MAT 302
CHAPITRE 1 : SÉRIES

Ces notes de mat302 ne proposent pas un cours complet, mais présentent les principaux résultats du cours en les illustrant par des exemples. En particulier, elles ne contiennent aucune démonstration, les exemples (pourtant fondamentaux) ne sont qu'esquissés. Tout cela sera traité en détail lors des cours magistraux. On pourra aussi consulter le cours complet en ligne de Romain Joly (disponible sur le site moodle de mat302). Les principaux énoncés et les démonstrations associées seront FORTEMENT exigibles lors des contrôles de connaissance. Afin de montrer que le développement des mathématiques a suivi un parcours sinueux (fait de doutes, de retours en arrière avant d'arriver à un aboutissement), de nombreuses notes historiques évoquent l'évolution des théories et notions.

Table des matières

1. Généralités sur les séries

Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{K}$. On note pour tout $n \geq 0$, $S_n = u_0 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme des n premiers termes de la suite (u_n). Si la suite n'est définie que pour $n \geq n_0$, on pose pour $n \geq n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_n$. La suite (S_n) est la suite des sommes partielles de (u_n).

Définition 1. *Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{K}$. Si la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge, on dit que la série de terme général u_n est convergente ou encore que la série $\left(\sum u_n\right)$ (pour faire référence à la suite (S_n)) ou $\sum u_n$ converge. Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u_n$ diverge. Si $\sum u_n$ converge, la limite de S_n s'appelle la somme de la série $\sum u_n$ et se note $\sum_{k=0}^{n} u_k$.*

Attention à ne pas confondre la série $\sum u_n$ (qui est une suite) et sa somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ (qui est un nombre réel ou complexe.).

Exemple 1 (Série géométrique)**.** *Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x^n$. Alors, $\sum u_n$ est une série géométrique. On a le fait bien connu (si $x \neq 1$) :*

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.$$

Si $|x| < 1$, la série converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Si $|x| > 1$, elle diverge. Si $x = 1$, $S_n = n+1$ et donc la série diverge.
Considérons le cas où $x = 1/2$ et posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ (on a oublié le premier terme).
En écrivant $S_n = \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}\right)$, il vient que S_n tend vers 1. Nous avons donc formellement la formule

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$$

En d'autres termes, 1 est la somme infinie de sa moitié, puis de la moitié de sa moitié, etc. Cette formule sert pour discuter du paradoxe de Zénon d'Élée (5-ième siècle av. JC). Voir le cours de mat302, page 1.

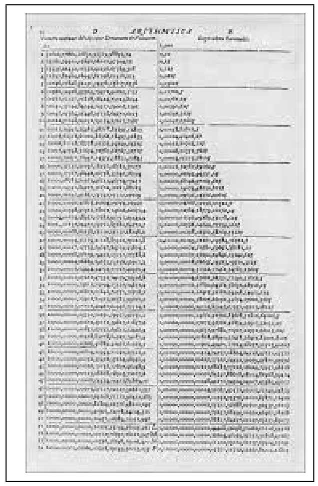
Remarque 1. *En 1647, Grégoire de Saint-Vincent publie son grand traité "Ouvrage géométrique". Il écrit avant de donner un exemple géométrique :*
"J'appelle suite géométrique une quantité finie divisée par une succession ininterrompue dans un rapport quelconque donné".
Il propose ensuite une des premières définitions de la limite d'une suite :
"La limite d'une progression géométrique est la fin d'une suite qu'aucune progression n'atteint- même si on la continue à l'infini- mais dont elle pourra s'approcher plus près que tout intervalle donné". Pour lui, une progression géométrique est "une succession finie d'une suite géométrique".

Exemple 2 (Série exponentielle)**.** *Soit $x \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\displaystyle\frac{x^n}{n!}$ a pour somme partielle*

$$S_n = 1 + \frac{x}{1!} + ... + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

On rappelle que $n! = n \times (n+1) \times ... \times 1$ et que par convention $0! = 1$. Par la formule de Taylor, la suite (S_n) converge vers e^x. Donc, la série de terme général $\displaystyle\frac{x^n}{n!}$ converge et sa somme est $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x$. Une telle formule semble apparaitre pour une des premières fois (avec une validation empirique) dans le mémoire "Introductio in analysin infinitorum" du grand mathématicien suisse Euler en 1748. Notons que dans ce même livre, Euler se pose des questions comme "Si le nombre d'habitants d'une province s'accroit tous les ans d'une trentième, et qu'il y ait au commencement 100

000 habitants ; on veut savoir combien il y en aura au bout de 100 ans ?". Il faut alors introduire des quantités comme $(1+1/30)^{100}$ *et savoir calculer des exponentielles et des logarithmes. Et sans calculatrice ... Pour cela, on utilise des approximations par des séries comme la formule d'Euler ci-dessus.*



Une page d'une table de logarithmes décimaux publiée par Briggs en 1624. Tous les calculs se font à la main en utilisant un algorithme assez astucieux. Ce type de table était utile en astronomie par exemple.

Exemple 3 (Série harmonique)**.** *La série de terme général (dans* $\mathbb{R}$*)* $u_n = 1/n$ *diverge. En effet, nous avons vu que la suite de ses sommes partielles* (S_n) *n'est pas de Cauchy, donc ne converge pas.*

Exemple 4 (Série téléscopique)**.** *Soit* (a_n) *une suite dans* $\mathbb{K}$*. On pose pour tout* n*,* $u_n = a_{n+1} - a_n$*. Alors, les sommes partielles de la série de terme général* u_n *sont de la forme*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0.$$

Donc, la série de terme général u_n *converge si et seulement si la suite* (a_n) *converge. Dans ce cas,* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0$*. Les séries de ce type sont appelées "séries téléscopiques", nous reviendrons plus tard sur cette notion.*

Exemple 5 (Développement décimal d'un réel positif)**.** *Soit* a *un réel strictement positif. On considère la suite* $a_n = \dfrac{E(10^n a)}{10^n}$ *où* $E(.)$ *est la fonction partie entière. Alors, la suite* (a_n) *est croissante, de limite* a *et on a pour tout* n*,* $a - 10^{-n} < a_n \leq a$*. Posons* $d_0 = a_0 = E(a)$ *et pour tout* $n \geq 1$*,* $d_n = 10^n(a_n - a_{n-1})$*. Alors, pour tout* $n \geq 1$*,* $d_n \in \mathbb{N}$ *et* $0 \leq d_n \leq 9$*. En utilisant l'exemple précédent, on voit que la série de terme général* $d_n/10^n$ *converge et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = a$*. On obtient ainsi le développement décimal d'un nombre réel positif* a *et les entiers* d_n *s'appellent les décimales de* a*.*

Regardons les opérations sur les séries.

Proposition 1. *(i) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ dans $\mathbb{K}$ convergent, il en est de même de la série de terme général u_n+v_n et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.*

(ii) Si la série $\sum u_n$ dans $\mathbb{K}$ converge et si $\lambda \in \mathbb{K}$, il en est de même de la série de terme général λu_n et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Ce n'est pas aussi clair quand les séries divergent :

Remarque 2.

(i) *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries dans $\mathbb{K}$. On suppose que $\sum a_n$ converge et que $\sum b_n$ diverge, alors, si on pose $u_n = a_n + b_n$, $\sum u_n$ diverge. En d'autres termes, la somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente. Pour voir cela, écrivons $b_n = u_n - a_n$. Si $\sum u_n$ converge, $\sum b_n$ converge d'après la proposition précédente. Ce qui est absurde.*

(ii) *Pour la somme de deux séries divergentes, il n'y a pas de règle général. Par exemple, supposons que pour tout $n > 0$, $a_n = -b_n = 1/n$. Alors, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ divergent (séries harmoniques). Mais, $u_n = a_n + b_n = 0$, donc $\sum u_n$ converge. D'un autre côté, posons pour tout $n > 0$, $a_n = 1/n$ et $b_n = -1/(n+1)$. Alors, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ divergent (séries harmoniques). Pourtant, $u_n = a_n + b_n = 1/(n(n+1))$ qui converge. En effet, $0 \le u_n \le 1/n^2$ et la série $\sum 1/n^2$ converge. Donc, $\sum u_n$ converge par théorème de comparaison (voir le second paragraphe).*

Voici un résultat simple qui permet facilement de conclure dans certains cas. On parle alors de divergence grossière.

Proposition 2. *Si u_n ne tend pas vers 0, la série de terme général u_n diverge.*

Par contraposée, il vient que si une série converge, son terme général tend vers 0.

Exemple 6 (Série harmonique)**.** *La proposition précédente n'a pas de réciproque. Posons pour tout $n > 0$, $u_n = 1/n$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Cependant, on a vu que la série $\sum u_n$ diverge.*

2. Séries réelles à termes positifs

Une série $\sum u_n$ est dite à termes positifs si pour tout n, $u_n \ge 0$ (Si la série est à termes négatifs, on applique les résultats suivants à la série de terme général $-u_n$). La suite des sommes partielles (S_n) est alors croissante. Il vient alors par les propriétés des suites rappelées précédemment le résultat suivant.

Proposition 3. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors, $\sum u_n$ converge si et seulement la suite des sommes partielles (S_n) est bornée.*

Donnons maintenant un théorème de comparaison.

Théorème 4. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs.*

(i) Si pour tout n, $u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
(ii) Si pour tout n, $u_n \leq v_n$ et $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
(iii) Si $u_n \sim v_n$ quand $n \to +\infty$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature (c'est à dire qu'elles convergent ou divergent en même temps).

Rappelons que $u_n \sim v_n$ (les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes) quand n tend vers $+\infty$, s'il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0$ et pour n assez grand, $u_n = v_n(1 + \varepsilon(n))$. Attention dans la manipulation des équivalents car il y a des règles contraignantes. Il est parfois préférable d'utiliser des développements limités.

Voici une application simple du théorème de comparaison qui nous sera utile dans la suite.

Corollaire 5. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes strictement positifs. Si la suite donnée par $\frac{u_n}{v_n}$ a une limite finie l non nulle, alors les séries de terme général u_n et v_n ont la même nature (convergente ou divergente).*

Une série de Riemann est une série $\sum u_n$ où le terme général est de la forme $u_n = \frac{1}{n^s}$ avec $s \in \mathbb{R}$ fixé. Par exemple, si $s = 1$, on retrouve la série harmonique qui est divergente.

Théorème 6. *La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^s}$ converge si et seulement si $s > 1$.*

Le cas limite $s = 1$ correspond à celui de la série harmonique. On en déduit la règle de Riemann qui est fort utile en pratique.

Théorème 7. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. S'il existe $s > 1$ tel que $\lim_{n \to +\infty} n^s u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.*

Nous donnons maintenant deux critères classiques qui ne permettent pas malheureusement de conclure dans tous les cas. Ces résultats se démontrent par comparaison avec les séries géométriques.

Jean de Rond d'Alembert (1717-1783). Après des études en droit et en médecine, il se tourne vers les mathématiques. Il développe des méthodes nouvelles dans le domaine des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles (en lien avec la mécanique des solides) ou la théorie des fonctions de la variable complexe. Ainsi, en 1746, il démontre que tout polynôme complexe admet au moins une racine. A partir de 1749, il se consacre avec Denis Diderot à la rédaction de l'Encyclopédie.

Théorème 8 (Règle de d'Alembert). *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$, alors*

(i) Si $\alpha < 1$, $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ diverge.

Le cas $\alpha = 1$ ne permet pas de conclure. Le théorème se démontre via le résultat suivant.

Proposition 9. *Soit $\sum u_n$ une série dont tous les termes sont des réels strictement positifs. S'il existe un réel $K < 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq K$, alors $\sum u_n$ converge.*

Exemple 7. *On cherche à étudier suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$ la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^{an}}$. La présence de puissances et de factorielles dans u_n incite à essayer d'utiliser la règle de d'Alembert. Or, on a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} \frac{1}{(n+1)^{a-1}}.$$

On peut écrire $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} = \exp(-an\ln(1+1/n)) \to e^{-a}$ quand n tend vers $+\infty$. Il s'en suit trois cas.

(i) Si $a > 1$, u_{n+1}/u_n tend vers 0. Donc, $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $a = 1$, u_{n+1}/u_n tend vers $e^{-1} \in]0,1[$. Donc, $\sum u_n$ converge.

(iii) Si $a > 1$, u_{n+1}/u_n tend vers $+\infty$. Donc, $\sum u_n$ diverge.

Théorème 10 (Règle de Cauchy). *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n} = \alpha$, alors*

(i) Si $\alpha < 1$, $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ diverge.

Le cas $\alpha = 1$ ne permet pas de conclure. La démonstration repose sur le résultat suivant.

Proposition 11. *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs ou nuls. S'il existe un réel $K < 1$ tel que pour tout n, $u_n^{1/n} \leq K$, alors la série $\sum u_n$ converge.*

Exemple 8. *Soit la série de terme général $u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$. Ce terme comporte une puissance n-ième, donc la règle de Cauchy semble adapter à l'étude de la convergence de cette série. Ainsi, $u_n^{1/n} = \frac{n-1}{2n+1} \to 1/2$ quand n tend vers $+\infty$. Donc, $\sum u_n$ converge.*

Les deux régles (D'Alembert et Cauchy) ne sont pas équivalentes et s'utilisent souvent dans des situations différentes (par exemple, on utilise la règle de Cauchy quand u_n contient des termes avec des exposant n, alors que la règle de d'Alembert parait alors inadaptée). Un lien entre les deux critères est donné par le résultat suivant.

Théorème 12. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et vaut l, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1/n}$ existe et vaut l*

Une méthode pratique pour étudier la convergence d'une série positive consiste à faire une comparaison série-intégrale. Cependant, elle nécessite la notion d'intégrale généralisée qui sera vue dans le dernier chapitre de ce cours. Nous allons juste illustrer les idées de ce type de comparaison par un exemple simple.

Exemple 9. *Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = 1/n^\alpha$ ($n > 1$). On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha}$ et on cherche un équivalent de S_n suivant les valeurs du paramètre α. Comme $x \to x^{-\alpha}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$, il vient que si $k \geq 2$,*

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

L'inégalité de gauche reste vraie pour $k = 1$. On somme l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à n, et celle de droite pour k allant de 2 à n (on obtient alors $S_n - 1$) :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq \int_1^{n} \frac{dt}{t^\alpha} + 1.$$

D'où, en intégrant, il vient :

$$\frac{1}{1-\alpha}(n+1)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq S_n \leq \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + 1,$$

puis

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{S_n}{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \leq 1 - \frac{1}{n^{1-\alpha}} + \frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

Comme $\alpha \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} = 1$, et on a finalement que $S_n \sim \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ quand n tend vers $+\infty$.

Si on avait voulu estimer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$, il aurait fallu calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt$, ce que l'on notera plus tard $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et on obtient une "intégrale généralisée (ou impropre)". L'étude de la convergence d'une telle intégrale sera vue dans le dernier chapitre de ce cours.

3. Séries quelconques

On considère dans cette section des séries réelles dont le terme général n'est pas de signe constant (contrairement aux séries considérées dans le paragraphe précédent).

Définition 2. *Une série $\sum u_n$ dans K est absolument convergente si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.*

Ici $|.|$ est la valeur absolue si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Le lien avec les séries convergentes repose dans le théorème suivant.

Théorème 13. *Toute série absolument convergente $\sum u_n$ est convergente.*

Comme nous allons le voir plus tard, il existe des séries convergentes, mais non absolument convergentes. Ce qui motive la définition suivante.

Définition 3. *Une série $\sum u_n$ dans $\mathbb{K}$ est semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.*

Voici un exemple de résultat qui permet de construire des séries semi-convergentes.

Théorème 14 (Théorème spécial des séries alternées)**.** *Soit $\sum u_n$ une série dans $\mathbb{R}$ dont le terme général est la forme $u_n = (-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite de termes positifs (à partir d'un certain rang) qui tend vers 0 en décroissant. Alors, $\sum u_n$ converge. De plus, si on note pour tout n, $R_n = S - s_n$ où S est la somme de $\sum u_n$ (R_n est le reste d'ordre n), on a $|R_{n+1}| \leq a_{n+1}$.*

Exemple 10. *Soit pour tout $n > 0$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Alors, la série $\sum u_n$ converge par le théorème spécial des séries alternées, mais ne converge pas absolument ($\sum |u_n|$ est la série harmonique).*

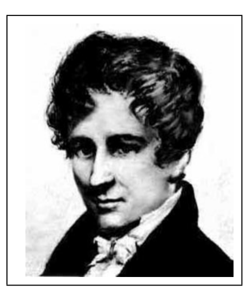
Définition 4. *Une série $\sum u_n$ dans $\mathbb{K}$ est une série télescopique si son terme général est de la forme $u_n = a_{n+1} - a_n$ où (a_n) est une suite dans $\mathbb{K}$.*

Il vient facilement le résultat suivant (déjà vu plus haut).

Proposition 15. *Soit $\sum u_n$ une série télescopique. Avec les mêmes notations que dans la définition précédente, la série $\sum u_n$ et la suite (a_n) ont la même nature. En particulier, si (a_n) converge vers l, $\sum u_n$ converge et sa somme vaut l.*

Cette proposition donne un des rares cas pour lesquels on peut calculer la somme de la série.

Exemple 11. *Soit $\sum u_n$ où pour tout $n > 0$, $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. En faisant une décomposition en élément simple, il vient que $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n > 0$. Il s'en suit que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Donc, $\sum u_n$ converge et sa somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ vaut 1.*



Niels Abel (1822-1829). Repéré par son professeur alors qu'il n'a pas 20 ans, il obtient une bourse pour se rendre à Paris et Berlin pour y rencontrer les plus grands mathématiciens de l'époque (dont Cauchy qui refusera de le recevoir). Il étudie la résolution de l'équation polynômiale du cinquième degré et démontre que sa résolution est impossible par radicaux (contrairement à celle du second degré que l'on peut résoudre via le discriminant). Par ces travaux, il est un précurseur de la théorie des groupes. Rentré en Norvège, à la veille d'être reconnu, il meurt d'une pneunomie. De nos jours, un prix prestigieux (décerné par l'Académie norvégienne des sciences et des lettres) porte son nom et est un des équivalents du prix Nobel qui n'existe pas en mathématique.

La transformation d'Abel est une transformation que l'on effectue sur certaines séries, en particulier trigonométriques, en vue de prouver leur convergence. Elle consiste en la procédure suivante. Si pour tout k, $u_k = a_k b_k$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, il s'en suit $a_k = A_k - A_{k-1}$. La transformation d'Abel consiste alors à écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = a_0 b_0 - A_0 b_1 + A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Cette transformation amène au critère d'Abel de convergence des séries :

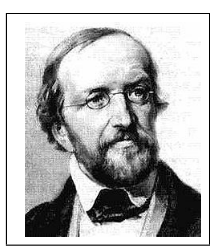
Théorème 16 (Critère d'Abel). *Soient (a_n) et (b_n) deux suites dans $\mathbb{K}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) La suite (A_n) définie par $A_n = \sum_{k+0}^{n} a_k$ est bornée.
(ii) La série $\sum |b_n - b_{n+1}|$ est convergente.
(iii) La suite (b_n) tend vers 0.
Alors, la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

La transformation d'Abel permet de démontrer le résultat classique suivant.

Théorème 17 (Critère de Dirichlet). *Soient (a_n) une suite dans $\mathbb{K}$ et (b_n) une suite dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) La suite (A_n) définie par $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée.
(ii) La suite (b_n) est décroissante et tend vers 0.
Alors, la série $\sum a_n b_n$ est convergente.



Gustav (Lejeune-)Dirichlet (1805-1859). Professeur à l'Université de Breslau (1826-1828), puis à celle de Berlin jusque 1855, il termine sa carrière à Göttingen *où il succède à son idole, Gauss. A la suite d'une rencontre avec Fourier à Paris, il se passionne pour les séries de Fourier et démontre certaines conditions de convergence (dont le théorème appelé de nos jours théorème de Dirichlet). Il a des contributions importantes en théorie des nombres (il donne une preuve presque complète du grand théorème de Fermat pour $n = 5$) et aussi en analyse (problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques dans un domaine du plan complexe).*

Exemple 12. *Pour tout $n > 0$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $u_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$. On a donc pour tout $n > 1$, $u_n = a_n b_n$ où $a_n = \sin(n\theta)$ et $b_n = 1/\sqrt{n}$. Pour démontrer que $\sum u_n$ en appliquant le critère de Dirichlet, il suffit de voir que $A_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ est borné indépendamment de n. Pour cela, on note que $\sin(n\theta) = \mathfrak{Im}(e^{in\theta})$ et donc $A_n = \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)$. Comme $e^{ik\theta} = (e^{i\theta})^k$, on est donc ramené à calculer la somme d'une série géométrique. Ainsi, si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (sinon, $A_n = 0$ et le problème est réglé), il vient*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\
&= \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \frac{e^{-i(n+1)\theta/2} - e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} \\
&= e^{in\theta/2} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$A_n = \sin(n\theta/2) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

D'où, A_n est majoré indépendamment de n par $\dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$, ce qui permet de conclure que $\sum u_n$ converge.

Une méthode assez simple pour étudier la convergence d'une série est de faire un développement limité du terme général. On applique, pour conclure, les critères vus précédemment.

Exemple 13. *Soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = (1/\sqrt{n}) - \sqrt{n}\sin(1/n)$. Le développement limité à l'ordre 3 de la fonction sinus en 0 est*

$$\sin x = x - x^3/6 + x^3\varepsilon(x)$$

où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. On l'applique à $x = 1/n$ (qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$). On obtient alors

$$u_n = \frac{1}{6n^{5/2}} - \frac{\varepsilon(1/n)}{n^{5/2}} = a_n + b_n$$

où $a_n = \dfrac{1}{6n^{5/2}}$ *et* $b_n = -\dfrac{\varepsilon(1/n)}{n^{5/2}}$*. La série* $\sum a_n$ *est à termes positifs et converge d'après le critère de Riemann. Pour le second terme, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} |n^{5/2} b_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} |\varepsilon(1/n)| = 0$*. Donc, par le critère de Riemann,* $\sum |b_n|$ *converge. Ainsi,* $\sum b_n$ *converge absolument, donc converge. D'où,* $\sum u_n$ *converge.*

Exemple 14. *Soit* $\sum u_n$ *la série de terme général* $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$*. Le développement limité à l'ordre 3 de la fonction* $\ln(1+x)$ *en 0 est*

$$\ln(1+x) = x - (x^2/2) + (x^3/3) + x^3\varepsilon(x)$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$*. On l'applique à* $x = (-1)^n/\sqrt{n}$ *(qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$). On obtient alors* $u_n = a_n + b_n + c_n + d_n$ *où* $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$*,* $b_n = \dfrac{-1}{2n}$*,* $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ *et* $d_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}\varepsilon(1/n)$*. Les séries* $\sum a_n$ *et* $\sum c_n$ *converge par le théorème spécial des séries alternées (il n'est pas difficile de voir qu'en fait,* $\sum c_n$ *converge absolument par le critère de Riemann). De plus,* $\sum d_n$ *converge absolument par le critère de Riemann puisque* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2}|d_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} |\varepsilon(1/n)| = 0$*. La série de terme général* $a_n + c_n + d_n$ *converge en tant que somme de trois séries convergentes. La série* $\sum b_n$ *diverge (série harmonique). Donc,* $\sum u_n$ *diverge en tant que somme d'une série divergente et d'une série convergente.*

Terminons par un résultat plus technique. Soit (u_n) une suite. Une idée simple pour étudier la convergence de la série $\sum u_n$ est de rassembler les termes “par paquet” de sorte que dans chaque paquet, les termes se simplifient. Formalisons ceci. Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante avec $\phi(0) = 0$. Cette application va permettre d'étiqueter les paquets en considérant $v_n = \sum\limits_{k=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} u_k$. Au lieu de considérer la suite des sommes partielles (S_N), on ne considère que la suite extraite $(S_{\phi(N)})$ qui somme par paquet les termes de la suite d'indices vérifiant $\phi(N) \leq n < \phi(N+1)$.

Théorème 18. *Avec les mêmes notations que ci-dessus, supposons que la taille des paquets soit bornée, c'est à dire* $|\phi(n+1) - \phi(n)|$ *est bornée indépendamment de n et que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *(sinon, la série* $\sum u_n$ *diverge grossièrement). Alors, les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont la même nature. De plus, si* $\sum u_n$ *converge, alors les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont la même somme.*

Exemple 15. *Soit, pour* $n \geq 2$*,* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$*. Pour étudier la convergence de la série* $\sum u_n$*, on ne peut pas utiliser le théorème spécial des séries alternées. Nous allons plutôt sommer par paquet de deux (c'est à dire* $\phi(n) = 2n$*). On a alors* $\phi(n+$

1) $-\ \phi(n) = 2$ *et* $v_n = u_{2n} + u_{2n+1} = \dfrac{-1}{2n(2n+1)}$. *Par le critère de Riemann,* $\sum v_n$ *converge absolument, donc converge. D'où,* $\sum u_n$ *converge par le théorème précédent.*