'on ait

$$\forall t \in I, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x(t), y(t)) \\ Q(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$$

autrement dit la vitesse de X à l'instant t est la valeur de V au point $X(t)$. On écrira aussi bien :

$$X'(t) = \frac{dX}{dt} = V(X(t))$$

Les courbes intégrales représentent l'évolution des observables au cours du temps.

Représentations géométriques

On peut représenter sur une même figure les graphes de $t \rightarrow x(t)$ et de $t \rightarrow y(t)$. On peut aussi faire un dessin dans l'espace de phases, i.e. tracer la courbe paramétrée $t \rightarrow X(t) = (x(t), y(t))$. Il peut être utile de marquer sur cette courbe les points $X(kT_0)$ avec $T_0 > 0$ convenablement choisi et $k \in \mathbb{Z}$.

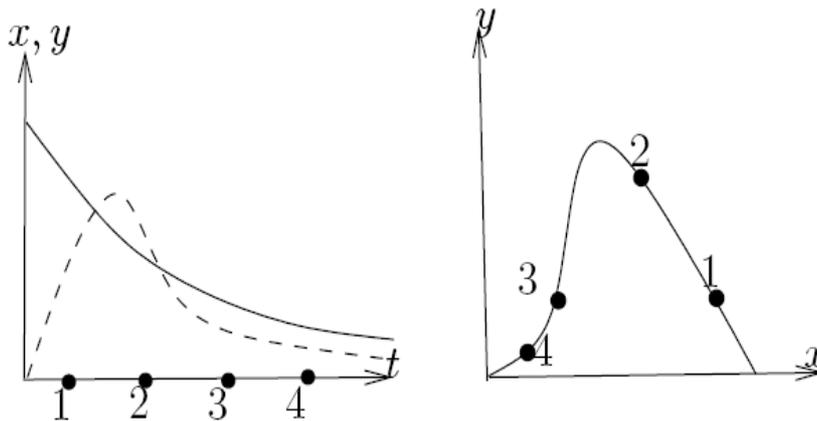


Fig.: 10

165

Les points singuliers d'un champ de vecteurs

Ce sont les points (a, b) où P et Q s'annulent simultanément : ils sont obtenus en résolvant le système de 2 équations à 2 inconnues

$$P(a, b) = Q(a, b) = 0.$$

Si $x(0) = a, y(0) = b$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = a, y(t) = b.$$

Ces points s'interprètent donc comme les positions d'équilibre du système. Il est de première importance de les déterminer pour comprendre le système dynamique. Une fois les points singuliers trouvés, on peut s'intéresser à la dynamique au voisinage de ceux-ci en se posant par exemple la question de la stabilité d'un point d'équilibre M_0 .

166

Stabilité d'un point d'équilibre M_0

si on prend des données initiales assez proches de M_0 , est ce qu'on va s'en éloigner ou rester assez proche ?

Nous verrons plus loin des critères simples de stabilité basés sur l'approximation linéaire du champ de vecteurs.

Le cas linéaire est important parce qu'on peut calculer complètement les solutions, mais aussi parce qu'il donne, après linéarisation, des informations sur le comportement près des points singuliers pour un système général, en particulier sur sa stabilité.

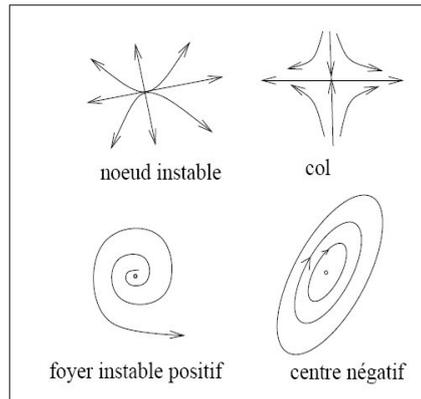


Fig.: 11.

Point singuliers d'un champ de vecteur général

Si $V(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs quelconque, l'étude des trajectoires près d'un point d'équilibre M_0 quelconque peut souvent se faire par linéarisation : on remplace le champ V près de M_0 par le champ linéarisé $V_0 = \begin{pmatrix} P_0(x, y) \\ Q_0(x, y) \end{pmatrix}$ près de 0 (ie on pose $x = x_0 + X, y = y_0 + Y$) défini par

$$\begin{cases} P_0(X, Y) = \frac{\partial P}{\partial x}(M_0)X + \frac{\partial P}{\partial y}(M_0)Y \\ Q_0(X, Y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(M_0)X + \frac{\partial Q}{\partial y}(M_0)Y \end{cases}$$

On appelle **matrice jacobienne** (voir [YCV], p.26) de l'application $(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ au point (x, y) la matrice $J_{(x, y)}$ définie par

$$J_{(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Le champ linéarisé est donc associé à la matrice jacobienne $J_{(x_0, y_0)}$ au point singulier $M_0 = (x_0, y_0)$. Plus précisément, on a :

$$\begin{cases} P(x_0 + X, y_0 + Y) \approx P_0(X, Y) \\ Q(x_0 + X, y_0 + Y) \approx Q_0(X, Y) \end{cases}$$

lorsque $X, Y \rightarrow 0$. Le champ linéarisé est donc une approximation du champ $V(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ au voisinage de M_0 dans un repère d'origine M_0 . Cette approximation est d'autant meilleure que le voisinage est petit. Il n'est donc pas trop surprenant que les propriétés de stabilité puissent se lire sur le champ linéarisé.

Etude de stabilité à l'aide du champ linéarisé

- ▶ Si le champ linéarisé X_0 admet un noeud stable ou un foyer stable, le point d'équilibre M_0 est stable quand $t \rightarrow +\infty$.
- ▶ Si le champ linéarisé X_0 admet un noeud instable ou un foyer instable, le point d'équilibre M_0 est instable quand $t \rightarrow +\infty$.
- ▶ Si le champ linéarisé X_0 admet un col, le point d'équilibre M_0 est instable, mais admet une variété stable quand $t \rightarrow +\infty$.
- ▶ Si le champ linéarisé X_0 admet un centre, on ne peut pas conclure sans une analyse plus fine.

On a le résultat suivant :

Théorème (sur la stabilité des points singuliers)

Si les parties réelles de toutes les valeurs propres sont < 0 , l'équilibre est stable. Si au moins une valeur propre a une partie réelle > 0 , l'équilibre est instable.

Cours N°14, Exemples qualitatifs

Un exemple linéaire : évolution du taux d'alcool dans le sang

Commençons par un exemple simple : après ingestion d'alcool (dans l'estomac), l'alcool diffuse dans le sang et est éliminé progressivement par les reins. A partir d'un modèle simple on souhaite étudier l'évolution au cours du temps du taux d'alcool dans le sang. Soit $x(t)$ le taux d'alcool dans l'estomac et $y(t)$ le taux d'alcool dans le sang à l'instant t .

On fait l'hypothèse que les vitesses de diffusion de l'alcool de l'estomac vers le sang ou du sang vers l'extérieur sont proportionnelles aux différences de concentration dans les 2 réservoirs.

C'est une hypothèse naturelle, car il ne doit pas y avoir de transfert si les concentrations sont les mêmes et alors le plus simple est de prendre des vitesses linéaires par rapport aux différences de concentration.

Rappel : la concentration c d'une substance donnée la quantité de cette substance contenue dans l'unité de volume. La quantité de substance contenue dans le volume V est cV .

On obtient ainsi les équations différentielles suivantes

$$x'(t) = -k_1(x(t) - y(t)), y'(t) = k_2(x(t) - y(t)) - \alpha y(t),$$

où $k_1 > 0$ (resp. k_2) est la constante de diffusion de l'alcool de l'estomac vers le sang (resp. du sang vers l'estomac). Si V est le volume de l'estomac et W le volume du sang, la conservation de la quantité d'alcool dans cet échange implique $k_1 V = k_2 W$ et donc $k_2 < k_1$! La constante $\alpha > 0$ est la constante d'absorption de l'alcool par les reins.

Les constantes k_1 , k_2 et α sont des paramètres qui dépendent des individus et une étude expérimentale a posteriori (i.e. utilisant les équations différentielles résolues) doit permettre de les calculer et même mieux de les déduire d'autres caractéristiques individuelles (poids, âge, etc ...).

On veut résoudre le système d'équations différentielles précédent avec comme donnée initiale $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$ (on suppose que tout l'alcool a été bu en une fois par un sujet initialement à jeun).

173

Résolution de l'exemple

On choisit pour simplifier des valeurs numériques $k_1 = 5$, $k_2 = 1$, $\alpha = 8$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. On obtient pour les différentes étapes de la résolution :

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \lambda^2 + 14\lambda + 40 = 0$$

$$(3) \quad \lambda_1 = -10, \lambda_2 = -4$$

$$(4) \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad X(0) = \frac{x_0}{6}(V_1 + V_2)$$

$$(6) \quad X(t) = \frac{x_0}{6}(e^{-10t}V_1 + e^{-4t}V_2)$$

174

Conclusion

$x(t) = \frac{x_0}{6}(e^{-10t} + 5e^{-4t})$, $y(t) = \frac{x_0}{6}(-e^{-10t} + e^{-4t})$. Le graphe de $y(t)$ peut être tracé (voir figure 12 et montre un maximum pour un temps $T = \frac{\ln 2,5}{6}$. On pourra le montrer en exercice.

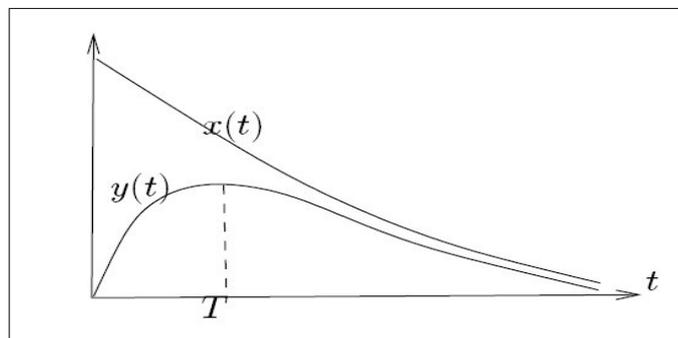


Fig.: 12. Les variations de x et y en fonction de t .

Les faits qualitatifs saillants sont :

- l'existence d'un temps caractéristique, le temps T pour lequel $y(T)$ est le maximum
- l'existence d'un taux caractéristique le rapport $y(T)/x(0)$.

Plus ce taux est petit, moins vous risquez de vous faire prendre avec un excès d'alcoolémie. On vérifie aussi que les solutions satisfont $y(t) < x(t)$ pour tout t et que $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers 0 exponentiellement vite.

Cours N°15, Exemples qualitatifs

Réactions chimiques simples.

Il s'agit d'une réaction du type $A + B \rightleftharpoons C$ où l'on note a, b, c les concentrations des réactants A, B, C .

Rappel : la concentration c d'une substance donnée la quantité de cette substance contenue dans l'unité de volume. La quantité de substance contenue dans le volume V est cV .

Constante d'Avogadro $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$,

$n(X) = N(X)/N_A$ (la **quantité d'une substance**)

Unité de **masse atomique** $m_u = m(C_{12})/12 = 1,66010^{-27} \text{ kg}$

Pour qu'il y ait réaction, il faut qu'il y ait rencontre (acte biomoléculaire).

La loi de vitesse est l'expression de la vitesse de la réaction en fonction de différentes concentrations dont elle dépend (Chimie, PCSI, PUF, 1999, p.8)

Exemple : $A = C_2H_4, B = H_2, C = C_2H_6$ (l'éthane) (Chimie, PCSI, PUF, 1999, Ch.I)

Soit k_{+1} et k_{-1} les taux des réactions \rightarrow et \leftarrow , on a :

$$\frac{dc}{dt} = k_{+1}ab - k_{-1}c, \quad \frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = -k_{+1}ab + k_{-1}c.$$

Cela donne lieu à une équation différentielle très simple puisque l'on voit que $a + c = cte$ et $b + c = cte$. Si $c(0) = c_0 = 0$, on a :

$a = a_0 - c$; $b = b_0 - c$ et donc $\frac{dc}{dt} = k_{+1}(a_0 - c)(b_0 - c) - k_{-1}c$ qui s'intègre explicitement.

On vérifie directement en utilisant les résultats de la section 6.4 que $c(t)$ croît de 0 à c_∞ qui est la plus petite racine de $k_{+1}(a_0 - c)(b_0 - c) - k_{-1}c = 0$.

Réactions enzymatiques.

L'enzyme E , présent en faible quantité, réagit avec le réactant R pour donner un composé C qui se décompose en un produit P en redonnant l'enzyme suivant le schéma : $R + E \rightleftharpoons C \rightarrow P + E$. Notons comme plus haut $k_{\pm 1}$ les taux de la première réaction et k_2 celui de la seconde. Notons avec des lettres minuscules les concentrations et indexons par 0 les valeurs initiales ; on a les 4 équations couplées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -k_{+1}re + k_{-1}c; & \frac{de}{dt} &= k_2c - k_{+1}re + k_{-1}c; \\ \frac{dc}{dt} &= k_{+1}re - k_{-1}c - k_2c, & \frac{dp}{dt} &= k_2c. \end{aligned}$$

On tire p par $p(t) = \int_0^t c(s)ds$ et il nous reste 3 équations dont on peut éliminer e grâce à $e + c = e_0 = cte$.

Il nous reste ainsi :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -k_{+1}re_0 + (k_{+1}r + k_{-1})c \\ \frac{dc}{dt} = k_{+1}re_0 - (k_{+1}r + k_{-1} + k_2)c \end{cases}$$

On en déduit l'espace de phase donné dans la figure suivante avec une trajectoire typique. Ce qui est intéressant est que la réaction se produit même avec un très faible taux d'enzyme. Pour plus de détails, consulter [Murr89] chapitre 5.

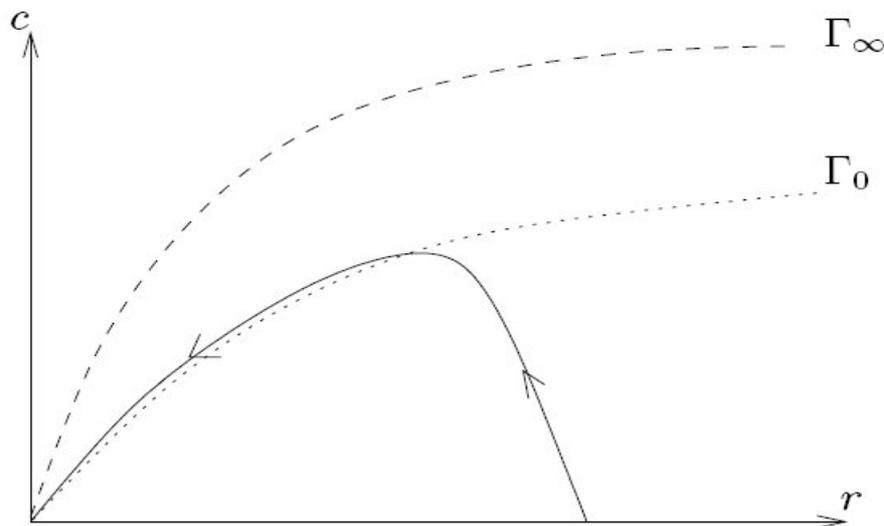


Fig.: 13. Réaction enzymatique (Noeud stable autour de $(r, c) = (0, 0)$)

179

Cours N°16, Applications à l'étude qualitative de comportement autours des points singuliers. Portrait de phase.

Il s'agit de représenter sur un même dessin un nombre suffisant de trajectoires pour avoir une idée assez précise de la dynamique du système. On indique notamment les trajectoires exceptionnelles (les points singuliers, les variétés stables et instables de points cols, les trajectoires périodiques) et dans chaque région limitée par les précédentes quelques trajectoires typiques encore appelées génériques. Pour un système linéaire il y a 5 trajectoires exceptionnelles (l'équilibre et les 4 demi-droites engendrées par les vecteurs propres) dans le cas de valeurs propres réelles distinctes. Si les 2 valeurs propres sont non réelles, il n'y en a qu'une (le point singulier).

180

Le pendule simple

Pour un pendule simple, x est l'angle repérant la position du pendule par rapport à la verticale et y la vitesse du pendule. Il s'agit de l'équation différentielle :

$$x'' + \sin x = 0$$

que l'on peut transformer en un champ de vecteurs dans le plan. On obtient ainsi

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\sin x \end{cases}$$

On vérifie facilement que le champ de vecteurs $(y, \sin x)$ est tangent aux lignes de niveau de l'énergie $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$: l'énergie totale est conservée au cours du mouvement. E est une **intégrale première**.

(Rappel : soit $V(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un champ de vecteurs dans un ouvert du plan. Une fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une intégrale première (IP en abrégé) de V si elle est constante le long des trajectoires).

181

Cela permet de dessiner les trajectoires dans le plan de phases comme sur la figure 14. On distingue, sur la figure 14, cinq types de trajectoires : les points d'équilibre stable (position basse) et instable (position haute), les petites oscillations périodiques, les grandes oscillations qui font tout le tour et les trajectoires qui partent au temps $-\infty$ d'une position instable pour y revenir de l'autre côté à $+\infty$.

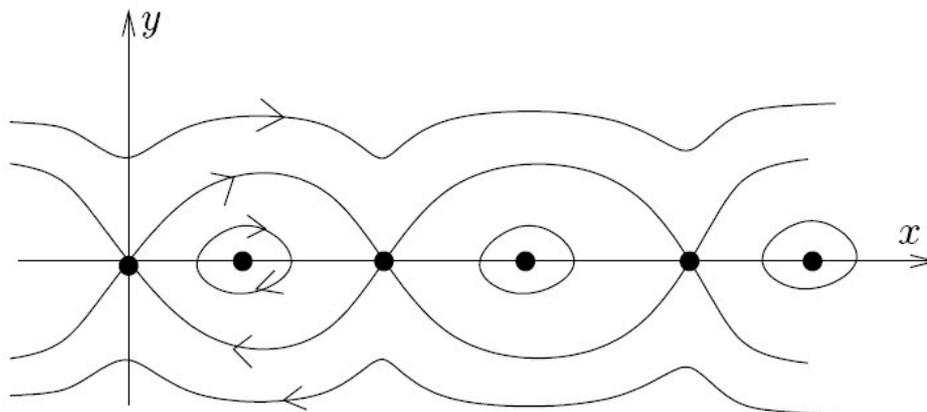


Fig.: 14

182

Champs de vecteurs dans le plan, points singuliers : visualisation avec MAPLE

```
> restart ;with(DEtools) :with(plots) : DEplot([diff(x(t),t)=y(t),
diff(y(t),t)=-sin(x(t))], [x(t),y(t)], t=-4..12,number=2, [ [x(0)=0,y(0)=2],
[x(0)=0,y(0)=-2], [x(0)=2*Pi,y(0)=2], [x(0)=2*Pi,y(0)=-2], [x(0)=0,y(0)=2.2],
[x(0)=4*Pi,y(0)=-2.2], [x(0)=4*Pi,y(0)=1], [x(0)=4*Pi,y(0)=-2],
[x(0)=4*Pi,y(0)=2], [x(0)=0,y(0)=1], [x(0)=2*Pi,y(0)=1]] );
```

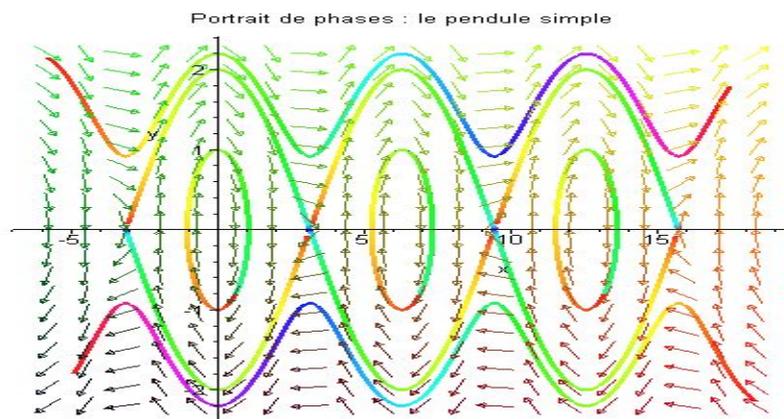


Fig.: 15 Portrait de phases : le pendule simple

183

Cours N°17, Comportement chaotique de population

([Bert], p.97)

Certaines espèces d'insectes évoluent avec une synchronisation assez grande ; en particulier, la période de la ponte est la même pour tous les individus, et cette période revient à intervalles réguliers (tous les ans par exemple). L'évolution générale d'une telle espèce est caractérisée par une simulation mathématique.

Dans un modèle simplifié d'évolution, le nombre u_n d'insectes à la n -ème génération ne dépend que du nombre u_{n-1} d'insectes à la génération précédente, soit $u_n = f(u_{n-1})$; la suite est une suite récurrente (ou un **système dynamique discret**).

On supposera que la population suit une lois logistique discrète :

$$f(x) = Cx \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad C \text{ étant un coefficient de reproduction et } L \text{ le nombre}$$

maximum d'insectes pouvant vivre dans un milieu étudié ; u_n est remplacé par un entier le plus proche.

La constante C est évidemment positive ; elle ne peut être supérieur à 4 car la valeur de $f(x)$ doit rester inférieure ou égale à L , quel que soit x compris entre 0 et L (prendre $x = \frac{L}{2}$).

184

Résultats théoriques

On sait que les seules limites possibles pour la suite (u_n) sont les solutions de l'équation $x = f(x)$, soit $x = 0$ ou $x = L(1 - \frac{1}{C})$, mais il n'y a pas toujours convergence. On montre que :

- ▶ si le coefficient de reproduction est faible ($C < 1$), la suite tend vers 0 (extinction de la population),
- ▶ si le coefficient de reproduction est moyen ($1 < C < 3$), la suite tend vers $L(1 - \frac{1}{C})$ (la population se maintient à un niveau constant),
- ▶ si le coefficient de reproduction est grand :
 - ($3 < C < 3,449$), la suite oscille, pour n assez grand, entre deux valeurs,
 - ($3,449 < C < 3,544$), la suite oscille, pour n assez grand, entre quatre valeurs,
 -
- ▶ si le coefficient de reproduction est très grand ($C > 3,750$), la suite paraît distribuée au hasard et dépend d'un changement même minimal de la valeur initiale ; on dit que son comportement est *chaotique*. Pour $C = 4$ la suite u_n/L est dense dans l'intervalle $]0, 1[$.

Représentation graphique du comportement chaotique par "tissage de toile"

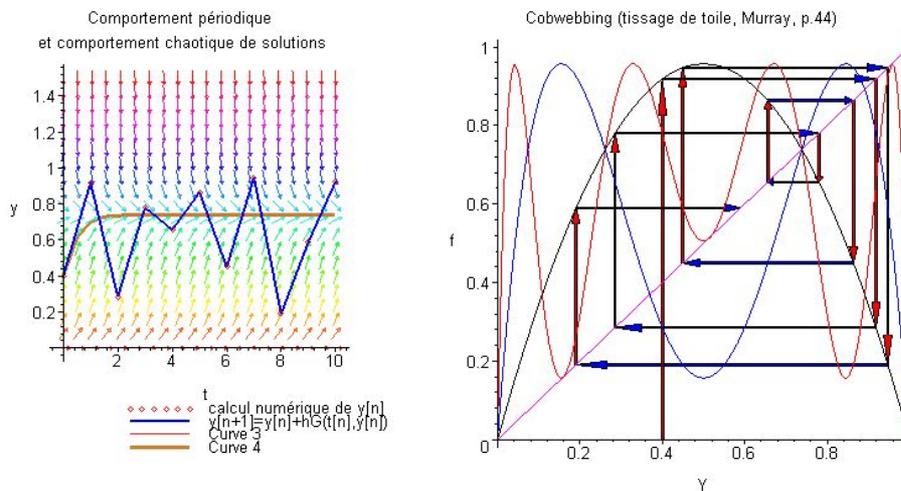


Fig.: 16. "Tissage de toile", [Murr89], p.44

Aperçu culturel sur les systèmes dynamiques, voir [YCV], p.28

On peut faire commencer l'histoire récente des systèmes dynamiques et de la **théorie du chaos** à Henri Poincaré. Conscient que l'on ne pouvait pas en général donner une solution analytique (i.e. des formules) aux problèmes de la dynamique, H. Poincaré propose une étude plus qualitative basée sur l'étude des points d'équilibre et des trajectoires périodiques, puis de leur **bassin d'attraction**. H. Poincaré est sans doute le premier scientifique à avoir pressenti la nature complexe (on dirait aujourd'hui chaotique) des trajectoires de certains systèmes dynamiques d'apparence simple. Pour une histoire de cette théorie, on pourra lire le passionnant livre [GL].

Bibliographie

Livres de base :

-  Françoise et Jean-Paul BERTRANDIAS, Mathématiques pour les sciences de la nature et de la vie, Collection Grenoble Sciences, Press Univ. Grenoble, 1990
-  Yves COLIN DE VERDIÈRE, Mathématiques en DEUG SV 2ème année, Institut Fourier (DU St Martin d'Hères)
[http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/)
-  Jacqueline LELONG-FERRAND, Jean-Marie ARNAUDIÈS, Cours de Mathématiques-Tome 4. Équations différentielles. Intégrales multiples. Dunod, Paris-Bruxelles-Montréal, 1974
-  Jean DELLA DORA, Thierry GAUTHIER, Nathalie REVOL, Systèmes dynamiques 1993.

Livres supplémentaires :

-  Vladimir ARNOLD, Équations différentielles ordinaires, Mir (Moscou), 1974.
-  Vladimir ARNOLD, Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Mir (Moscou), 1976.
-  Frank AYRES, Jr., Théorie et application des équations différentielles. 560 exercices résolus. Mac Graw-Hill, New-York, Montréal ; Edisciences, Paris, 1972
-  P. BERGELTON, The physical Basis of Biochemistry, Springer, 1998.
-  P. BERGÉ, Y. POMEAU, Ch. VIDAL, L'ordre dans la chaos, Hermann, 1988.
-  Pierre BROUSSE. Cours de mécanique. Librairie Armand Colin, Paris, 1973

-  Athel CORNISH-BOWDEN, Marc JAMIN, Valdur SAKS, Cinétique enzymatique, Collection Grenoble Sciences, Press Univ. Grenoble, 1990
-  Jean-Pierre DEMAILLY, Analyse numérique et Équations différentielles Press Univ. Grenoble, 1991
-  P. FLORENT, G. LAUTON, M. LAUTON, Equations et Systèmes différentiels, Vuibert (Paris), 1978
-  R. JEAN, Une approche mathématique de la biologie, Gaëtan Morin (Chicoutimi, Canada), 1987
-  J. HUBBARD. ; B. WEST. ; V. GAUTERON, ed. Équations différentielles et systèmes dynamiques, Cassini, Enseignement des mathématiques (2), 1999
-  J. GLEICK, La théorie du chaos, Flammarion (Paris), 1987.
-  J. MURRAY, Mathematical Biology, Springer, 1989.

-  Hervé PAJOT, Cours MAT110c (“Apprentissage du raisonnement et analyse élémentaire”),
[http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pajot](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pajot)
-  Alexei PHILIPPOV, Recueil de problèmes d’équations différentielles ordinaires, Mir (Moscou), 1976.
-  Lev PONTRIAGUINE, Équations différentielles ordinaires, Mir (Moscou), 1976.