MAT 302
CHAPITRE 0 : SUITES

Ces notes contiennent quelques rappels et compléments sur les suites. Nous ne présenterons en cours que les quelques résultats utiles pour l'étude des séries numériques.

Table des matières

1. Généralités sur les suites

Nous allons considérer des suites de nombres réels ou complexes. Pour simplifier certains énoncés communs, nous désignerons par $\mathbb{K}$ les ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous préciserons toutefois les énoncés qui ne sont valables que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ des opérations usuelles (addition, produit par un scalaire) et de leur normes respectives (la valeur absolue pour $\mathbb{R}$ et le module pour $\mathbb{C}$). Ces deux normes seront notées de la même façon, à savoir $|.|$. Rappelons que si z, z', $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda z| = |\lambda||z|$ (en particulier, $|-z| = |z|$) et $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Définition 1. *Une suite dans $\mathbb{K}$ est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Pour tout n, $u(n)$ est noté u_n et s'appelle le n-ième terme de la suite u que l'on notera $u = (u_n)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que que la suite est à termes réels (ou une suite réelle). Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que que la suite est à termes complexes (ou une suite complexe).*

Remarque 1. *Il se peut que u_n ne soit défini que pour $n \geq n_0$ où n_0 est à déterminer. Par exemple, si $u_n = \sqrt{n-2}$, u_n n'est défini que pour $n \geq 2$. Quand nous écrivons "pour tout n", cela signifie implicitement "pour tout n plus grand qu'un n_0 donné". De la même façon, on notera souvent (u_n) ce que l'on devrait écrire $(u_n)_{n \geq n_0}$. Notons enfin que si u_n n'est défini que pour $n \geq n_0$, on peut "prolonger" la suite en posant $u_n = 0$ pour tout $0 \leq n < n_0$. Cela ne changera rien à notre étude qui est asymptotique (donc indépendante des premiers termes).*

Remarque 2. *En biologie mathématique, les suites permettent de modéliser des dynamiques de population : modèles de Fibonacci (1202), de Malthus (1798), ou de Verhulst (appelé aussi modèle logistique, vers 1840).*

Une page du "Liber abaci" de Fibonacci, avec sur la droite la suite (doublement récurrente) qui porte son nom et qui est liée au nombre d'or.

On termine ce paragraphe par quelques définitions élémentaires.

Définition 2. *(i) Une suite (u_n) de nombres réels est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout n, $u_n \leq M$. On dit alors que M est un majorant de (u_n). On définit de la même manière une suite minorée et un minorant de la suite. Il est clair qu'un majorant ou un minorant, s'ils existent, ne sont pas uniques.*

(ii) Une suite (u_n) dans $\mathbb{K}$ est bornée si la suite $(|u_n|)$ dans $\mathbb{R}$ est majorée.

(iii) Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}$. On dit que (u_n) est croissante (respectivement décroissante) si pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$ (respectivement $u_{n+1} \leq u_n$).

(iv) La somme de deux suites (u_n) et (v_n) de $\mathbb{K}$ est la suite $(u_n + v_n)$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, le produit de la suite (u_n) par le scalaire λ est la suite (λu_n). Le produit des suites (u_n) et (v_n) est la suite $(u_n v_n)$.

2. Limite d'une suite

Nous allons donner la définition actuelle de la limite (celle avec des ε), celle-ci se généralise dans des situations plus abstraites. Cependant, il fallut du temps pour arriver à cette définition qui est fondamentale en analyse. Comme nous le verrons plus tard, un des obstacles était de donner une construction rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Voici comment deux grands scientifiques du 18-ième et 19-ième siècles évoquaient la notion de limite.

On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près d'une grandeur donnée, si petite qu'on puisse la supposer (D'Alembert 1765).

Lorsqu'une quantité variable converge vers une limite fixe, il est souvent utile d'indiquer cette limite par une notation particulère, c'est ce que nous ferons, en plaçant l'abréviation lim *devant la quantité variable dont il s'agit (Cauchy, 1821).*

Définition 3. *Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{K}$ et soit $l \in \mathbb{K}$. On dit que la suite (u_n) a pour limite l ou que u_n tend vers l si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$. On dit alors que la suite (u_n) est convergente.*

Cette définition peut apparaitre comme une version avec des quantificateurs de celle de d'Alembert. Il est important de noter que dans la définition précédente, N dépend de ε et on le note parfois $N(\varepsilon)$ ou N_ε (voir les exemples ci-dessous). En particulier, quand ε se rapproche de 0, N devient infinimemt grand. Il se pourrait que pour une suite donnée, il existe plusieurs $l \in \mathbb{K}$ qui vérifient la conclusion de la définition précédente. En fait, cela n'est pas possible comme l'indique le résultat suivant. On retrouve alors la notation proposée par Cauchy.

Proposition 1. *Si une suite (u_n) dans $\mathbb{K}$ est convergente, sa limite l est unique. On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.*

Notons que l'on a les équivalences suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0.$$

Dans le cas de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a le résultat utile suivant. Ici, on note $\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(z)$ les parties réelle et imaginaire de $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 2. *Soit (u_n) une suite convergente de nombres complexes. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Longleftrightarrow (\lim_{n\to+\infty} \mathfrak{Re}(u_n) = \mathfrak{Re}(l) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \mathfrak{Im}(u_n) = \mathfrak{Im}(l)).$$

La démonstration du résultat suivant doit être vue comme un exercice intéressant de manipulation de la définition de la limite d'une suite avec des quantificateurs.

Proposition 3. *Toute suite convergente (u_n) de $\mathbb{K}$ est bornée.*

Ce résultat est sans réciproque. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est bornée par 1, mais n'est pas convergente. Donnons maintenant quelques résultats concernant les opérations sur les limites. Pour les démontrer, il faut revenir à la définition initiale de la convergence d'une suite.

Proposition 4. *Soient (u_n) et (v_n) des suites dans $\mathbb{K}$ convergentes.*
(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n) = \lambda l$.
(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l + l'$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = ll'$.
(iii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (1/u_n) = 1/l$.

Définissons maintenant la notion de suite tendant vers l'infini.

Définition 4. *Soit (u_n) une suite de nombres réels (c'est à dire $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On dit que u_n tend vers $+\infty$, que l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si :*
$\forall A > 0$, $\exists N \in N$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A)$. Si $-u_n$ tend vers $+\infty$, on dit que u_n vers $-\infty$ et on le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple 1. *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, alors la suite (u_n) converge vers 0. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$, alors u_n tend vers $+\infty$.*

Exemple 2. *On considère la suite géométrique donnée par $u_n = a^n$, $a \in \mathbb{K}$. Pour l'étude de la convergence, nous distinguons plusieurs cas.*

(i) Si $a \in \mathbb{R}$, avec $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

(ii) Si $|a| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.

(iii) Si $a = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$.

(iv) Si $|a| > 1$, la suite (a^n) ne converge pas (car non bornée)

Exemple 3. *Donnons quelques règles de croissances comparées.*

(i) Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{\ln n} = +\infty$.

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n^\alpha} = +\infty$.

(iii) Lorsque $0 < a < 1$, pour tout réel α, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = 0$.

Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3n^2 - 6(\ln n)^3}{4e^{2n} + 5n^3}$. Pour étudier la convergence de cette suite, l'idée est de factoriser le numérateur et le dénominateur par les termes prépondérants (suivant les règles des croissances comparées). Il vient ici

$$u_n = \frac{3n^2}{4e^{2n}} \left(\frac{1 - 2(\ln n)^3/n^2}{1 + (5n^3)/(4e^{2n})} \right).$$

Or, nous avons que, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2}{4e^{2n}} = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 - 2(\ln n)^3/n^2) = \lim\limits_{n\to+\infty}(1 + (5n^3)/(4e^{2n})) = 1$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Donnons maintenant un résultat sur les opérations pour des suites qui tendent vers l'infini.

Proposition 5. *Soient (u_n) et (v_n) des suites de nombres réels. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*

(i) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1/v_n) = 0$.

(ii) Si (u_n) est minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$.

(iii) Si (u_n) est minorée par un nombre réel strictement positif, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = +\infty$.

(iv) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et si l'on a $u_n > 0$ pour tout n (assez grand), alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(1/u_n) = +\infty$

En particulier, la somme et le produit de deux suites qui tendent vers $+\infty$ tend vers $+\infty$. Rappelons ce qui passe lors d'un passage à la limite dans une inégalité.

Proposition 6. *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites convergentes de nombres réels. Si pour tout* n, $u_n \leq v_n$ *(ou* $u_n < v_n$*), alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} u_n$. *En particulier, si* (u_n) *est une suite convergente de nombres réels positifs, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.

Exemple 4. *Posons pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1/n$ *et* $v_n = -1/n$. *Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n < u_n$. *Mais,* $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Donnons un théorème d'encadrement.

Théorème 7. *(i) Soient* (u_n), (v_n) *et* (w_n) *des suites de nombres réels telles que pour tout* n, $u_n \leq v_n \leq w_n$. *Si* (u_n) *et* (w_n) *sont convergentes avec* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n$, *alors* (v_n) *converge et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n$.

(ii) Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites de nombres réels. Si pour tout* n, $u_n \leq v_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. *Alors,* $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exemple 5. *Soit* (u_n) *une suite bornée dans* $\mathbb{K}$ *et soit* (v_n) *une suite dans* $\mathbb{K}$ *qui converge vers* 0. *Alors, la suite* $(u_n v_n)$ *a pour limite* 0. *Par exemple, considérons pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$. *Comme pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \cos n \leq 1$, *il vient* $-1/n^2 \leq u_n \leq 1/n^2$. *Or,* $\lim_{n\to+\infty} 1/n^2 = 0$. *Donc,* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple 6. *Pour tout* $n \geq 1$, *on pose*

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Nous allons montrer que (u_n) *converge et déterminer sa limite. Pour cela, on commence par noter que si* $0 \leq k \leq n$, *on a* $n \leq n+\sqrt{k} \leq n+\sqrt{n}$, *et donc* $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \dfrac{1}{n}$. *En sommant ces inégalités pour* $k = 0, ..., n$ *et puisqu'il y a* $n+1$ *termes à sommer, il vient*

$$\frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}.$$

Si on pose, pour tout $n \geq 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}}$ *et* $w_n = \dfrac{n+1}{n}$, *on a alors* $v_n \leq u_n \leq w_n$. *Comme* $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 1$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ *par le théorème d'encadrement.*

Donnons un lien avec la continuité.

Théorème 8. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction, et* (u_n) *une suite convergente de nombres réels dont tous les termes appartiennent à* I. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ *et* f *est continue en* l, *alors* $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.

En adaptant la démonstration, on obtient le résultat suivant.

Proposition 9. *Soit (u_n) une suite de nombres réels, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $l \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (respectivement $+\infty$), alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l$ (respectivement $+\infty$).*

Exemple 7. *Soit (u_n) une suite convergente de nombres réels. Alors, la suite $(|u_n|)$ converge et $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\lim_{n\to+\infty} u_n|$.*

Exemple 8. *On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n}{(1+in)^2}$. On a $|(1+ni)^2| = |1+ni|^2 = 1+n^2$. Donc, pour tout n, $|u_n| = \dfrac{n}{1+n^2}$. Il s'en suit $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, puis $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. On utilise ici que le résultat de l'exemple précédent reste vrai pour les suites complexes (et le module).*

Exemple 9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \exp\left(\frac{n^2}{-2+\cos n}\right)$. Pour tout n, on a $1 \leq 2-\cos n \leq 3$, puis $1/3 \leq \dfrac{1}{2-\cos n} \leq 1$. Il s'en suit que pour tout n, $\dfrac{n^2}{-2+\cos n} \leq \dfrac{-n^2}{3}$. Donc, par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{-2+\cos n} = -\infty$ puis $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (on applique la proposition précédente).*

3. Développements limités

Pour étudier la convergence d'une série, nous allons utiliser des développements limités ou des équivalents. Les résultats de cette section seront donc fort utiles dans la suite. On commence par considérer le cas des fonctions et on verra ensuite comment appliquer les développements limités pour déterminer la limite d'une suite.

Définition 5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction (continue en 0). Si $n \in \mathbb{N}$, on dit que f possède un développement limité à l'ordre n en 0 s'il existe un polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ (nul ou de degré inférieur à n) tel que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0.$$

Si on pose pour $x \neq 0$ ($x \in I$), $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-P(x)}{x^n}$, alors $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et on a le développement limité de f en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + x^n\varepsilon(x).$$

Remarque 3. *Si la fonction f possède un développement limité à l'ordre n en 0 alors ce développement est unique. Il s'en suit que si f est paire (respectivement impaire), alors le polynôme P est pair (respectivement impair). Voir plus loin le cas des fonctions cosinus et sinus.*

Remarque 4. *Pour obtenir un développement limité de f en $a \neq 0$, on fait le changement de variable $u = x - a$ (quand x tend vers a, u tend vers 0). Le développement* *limité est alors de la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. *Pour obtenir un développement limité au voisinage de* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *(on parle alors de développement asymptotique), on peut poser* $u = 1/x$ *de sorte que quand* x *tend vers l'infini,* u *tend vers* 0. *Nous reviendrons sur ce dernier point dans le cas des suites.*

Exemple 10. *Soit* $f(x) = 2 + 3x - 5x^2 - x^3$. *Le développement limité de* f *en* 0 *à l'ordre* 2 *est* $f(x) = 2 + 3x - 5x^2 + x^2\varepsilon(x)$ *où* $\varepsilon(x) = -x$. *Le développement limité de* f *en* 0 *à l'ordre* 5 *est* $f(x) = 2 + 3x - 5x^2 - x^3 + x^5\varepsilon(x)$ *où* $\varepsilon(x) = 0$.

On peut tout réécrire avec un formalisme différent. Voir les exercices faits en TD.

Définition 6. *Soient* f, ϕ *des fonctions définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et soit* $a \in I$. *On suppose que pour tout* $x \in I$, $x \neq a$, $\phi(x) \neq 0$. *On dit que* ϕ *est prépondérante devant* f *(ou que* f *est négligeable devant* ϕ*) au voisinage de* a *s'il existe une application* $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in I$, $f(x) = \varepsilon(x)\phi(x)$ *et* $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. *On note alors* $f = o_a(\phi)$ *ou* $f(x) = o_a(\phi(x))$ *(notation de Landau) ou encore* $f = o(\phi)$ *au voisinage de* a.

Exemple 11. *On a* $\sin^3(x) = o(x)$ *au voisinage de* 0. *Cela se voit facilement en faisant un développement limité de* $\sin x$ *à l'ordre* 1 *en* 0.

La définition précédente s'étend naturellement au cas où $a = +\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 12. *On a* $x = o(x^2)$ *au voisinage de* $+\infty$. *Il suffit de poser* $\varepsilon(x) = 1/x$.

Remarque 5. *En utilisant les notations de Landau, le développement limité d'une fonction* f *à l'ordre* n *en* 0 *(s'il existe) s'écrit*

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + o(x^n).$$

Définition 7. *Soient* f, ϕ *des fonctions définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et soit* $a \in I$. *On suppose que pour tout* $x \in I$, $x \neq a$, $\phi(x) \neq 0$. *On dit que* f *est dominée par* ϕ *au voisinage de* a *s'il existe une application* $C : I \to \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in I$, $f(x) = C(x)\phi(x)$ *et* C *est bornée au voisinage de* a. *On note alors* $f = O_a(\phi)$ *ou* $f(x) = O_a(\phi(x))$ *(notation de Landau) ou encore* $f = O(\phi)$ *au voisinage de* a.

Remarque 6. *Comme toute fonction qui admet une limite en* a *est bornée au voisinage de* a, *on a* $f = o(\phi) \Longrightarrow f = O(\phi)$ *au voisinage de* a. *Sans réciproque.*

Exemple 13. *On a* $\sin x = O(1)$ *car la fonction sinus est bornée.*

Définition 8. *Soient* f, ϕ *des fonctions définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et soit* $a \in I$. *On suppose que pour tout* $x \in I$, $x \neq a$, $f(x) \neq 0$ *et* $\phi(x) \neq 0$. *On dit que* f *est équivalente à* ϕ *au voisinage de* a *s'il existe une application* $\lambda : I \to \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in I$, $f(x) = \lambda(x)\phi(x)$ *et* $\lim_{x\to a} \lambda(x) = 1$. *On note alors* $f \sim_a \phi$ *ou* $f(x) \sim_{x\to a} \phi(x)$ *ou encore* $f \sim \phi$ *au voisinage de* a.

Cette définition s'étend facilement au cas où $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

Remarque 7. *On a $f \sim_a \phi$ si et seulement si $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\phi(x)} = 1$ et ($\phi(a) = 0 \Longrightarrow f(a) = 0$).*

Exemple 14. *En utilisant le développement limité de $\sin x$, on a $\sin x \sim x$ au voisinage de 0.*

Faisons maintenant le lien avec les notions de continuité et dérivabilité.

Proposition 10. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $a \in I$.*

(i) Le développement limité de f à l'ordre 0 en a est $f(x) = f(a) + \varepsilon(x)$ où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

(ii) La fonction f est dérivable en a si et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas, le développement limité est

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Les principaux développements limités à connaitre par coeur (ou à savoir retrouver très vite) sont les suivants :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + ... + x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + ... + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + ... - \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n}\varepsilon(x).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

Remarque 8. *Comment obtenir ces développements et pour certains comment les retenir ou les utiliser ?*

(i) On obtient le développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$ de la façon suivante. Si $x \neq 1$, on a par sommation des termes d'une suite géométrique

$$1 + x + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.$$

D'où, en posant $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x}$, *on a ce qu'il faut. On obtient le développement limité de* $\dfrac{1}{1+x}$ *par le changement* $x \to -x$ *dans celui de* $\dfrac{1}{1-x}$. *Il suffit donc de connaitre celui de* $\dfrac{1}{1-x}$

(ii) Les développements de $\ln(1-x)$ *et de* $\ln(1+x)$ *s'obtiennent en intégrant ceux de leurs dérivées (donnés juste au dessus). Il faut faire attention à la constante d'intégration (on doit avoir égalité en* 0*).*

(iii) Les développements suivants s'obtiennent par la formule de Taylor. Les coefficients a_n *sont alors obtenus par la formule* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

(iv) Dans le cas où $\alpha = 1/2$, *le développement de* $(1+x)^\alpha$ *donne celui de* $\sqrt{1+x}$. *A l'ordre* 2 *par exemple,*

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

(v) Attention dans les développements de cosinus et sinus à l'ordre. Par exemple, le développement de $\cos x$ *à l'ordre* 4 *est*

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x).$$

alors que celui à l'ordre 5 *est*

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x).$$

En fait, seul le reste change !

(vi) En utilisant les développements limités de leurs dérivées (qui peuvent s'obtenir via la formule donnée pour $(1+x)^\alpha$*), on peut facilement obtenir des développements des fonctions arccosinus, arcsinus et arctangente. Par exemple, si* $f(x) = \arctan x$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. *Alors, en faisant le changement* $x \to x^2$,

$$f'(x) = 1 - x^2 + ... + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

d'où

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n}\varepsilon(x).$$

Donnons des règles sur les opérations sur les développements limités.

Somme et produit par un scalaire.

Proposition 11. *Soient* f *et* g *des fonctions qui ont pour développement limité à l'ordre* n *en* 0, $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ *et* $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$. *Le développement limité de* $f+g$ *à l'ordre* n *en* 0 *est* $(f+g)(x) = (P+Q)(x) + x^n\varepsilon(x)$. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *le développement limité de* $\lambda.f$ *à l'ordre* n *en* 0 *est donné par* $(\lambda f)(x) = (\lambda.P)(x) + x^n\varepsilon(x)$.

Remarque 9. *On a utilisé que la somme de deux restes ou le produit d'un reste par un réel est toujours un reste, et se note* $x^n\varepsilon(x)$.

Exemple 15. *Soit* $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. *Cette fonction se note* $ch(x)$ *et s'appelle "cosinus hyperbolique" par analogie avec la fonction cosinus. Son graphe, appelé chainette, apparait en mécanique. On a*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

D'où, par addition,

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

On peut aussi considérer la fonction sinus hyperbolique définie par $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. *Par un calcul similaire, on obtient*

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n}\varepsilon(x).$$

Produit.

Nous avons besoin d'une définition élémentaire.

Définition 9. *Soit le polynôme réel* $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ *et soit* $0 \leq p \leq n$. *Le polynôme tronqué de* P *à l'ordre* p *est*

$$T_p(P) = a_0 + a_1x + ... + a_px^p.$$

Proposition 12. *Soient* f *et* g *des fonctions qui ont pour développement limité à l'ordre* n *en* 0, $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ *et* $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$. *Le développement limité de* $f.g$ *à l'ordre* n *en* 0 *est* $(f.g)(x) = T_n(fg)(x) + x^n\varepsilon(x)$.

Exemple 16. *Soit* $f(x) = \ln(1+x)\sin(x)$. *On cherche un développement limité de* f *en* 0 *à l'ordre* 4. *Or, on a*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

Comme les développements de $\ln(1+x)$ *et* $\sin x$ *commencent par* x, *il est inutile de faire un développement de* $\ln(1+x)$ *et* $\sin x$ *à l'ordre* 4. *En faisant le produit et en négligeant les termes d'ordre plus grand que* 4, *on obtient*

$$f(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x).$$

Composition.

Proposition 13. *Soient f et g des fonctions qui ont pour développement limité à l'ordre n en 0, $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$.* **SI** *$g(0) = 0$, le développement limité de $f \circ g$ à l'ordre n en 0 est $f \circ g(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n\varepsilon(x)$.*

Exemple 17. *Soit $f(x) = \cos(\sin x)$. On cherche un développement limité de f à l'ordre 5 en 0. On a*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x).$$

D'où,

$$f(x) = \cos(\sin x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}x^4 + x^5\varepsilon(x).$$

Exemple 18. *Soit $f(x) = e^{\cos x}$. On cherche un développement limité de f à l'ordre 3 en 0. Le problème est que $\cos 0 = 1$. On écrit alors $f(x) = e^{\cos(x)-1+1} = ee^{\cos x - 1}$. On a $\cos x - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$. Donc, $f(x) = e\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) + x^3\varepsilon(x)$.*

Quotient.

Proposition 14. *Soient f et g des fonctions qui ont pour développement limité à l'ordre n en 0, $f(x) = A(x) + x^n\varepsilon(x)$ et $g(x) = B(x) + x^n\varepsilon(x)$. Si $g(0) = B(0)$ est non nul, le développement limité de f/g à l'ordre n en 0 est*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + x^n\varepsilon(x),$$

où Q est le quotient à l'ordre n de la division de A par B selon les puissances croissantes.

Exemple 19. *Soit $f(x) = \tan(x)$. On souhaite obtenir un développement limité à l'ordre 5 de f en 0.*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x).$$

D'où,

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x).$$

Terminons par des applications aux limites de suites.

Exemple 20. *Soit $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ pour tout $n > 0$. L'erreur fatale est de dire que cette suite tend vers 1 car $1 + 1/n$ tend vers 1. Mais, la puissance croit avec n ! Ecrivons $u_n = e^{n \ln(1+\frac{1}{n})}$ puis $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon(n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$. D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.*

Exemple 21. *Soit* $u_n = (1/\sqrt{n}) - \sqrt{n}\sin(1/n)$. *Le développement limité à l'ordre* 3 *de la fonction sinus en* 0 *est*

$$\sin x = x - x^3/6 + x^3\varepsilon(x)$$

où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. *On l'applique à* $x = 1/n$ *(qui tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$*). On obtient alors*

$$u_n = \frac{1}{6n^{5/2}} - \frac{\varepsilon(1/n)}{n^{5/2}}.$$

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

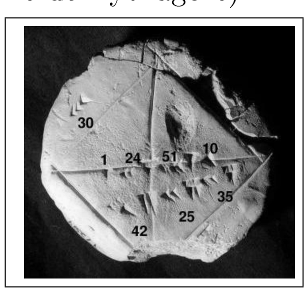
Exemple 22. *Soit* $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ *pour* $n > 0$. *Le développement limité à l'ordre* 3 *de la fonction* $\ln(1+x)$ *en* 0 *est*

$$\ln(1+x) = x - (x^2/2) + (x^3/3) + x^3\varepsilon(x)$$

où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. *On l'applique à* $x = (-1)^n/\sqrt{n}$ *(qui tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$*). On obtient alors* $u_n = a_n + b_n + c_n + d_n$ *où* $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, $b_n = \dfrac{-1}{2n}$, $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ *et* $d_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}\varepsilon(1/n)$.
Il s'en suit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. *On reviendra sur cet exemple dans l'étude des séries (et sur l'intêret de considérer un développement limité à l'ordre* 3*).*

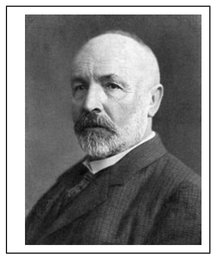
4. Suites réelles et monotonie

En 1797 est publié la *"Théorie des fonctions analytiques"* de Lagrange dans lequel le grand scientifique veut se débarrasser des considérations de fluxions, d'évanouissants et autres notions mal définies par Leibniz, Newton et leurs successeurs (voir le chapitre sur l'intégration). Il tente de développer l'analyse sur des bases solides, mais il se heurte à l'absence d'une construction rigoureuse de l'ensemble des réels. Cauchy dans son cours d'analyse de 1821 exige une rigueur inhabituelle à son époque. Mais, qu'est ce qu'une limite ? un nombre. Mais, alors qu'est ce qu'un nombre ? On sait depuis longtemps qu'il existe des nombres irrationnels comme π ou $\sqrt{2}$ (pour ce dernier exemple, en lien avec le théorème de Pythagore).

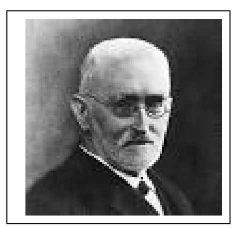


Sur cette tablette babylonienne (vers -7000 av JC) sont donnés en écriture cunéiforme les 4 premiers chiffres en base 60 de $\sqrt{2}$, *soit*
$\sqrt{2} = 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 \sim 1,41421296...$ *Et sans calculatrice !*

Vers 1870 apparaissent les premières constructions de $\mathbb{R}$ par Weiestrass et ses élèves (Cantor, Heine), Dedekind et Méray. Comme l'écrit celui-ci en 1869 "jusqu'à présent on a regardé ces propositions comme des axiomes" (c'est à dire on admettait les théorèmes sans vraiment les démontrer). L'analyse pouvait alors se développer sur une base solide, avec des définitions et preuves rigoureuses. Une première construction consiste à identifier $\mathbb{R}$ avec les suites de Cauchy de rationnels (modulo une relation d'équivalence). Une autre construction consiste à définir un réel comme la donnée d'une partition de l'ensemble des nombres rationnels en une partie ascendante et une partie descendante (que l'on appelle de nos jours coupures de Dedekind). Par exemple, $\sqrt{2}$ est associé à la partition, $\mathbb{Q} = A \cup B$ avec $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2, x \leq 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \geq 2, x > 0\}$. Une fois $\mathbb{R}$ défini en tant qu'ensemble, il faut le munir d'une addition et une multiplication, d'un ordre, ... Il reste alors beaucoup de travail !



Georg Cantor (1845-1918). Après une enfance passée en Russie puis à Francfort, il fait ses études à Zurich puis à Berlin où il suit les cours de Weierstrass en analyse, de Kummer en arithmétique et de Kronecker en théorie des nombres. Il soutient sa thèse dans ce dernier domaine en 1867. A la suite de sa rencontre avec Dedekind, il va s'intéresser à la convergence des séries de Fourier, en particulier à l'unicité de tels développements. Il va développer alors une théorie révolutionnaire mais pas toujours appréciée à sa juste valeur à l'époque, celle de la théorie des ensembles et des cardinaux transfinis qui est de nos jours classique.



Richard Dedekind (1831-1916). Il se tourne tout d'abord vers la physique et la chimie, avant de se passionner pour les mathématiques, séduit par les arguments précis de cette matière. Il suit à Göttingen les cours de Gauss et Dirichlet, enseigne à Göttingen, Zurich puis Brunswick (sa ville natale). Il est avec Kummer et Kronecker le fondateur de la théorie algébrique des nombres et un précurseur dans l'utilisation de méthodes algébriques pour l'étude de courbes (ce qu'on appelle de nos jours les courbes algébriques). De sa correspondance avec Cantor nait la théorie des ensembles.

Un point crucial est la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ qui est une conséquence des constructions de $\mathbb{R}$. Commençons par définir la notion de borne supérieure.

Définition 10. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. S'il existe, le plus petit majorant de A s'appelle la borne supérieure de A et se note* $\sup A$. *Celle-ci est l'unique réel tel que pour tout $x \in A$, $x \leq \sup A$ et si $t < \sup A$, il existe un nombre $x \in A$ tel que $t < x$ (ou de façon équivalente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon < x_\varepsilon$.*

Théorème 15. *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, admet une (unique) borne supérieure.*

Remarque 10. *La propriété de borne supérieure est caractéristique de $\mathbb{R}$ au sens suivant. On peut démontrer qu'il existe un unique corps commutatif (à isomorphisme près) prolongeant $\mathbb{Q}$ qui est totalement ordonné et qui vérifie la propriété de la borne supérieure. Ce corps est appelé $\mathbb{R}$ (avec ses opérations et sa relation d'ordre usuelle). Ceci définit rigoureusement $\mathbb{R}$. Notons que le corps $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure car par exemple l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq \sqrt{2}\}$ est borné dans $\mathbb{Q}$ mais n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.*

On en déduit une application fondamentale pour les suites.

Théorème 16. *Toute suite (u_n) dans $\mathbb{R}$ qui est croissante et majorée (respectivement décroissante et minorée) est convergente et sa limite est un majorant (respectivement un minorant) de $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Si (u_n) est une suite croisssante, non majorée (respectivement décroissante, non minorée) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).*

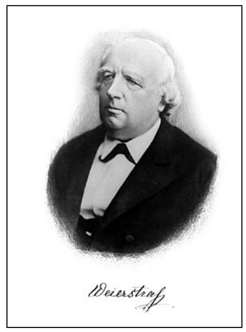
Une autre application est la propriété des segments emboités. Soient (a_n) et (b_n) deux suites dans $\mathbb{R}$ avec pour tout n, $a_n \leq b_n$. Si l'on a que pour tout n, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, alors il existe au moins un réel x qui appartient à tous les $[a_n, b_n]$, c'est à dire $x \in \bigcap_n [a_n, b_n]$ (et donc cette intersection est non vide). L'inclusion $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ signifie que (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

Définition 11. *On dit que les suites réelles (a_n) et (b_n) sont adjacentes si (a_n) est croissante, (b_n) est decroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$.*

Par la propriété des segments emboités, il vient alors :

Théorème 17. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes. Alors, (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite l. De plus, pour tout n, $a_n \leq l \leq b_n$.*

Bernhard Bolzano (1781-1848) Après des études en théologie, philosophie et mathématique, il est ordonné prètre en 1815. Mais, il se passionne pour les mathématiques, en quête permanente de fondements rigoureux (en particulier en analyse). Il est un des premiers à proposer une démonstration analytique du théorème des valeurs intermédiaires. Mais, il bute sur l'absence d'une construction rigoureuse de $\mathbb{R}$ qui impliquerait d'avoir la propriété de la borne supérieure. La plupart de ses travaux restent assez peu connus bien après son décés (Une partie de ses résultats resteront inconnus jusque 1865, ses oeuvres complètes (une cinquantaine de volumes) commence seulement à être publiées).



Karl Weierstrass (1815-1897). Tout d'abord enseignant en lycée, il obtient tardivement un poste universitaire à Berlin où il va former de nombreux étudiants dont certains deviendront de grands mathématiciens (par exemple, Cantor ou Heine).On le surnomme souvent le père de l'analyse moderne. En effet, il publie peu mais dans ses cours (qui seront diffusés par ses élèves), il donne des définitions des notions de limite, de continuité, de convergence, ... qui reposent sur une construction rigoureuse de $\mathbb{R}$ et qui sont proches de celles utilisées actuellement.

Appliquons cela à des suites récurrentes. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ donné. On suppose que I est stable par f, c'est à dire que $f(I) \subset I$ ou de façon équivalente $f(x) \in I$ si $x \in I$. Ceci se démontre généralement en étudiant les variations de la fonction f. On en déduit par récurrence que (u_n) est bien définie et que pour tout n, $u_n \in I$.

Proposition 18. *Avec les mêmes notations que ci-dessus, on suppose de plus que f est croissante sur I.*
(i) Si $u_1 > u_0$, alors la suite (u_n) est croissante.
(ii) Si $u_1 < u_0$, alors la suite (u_n) est décroissante.
(iii) Si $u_1 = u_0$, alors la suite (u_n) est constante.

Ainsi, dans le cas (i), si on arrive à montrer que la suite (u_n) est aussi majorée, alors la suite (u_n) converge. Comment déterminer sa limite ? Voila un élément de réponse.

Proposition 19. *Avec les mêmes notations que ci-dessus, supposons que f est continue sur I et que (u_n) converge vers $l \in I$. Alors, $f(l) = l$ (on dit que l est un point fixe de f sur I).*

Exemple 23. *Soit la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = 2$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$. *Posons* $I =]\sqrt{2}, +\infty[$ *et* $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ *pour* $x \in I$. *En étudiant les variations de* f, *on voit que* f *est croissante sur* I *et que* $f(x) > \sqrt{2}$ *si* $x > \sqrt{2}$. *Il s'en suit que* (u_n) *est décroissante, minorée par* $\sqrt{2}$. *Donc,* (u_n) *converge. Si on note* l *sa limite, on a que* $l \geq \sqrt{2}$ *et* l *est solution de l'équation* $f(x) = x$. *Les solutions de cette équation sont* $x = -\sqrt{2}$ *et* $x = \sqrt{2}$. *Comme* $l \geq \sqrt{2}$, *on a* $l = \sqrt{2}$.

5. Suites extraites, valeurs d'adhérence

Définition 12. *Soit* (u_n) *une suite dans* $\mathbb{K}$. *On dit que la suite* (v_n) *est une sous-suite ou une suite extraite de* (u_n) *s'il existe une application strictement croissante* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *telle que pour tout* n, $v_n = u_{\phi(n)}$.

Exemple 24. *Soit* (u_n) *une suite dans* $\mathbb{K}$. *Alors, les suites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont des suites extraites de la suite* (u_n).

Remarque 11. *Soit* $(u_{\phi(n)})$ *une suite extraite de la suite* (u_n) *dans* $\mathbb{K}$. *Alors, pour tout* n, $\phi(n) < \phi(n+1)$. *Il s'ensuit par récurrence que pour tout* n, $\phi(n) \geq n$.

Proposition 20. *Soit* (u_n) *une suite dans* $\mathbb{K}$ *qui converge vers* l. *Alors, toute suite extraite de* (u_n) *converge vers* l.

Une suite extraite de (u_n) peut converger sans que (u_n) converge (voir les exemples ci-dessous). Cependant, on a le résultat suivant.

Proposition 21. *Soit* (u_n) *une suite dans* $\mathbb{K}$. *Alors,* (u_n) *converge si et seulement si les suites extraites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *convergent et ont la même limite* l. *Dans ce cas,* $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.

Définition 13. *On appelle valeur d'adhérence d'une suite* (u_n) *tout élément dans* $\mathbb{K}$ *qui est limite d'une suite extraite convergente de* (u_n)

Exemple 25. *Si une suite* (u_n) *converge vers* l, *alors* l *est une valeur d'adhérence de* (u_n). *Posons pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. *En considérant les suites extraites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}), *on voit que* 1 *et* -1 *sont valeurs d'adhérence de* (u_n). *On peut montrer que ce sont les seules. Posons pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos n$. *Alors, l'ensemble des valeurs d'adhérence de* (u_n) *est* $[-1, 1]$. *Ainsi, l'ensemble des valeurs d'adhérence est infini dans ce cas.*

Nous reformulons dans ce cadre la proposition 20.

Proposition 22. *Toute suite convergente* (u_n) *dans* $\mathbb{K}$ *admet une unique valeur d'adhérence qui est sa limite.*

Exemple 26. *La réciproque de la proposition précédente est fausse. Posons pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1 - (-1)^n)n$. *Alors,* (u_n) *n'a comme valeur d'adhérence que* 0 *mais elle ne converge pas.*

Exemple 27. *Soit* (u_n) *définie par* $u_n = (-1)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors,* (u_n) *a pour valeur d'adhérence* -1 *et* 1. *Donc, la suite* (u_n) *ne converge pas d'après la proposition précédente.*

Terminons par le théorème de Bolzano-Weierstrass qui est une conséquence de la propriété de la borne supérieure.

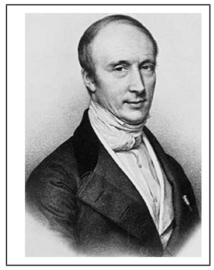
Théorème 23. *Toute suite bornée (u_n) dans $\mathbb{K}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathbb{K}$.*

Pourquoi ce théorème porte ces deux noms ? Bolzano voulait enfin donner des démonstrations rigoureuses des résultats classiques de l'époque comme le théorème des valeurs intermédiaires (si f est continue sur le segment $[a,b]$ avec $f(a).f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$). La notion de fonction n'est alors bien définie, que dire de celle de fonction continue. L'énoncé est donc folklorique. Bolzano va être le premier à essayer de donner une preuve rigoureuse de ce théorème. Vers 1817, il commence par écrire que la preuve "la plus courante" affirme que si une courbe continue a ses "ordonnées d'abord positives, puis négatives (ou inversement)", elle doit "nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées". Puis, il ajoute : "Il n'y a rien à objecter ni contre la justesse ni contre l'évidence de ce théorème géométrique". Mais, pour Bolzano, afin de donner un énoncé précis et une démonstration rigoureuse du théorème des valeurs intermédiaires, il faut commencer par définir une bonne notion de fonction continue. Pour cela, il considère que le fait qu'une fonction réelle f de la variable réelle x est continue pour les x dans un intervalle signifie "rien d'autre que ceci : si x est une telle valeur quelconque, la différence $f(x+\omega) - f(x)$ peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, si l'on peut prendre ω aussi petit que l'on voudra". Puis, il écrit $f(x+\omega) = f(x) + \Omega$ où Ω peut être vu en language moderne comme un $o(1)$. Ses idées de démonstration du théorème des valeurs intermédiaires sont proches de celles de la preuve donnée actuellement, c'est à dire un raisonnement par dichotomie qui met en jeu des suites adjacentes. Mais, il bute sur la convergence de telles suites, ce qui repose sur la propriété de la borne supérieure (ou inférieure). Bolzano énonce alors le résultat suivant (dans ce style alambiqué de l'époque) : "Si une propriété M n'appartient pas à toutes les valeurs d'une grandeur variable x, mais appartenant à toutes celles qui sont plus petites qu'un certain u, alors il existe toujours une grandeur U qui est la plus grande de celles dont on peut affirmer que toutes les valeurs inférieures x possèdent la propriété M". Sa preuve est incomplète car, faute d'une construction rigoureuse de $\mathbb{R}$, il lui manque le ... théorème de Bolzano-Weierstrass.

Remarque 12. *Bolzano utilise aussi d'autres résultats précurseurs, et donc en avance sur la construction de $\mathbb{R}$ (et ainsi sans justification rigoureuse). Comme le fait qu'une suite de Cauchy (il est un des premiers à considérer cette notion avant ... Cauchy) converge dans $\mathbb{R}$ et que tout nombre réel peut-être approximé par une suite de rationnels.*

Weierstrass, une fois la construction de $\mathbb{R}$ disponible, donna dans un de ses cours une preuve quasi-rigoureuse du théorème des valeurs intermédiaires en omettant (plus ou moins) volontairement l'apport de Bolzano. Vers 1870, Schwarz, élève de Weierstrass, répond à Cantor qui voulait publier une démonstration issue des cours de Weierstrass : "C'est qu'il me semble que l'importance principale doit être donnée aux noms de Bolzano et Weierstrass", avant d'ajouter "Je suis d'accord comme toi, avec l'opinion soutenue par Monsieur Weierstrass dans ses leçons, que sans les conclusions qui ont été développées par Monsieur Weierstrass à partir des principes de Bolzano, on n'aurait pas pu réussir dans de nombreuses recherches". On a donc décidé d'associer les deux noms.

6. Suites de Cauchy



Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Il est un mathématicien prolifique avec des contributions importantes dans des domaines très variés des mathématiques (analyse réelle et complexe, algèbre, géométrie, ...) , mais aussi un ultraroyaliste, extrèmenent religieux, d'un proséslithisme insupportable. Abel écrivait ainsi : "Cauchy est fou, et avec lui il n'y a pas moyen de s'entendre, bien que pour le moment il soit celui qui sait comment les mathématiques doivent être traitées. Ce qu'il fait est excellent, mais très brouillé". Son cours à l'Ecole polytechnique (première version vers 1820) est une tentative de mettre de la rigueur en analyse, en particulier sur les suites et séries numériques (il introduit alors la définition avec des ε de la notion de limite. Mais, $\mathbb{R}$ n'est toujours pas défini correctement ...). De nos jours, beaucoup de notions de mathématiques sont associées à son nom : Suites de Cauchy, théorème de Cauchy-Lipschitz, ...

Définition 14. *Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{K}$. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que si p, $q \in \mathbb{N}$, $(p, q \geq N \Longrightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon)$.*

On regroupe dans l'énoncé suivant les propriétés élémentaires des suites de Cauchy.

Proposition 24. *Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{K}$.*
(i) Si (u_n) est convergente, alors (u_n) est une suite de Cauchy.
(ii) Si (u_n) est une suite de Cauchy, elle est bornée.
(iii) Si (u_n) est une suite de Cauchy, elle admet au plus une valeur d'adhérence. Si elle en admet une, celle-ci est donc unique et (u_n) converge vers cette valeur.

Ces propriétés se démontrent en utilisant la définition d'une suite de Cauchy. Cependant, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il suit de (ii) que toute suite de Cauchy a au moins une valeur d'adhérence. Donc, par (iii), toute suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ converge. Avec (i), nous avons donc le résultat fondamental suivant.

Théorème 25. *Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{K}$. Alors (u_n) est convergente si et seulement si (u_n) est une suite de Cauchy.*

On dit alors que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des espaces complets ou encore des espaces de Banach.

Exemple 28. *Soit* (u_n) *la suite de* $\mathbb{R}$ *définie par* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *pour* $n \geq 1$*. Alors,* (u_n) *n'est pas convergente car elle n'est pas de Cauchy. Pour voir ce dernier point, notons que si* $n \geq 1$*, on a*

$$|u_{2n} - u_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = 1/2.$$