MAT103
Outils fondamentaux de mathématiques pour les sciences de la nature
Calculer, modéliser et expliquer

Table des matières

1. Guide de lecture

Le but de ce cours est de présenter quelques rappels sur des notions vues au collège et au lycée. Ces notions seront très utiles pour l'UE mat206 qui propose une introduction à la biologie mathématique et à l'étude de la dynamique des populations ainsi que pour les diverses UE (en biologie, chimie, physiques, statistiques, informatique, ...) de votre parcours. Il n'y a quasiment rien de théorique, mais nous insistons plutôt sur les aspects pratiques et calculatoires.

Le dernier paragraphe contient toutes les archives disponibles pour mat103 (qui est une UE crée en 2016).

Ces notes contiennent une bonne centaine d'exercices. Tous ne seront pas traités. A vous de travailler seuls ceux qui ne seront pas abordés (avec le soutien de vos enseignants !). Les exercices sans étoile sont des applications directes du cours. Les exercices avec des étoiles sont plus durs et ne sont à faire que lorsque ceux sans étoile sont assimilés. Certains exercices ont été proposés par des collègues de biologie ou de chimie.

Des exemples directement issus de la biologie sont donnés au cours de texte.

Hervé Pajot, responsable de l'UE mat103 (herve.pajot@univ-grenoble-alpes.fr)

2. Logique, exemples de raisonnement

Dans ce paragraphe, nous allons présenter des rudiments de logique et de théorie des ensembles. Les notions considérées dans la suite peuvent être vues comme des briques élémentaires du grand jeu de Lego que sont les mathématiques !

Quantificateurs.
Les quantificateurs sont les deux symboles
— $\forall$ qui signifie “Quelque soit” ou “Pour tout” et
— $\exists$ qui signifie “Il existe”.
Ainsi, “ $\forall n \in \mathbb{N}$” signifie “Pour tout entier n dans $\mathbb{N}$” et “$\exists n \in \mathbb{N}$” signifie “Il existe un entier n dans $\mathbb{N}$”. Les ensembles classiques de nombres comme $\mathbb{N}$ seront définis plus loin.
La phrase (ou proposition mathématique) “ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$”, écrite à l'aide des quantificateurs, se lit “Pour tout nombre réel x il existe un nombre réel y tel que $y^2 = x$”. Une façon plus courte de dire la même chose serait “Tout nombre réel possède une racine carrée réelle”. Cette phrase est fausse : seulement les nombres réels positifs possèdent des racines carrées réelles.

La phrase (ou proposition mathématique) “$\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x$ divise y” veut dire “Il existe un entier x tel que x divise tout entier y”. Cette phrase est vraie : il suffit de prendre $x = 1$.

Les négations des phrases mathématiques.
Si (P) est une proposition mathématique alors sa négation est la proposition (non P), c'est à dire la proposition (P est fausse). De façon générale, nous admettrons l'axiome du tiers exclu qui stipule que, pour toute proposition mathématique (P), soit (P) est vraie, soit sa négation (non P) est vraie (et (P) est alors fausse).

Commençons par un exemple tiré de l'actualité récente. La négation de la phrase “Aucun coureur du Tour de France 2015 n'était dopé” est “Au moins un coureur du Tour de France 2015 était dopé”. Il est clair qu'une des propositions précédentes est vraie et l'autre est fausse. Nous laissons le soin aux instances compétentes de déterminer laquelle !

En général, la négation de la phrase “$\forall x, P$ est vraie” est “$\exists x, P$ est fausse”, pas “$\forall x, P$ est fausse”. De même, la négation de la phrase “$\exists x, P$ est vraie” est “$\forall x, P$ est fausse”. Par exemple, considérons la phrase P : “Tous les Français sont des raleurs”. La phrase Q : “Tous les Français sont des non-raleurs” ne peut pas être la négation de P. En effet, on peut très bien imaginer une situation où certains Français sont des raleurs et d'autres ne le sont pas. Les phrases P et Q seraient alors fausses toutes les deux, alors que au moins une parmi P et non(P) doit être vraie.
Exemples. Soient les phrases
(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x \leq n$.
(ii) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq n$.
Ecrivons maintenant les négations de (i) et (ii) :

(non i) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x > n$.
(non ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, x > n$.
Quelles sont les phrases vraies et celles fausses ? Notons que les propositions (i) et (ii) sont obtenues l'une à partir de l'autre en échangeant l'ordre des quantificateurs. Cela change quelque chose ?

Les implications.
On utilise souvent en maths les symboles logiques $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$. Ainsi, $(P) \Longrightarrow (Q)$ signifie que la propriété (P) implique la propriété (Q), c'est à dire, si (P) est vraie, alors on peut être sur que (Q) est vraie. Nous dirons aussi que (P) est une condition suffisante de (Q).
Par exemple, si on considère les propositions

$$\text{(P)} : x > 5$$
$$\text{(Q)} : x > 0$$

alors on a bien $(P) \Longrightarrow (Q)$ parce que si x est strictement plus grand que 5 alors on peut être sur que x est strictement plus grand que 0.

Exemples (A vérifier comme exercice).

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, $(x > 1) \Longrightarrow (x^2 > 1)$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, (n est premier et $n \neq 2$) $\Longrightarrow$ (n est impair).

D'un autre côté, $(P) \Longleftrightarrow (Q)$ signifie que la propriété (P) est équivalente à la propriété (Q), c'est à dire, (P) est vraie si et seulement si (Q) est vraie, ou encore $(P) \Longrightarrow (Q)$ ET $(Q) \Longrightarrow (P)$. Nous dirons aussi que (P) est une condition nécessaire et suffisante de (Q).

Exemples (A vérifier comme exercice).

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, (n est pair) $\Longleftrightarrow$ (n^2 est pair).

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $(x^2 < 1) \Longleftrightarrow -1 < x < 1$.

La notion de "condition nécessaire" est peut-être plus difficile à aborder. De façon non rigoureuse, (P) est une condition nécessaire de (Q), si (P) est nécessaire pour avoir (Q), ou encore si (P) n'est pas vérifiée, alors il en est de même de (Q). De façon plus formelle, (P) est une condition nécessaire de (Q) si

$$(\text{non}P) \Longrightarrow (\text{non}Q).$$

Le lecteur astucieux aura noté que la proposition précédente est équivalente à

$$(Q) \Longrightarrow (P)$$

et donc une condition nécessaire et suffisante est bien une condition qui est à la fois nécessaire et suffisante ...

Exemple . Considérons les propositions suivantes.
(P) L'entier $n > 2$ est impair.
(Q) L'entier $n > 2$ est premier.
Alors, (P) est une condition nécessaire de (Q). En effet, si l'entier n n'est pas impair, il est pair donc divisible par 2. Puisque $n > 2$ on a que $n \neq 2$ et donc n n'est pas premier. Nous venons de voir que $(\text{non}P) \Longrightarrow (\text{non}Q)$.

Logique, exemples de raisonnement en lien avec la biologie (Exemples proposés par Annie Ray-Viallet, biologiste)

Exemple 1

Tous les animaux faisant partie du groupe des Vertébrés ont une colonne vertébrale et uniquement les Vertébrés ont une colonne vertébrale.
Etablir la (les) relation(s) d'implication entre P « l' animal donné A est un Vertébré » et Q « l' animal A a une colonne vertébrale P implique Q et réciproquement (la présence d'une colonne vertébrale est une condition nécessaire et suffisante pour que l'animal soit un Vertébré)
L'affirmation « il suffit qu'un animal présente une colonne vertébrale pour qu'il appartienne au groupe des Vertébrés » est-elle juste ? Oui

Exemple 2

Dans le monde animal, il existe plusieurs animaux capables de voler. Ce sont des structures particulières, les ailes qui leur permettent de voler. Parmi les animaux capables de voler, il y a des Oiseaux, des Insectes , quelques espèces de Mammifères telles que les Chauve-souris.
Le groupe des Oiseaux est constitué d'espèces qui présentent toutes une paire d'ailes, cependant quelques espèces, souvent du fait de leur taille, ne peuvent pas voler malgré la présence de ces ailes.
Etablir la (les) relation(s) d'implication entre les affirmations :
P1 : « l' animal A présente des ailes» et Q1 « l' animal A est capable de voler » Q1 implique P1 mais la réciproque n'est pas juste
P2 : « l'animal A présente des ailes » et Q2 « l'animal A est une espèce d' Oiseau » Q2 implique P2 mais la réciproque n'est pas juste

L'affirmation « il suffit qu'un animal présente des ailes pour qu'il vole » est-elle juste ? NON puisque certains Oiseaux équipés d'ailes ne volent pas
L'affirmation « il est nécessaire qu'un animal présente des ailes pour qu'il puisse voler » est-elle juste ? OUI seuls les animaux équipés de structures spécifiques appelées ailes sont capables de voler
L'affirmation « il est nécessaire et suffisant qu'un animal présente des ailes pour que ce soit une espèce d'Oiseau » est-elle juste ? NON, un animal peut présenter des ailes et être un Insecte par exemple, ce n'est pas forcément une espèce d'Oiseau. L'affirmation juste est « il est nécessaire qu'un animal présente des ailes pour que ce soit une espèce d'Oiseau » (condition nécessaire mais pas suffisante)

Exemple 3

Les biomolécules sont les molécules synthétisées par les organismes vivants. Elles contiennent toutes des atomes de carbone, hydrogène et oxygène. Par contre, seules certaines des biomolécules contiennent de plus des atomes d'azote : ce sont principalement les protéines, les acides aminés, les acides nucléiques (ADN et ARN) et les nucléotides.
On distingue parmi ces biomolécules les macromolécules qui sont des « grosses » molécules du vivant constituées par l'enchainement de molécules plus petites :
par exemple, les protéines sont des macromolécules constituées d'un enchainement d'acides aminés et les acides nucléiques sont des macromolécules constituées d'un enchainement de nucléotides.
Etablir la (les) relation(s) d'implication entre les affirmations suivantes :
A :« la biomolécule M1 contient des atomes d'azote »

B :« la biomolécule M1 est une protéine »
C :« la macromolécule M2 contient des atomes d'azote »
D : « la macromolécule M2 est un acide nucléique »
E : « la macromolécule M2 est un acide nucléique ou une protéine »
F : « la biomolécule M3 ne contient pas d'atomes d'azote »
G : « la biomolécule M3 n'est pas une protéine »
B implique A (réciproque fausse)
D implique C (réciproque fausse)
C implique E et E implique C (il est nécessaire et suffisant qu'une **macromolécule** M2 contienne des atomes d'azote pour affirmer que c'est une protéine ou un acide nucléique)
F implique G (réciproque fausse : la biomolécule M3 peut être un acide aminé, un nucléotide, un acide nucléique qui contient des atomes d'azote)

Ensembles.
Un ensemble est une collection d'objets — généralement des objets mathématiques (mais pas toujours) qui sont ses éléments. Il y a (grosso modo) deux façons d'écrire un ensemble.

- En extension, quand on connait tous les éléments de l'ensemble. Par exemple, $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 3, 5, 7, ...\}$.
- En compréhension, quand on connait une propriété qui caractérise l'ensemble. Par exemple, $F = \{x \in \mathbb{N}; \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x = 2n+1\}$ (L'ensemble F, ensemble des nombres entiers naturels impairs, est le même qu'au dessus). Un autre exemple est l'ensemble $G = \{x \in \mathbb{R}; x^2 = \sin x\}$. Ceci est l'ensemble de tous les nombres réels x qui satisfont l'équation $x^2 = \sin x$.

Si E est un ensemble et x est un élément de E, nous noterons $x \in E$ l'assertion "x appartient à E". En particulier $x \in \mathbb{N}$ signifie que x appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$ ou encore que l'objet mathématique x est un nombre entier.

Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. On peut définir sur $\mathcal{P}(E)$ les opérations suivantes.

- Union : $A \cup B = \{x \in E; x \in A$ ou $x \in B\}$.
- Intersection : $A \cap B = \{x \in E; x \in A$ et $x \in B\}$.
- Complémentaire : $A^c = \{x \in E; x \notin A\}$.

Exemples.
1) Soient $A = \{1, -3\}$ et $B = \{5, 1, -7\}$. Alors, $A \cap B = \{1\}$ et $A \cup B = \{-7, -3, 1, 5\}$.
2) Soient $A = [-1, 5]$ et $B = [2, 56[$. Alors, $A \cap B = [2, 5]$ et $A \cup B = [-1, 56[$. Faites un dessin !

Si A et B sont deux sous-ensembles de l'ensemble E, $A \subset B$ signifie que pour tout $x \in A$, $x \in B$ et on dit que A est inclus dans B. Ainsi, l'égalité $A = B$ est équivalente aux deux inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.

On note $\emptyset$ le sous-ensemble (appelé ensemble vide) de l'ensemble E ne contenant aucun élément. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.
Remarque. Attention à ne pas confondre $\in$ et $\subset$! Par exemple, si A est un sous-ensemble de l'ensemble E, alors $A \in \mathcal{P}(E)$ mais $A \subset E$.

Sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$.

Décrivons maintenant trés rapidement les ensembles classiques de nombres.

Ensemble des entiers naturels (noté $\mathbb{N}$)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}.$$

En particulier, $\mathbb{N}$ contient les entiers pairs et impairs, ainsi que les nombres premiers (c'est à dire les entiers naturels divisibles seulement par 1 et par eux-mêmes).

Ensemble des entiers relatifs (noté $\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \{...., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Ensemble des rationnels (noté $\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Rappelons que pour comparer ou additionner deux nombres rationnels, on doit les réduire au même dénominateur. Soient $x = \frac{p}{q}$ et $x' = \frac{p'}{q'}$. On a $x = \frac{pq'}{qq'}$ et $x' = \frac{p'q}{qq'}$ d'où :

$$\begin{aligned} x = x' &\Leftrightarrow pq' = p'q \\ x + x' &= \frac{pq' + p'q}{qq'} \\ x - x' &= \frac{pq' - p'q}{qq'} \\ x.x' &= \frac{pp'}{qq'} \end{aligned}$$

Ensemble des réels (noté $\mathbb{R}$)

Qui est $\mathbb{R}$? L'ensemble de tous les nombres que l'on rencontre dans la nature ? Cette définition est beaucoup trop floue pour pouvoir être utilisée en mathématiques ! Une construction rigoureuse de $\mathbb{R}$ (comme celles proposées par Cantor, Heine, Méray ou Dedekind vers 1872) serait trop longue pour être présentée ici. Pour simplifier, disons que $\mathbb{R}$ complète $\mathbb{Q}$, au sens où $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ mais aussi les limites de suites dans $\mathbb{Q}$.

On a les inclusions trivialles $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et ces inclusions sont strictes (c'est à dire sans égalité). Par exemple, $\sqrt{2}$ est un réel mais n'est pas rationnel (c'est à dire $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Voir plus loin pour une preuve.

Soient a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On définit les intervalles (ouverts, fermés, semi-ouverts)

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}.$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}.$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}.$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}.$$

De même, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}.$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x > a\}.$$

$$] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}.$$

$$] - \infty, a[= \{x \in \mathbb{R}; x < a\}.$$

Exercice 1. *(1) Déterminer toutes les implications vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$ entre les assertions suivantes.*

$$(A) : -1 \leq x \leq 2 \qquad (B) : -1 < x \leq 2$$
$$(C) : x \in]-1, 2] \qquad (D) : x \in [-1, 2]$$

(2) Déterminer toutes les implications vraies pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ entre les assertions suivantes.

$$(A) : \; -1 \leq x \leq 2 \qquad (B) : \; 0 \leq x \leq 1 \qquad (C) : \; 0 \leq x \leq 3$$

Exercice 2. *Ecrire les assertions suivantes et leurs négations avec des quantificateurs et les opérations logiques. On pourra utiliser la notation $p|q$ signifiant « p divise q ». Dans chaque cas, dire si l'assertion est vraie ou fausse et le justifier.*

(1) Tout entier naturel divisible par 6 est aussi divisible par 3.

(2) Tout entier naturel divisible par 2 et par 3 est aussi divisible par 6.

(3) Tout entier naturel divisible par 2 et par 14 est aussi divisible par 28.

Exercice 3. *(*) Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune des propriétés suivantes, écrire sa négation et illustrer graphiquement la propriété et sa négation.*

(1) $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \; \exists a \in \mathbb{R}$ tel que $f_i(a) = 1$

(2) $\exists i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\forall a \in \mathbb{R}, \; f_i(a) = 1$

(3) $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \; f_i(a) = 1$

(4) $\forall a \in \mathbb{R}, \; \forall i \in \{1, 2, 3\}, \; f_i(a) = 1$

Exercice 4. *(*) Placer les symboles $\Leftarrow, \Rightarrow, \Longleftrightarrow$ qui conviennent entre les propositions, dire si (b) est une condition nécessaire et/ou suffisante de (a) puis écrire les contraposées des implications (on pourra préciser la nature implicite des différentes variables en jeu).*

(1) (a) $x \leq 0$ *(b)* $x < 0$ *;*

(2) (a) $|x - x_0| < \alpha$ *(b)* $x < x_0 + \alpha$ *;*

(3) (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \; x$ *vérifie* P *(b)* $\exists x \in \mathbb{R}, \; x$ *vérifie* P *;*

(4) (a) $A \cap B = A$ *(b)* $A \subset B$ *;*

(5) (a) $A \cup B = A$ *(b)* $B \subset A$ *;*

(6) (a) $x^2 \geq x$ *(b)* $x \geq 1$ *;*

(7) (a) n *est impair* *(b)* n^2 *est impair.*

Exercice 5. *Ecrire la négation des phrases suivantes :*

(1) $\exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n^2 < n+1$

(2) $\forall a \in A, \exists b \in B$ *tel que* $a < b^2$

(3) $\exists a \in A$ *tel que* $\forall b \in B, a < b^2$ *et* $a \leq b^3 + 1$

(4) $\forall a \in A, \exists b \in B$ *tel que* $a < b^2$ *et* $a \leq b^3 + 1$

(5) $\forall a \in A, \exists b \in B$ *tel que* $a < b^2$ *ou* $a \leq b^3 + 1$

Exercice 6. *(*) Le but de cet exercice est de (re)voir quelques méthodes classiques de démonstration.*
1) Montrer que si n *est un entier impair, il en est de même de* n^2 *(Méthode directe).*
2) Montrer que si n *est un entier tel que* n^2 *est pair, il en est de même de* n *(Par contraposée).*
3) Montrer que $\sqrt{2}$ *est irrationnel (Par l'absurde).*
4) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + ...n = \frac{n(n+1)}{2}$ *(Par récurrence).*
5) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq |x|$ *(Par disjonction des cas).*

3. Fractions, puissances, pourcentages

Fractions, puissances entières.

On rappelle que si x et y sont des réels, on a les identités remarquables suivantes :

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

Si n et m sont des entiers et si x est un réel (non nul), on a $x^{-n} = 1/x^n$, $x^n x^m = x^{n+m}$, $x^n/x^m = x^{n-m}$, $(x^n)^m = x^{nm}$. De plus, $(-x)^n = x^n$ si n est pair et $(-x)^n = -x^n$ si n est impair. Enfin, si y est un réel, $(xy)^n = x^n y^n$.
Si a, b, c et d sont des réels non nuls, on a

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Exercice 7. *Simplifier les expressions suivantes, où x, y sont des nombres réels (on discutera le cas échéant pour quelles valeurs de x et y chaque expression est définie).*

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \qquad B = \frac{12}{8} \qquad C = \frac{\frac{2}{3}}{4} \qquad D = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} \qquad E = \frac{2}{x} - \frac{1}{x}$$

$$F = \frac{2x}{x^2} \qquad G = \frac{\frac{2}{x}}{4} \qquad H = \frac{\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}} \qquad I = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad J = \frac{xy}{x^2}$$

$$K = \frac{\frac{2}{x}}{y} \qquad L = \frac{\frac{x^2}{y}}{\frac{y^2}{x}} \qquad M = \frac{x^2 - y^2}{x - y} \qquad N = \frac{121^2 - 79^2}{121 - 79}$$

Exercice 8. *Simplifier les expressions suivantes, où x est un nombre réel (on discutera le cas échéant pour quelles valeurs de x chaque expression est définie).*

$$A = 2^3 \qquad B = 3^2 \qquad C = (-3)^2 \qquad D = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$E = \sqrt{x}^2 \qquad F = \sqrt{x^2} \qquad G = (-x)^3 \qquad H = \left(x^2\right)^3$$

Exercice 9. *La masse solaire est l'unité de masse utilisée pour les étoiles. Elle correspond à la masse du soleil $M_0 = 19891.10^{26}$ kg.*
1) Donner un ordre de grandeur en kg de la masse solaire.
2) Les étoiles les moins massives du système solaire sont appelées des "naines rouges". Elles ont une masse comprise entre 0,3 et 0,08 masse solaire. Donner un ordre de grandeur de la masse en kilogramme d'une naine rouge de masse égale à 0,09 masse solaire (Indication : $19891 \times 0,09 = 1790,19$).
3) En janvier 2004, un astronome de l'université de Californie a annoncé avoir trouvé l'étoile la plus massive jamais observée. Nommée LBV 1806-20, elle aurait une masse d'au moins 150 massses solaires. Donner un ordre de grandeur en kilogrammes de la masse de cette étoile (Indication : $150 \times 1,9891 = 298,365$).
Rappels : Si $x = 309,2.10^{-5}$, alors l'écriture scientifique de x est $x = 3,092.10^{-3}$ et l'ordre de grandeur de x est 3.10^{-3}.

Exercice 10. *La masse d'un nouveau né du ronqual commun est 2 tonnes, on la note A. La masse d'une petite chauve-souris est 6g, on la note B.*
Donner un ordre de grandeur en kilogrammes de A, B et A/B. Que peut-on en déduire ?

Proportions, pourcentages.

Exercice 11. *La chambre d'Adrien a la forme d'un parallépipède rectangle de longueur 4m, de largeur 3m et de hauteur 2,20m. Un des murs a une fenêtre de 1m sur 1,50m. Adrien veut repeindre les murs, la porte et le plafond de sa chambre et il doit mettre deux couches. Avec un pot de 5 litres de peinture (sur lequel il est écrit $0,08l/m^2$), quelle surface peut-on recouvrir de deux couches ? Quelle quantité de cette* *peinture Adrien a-t-il besoin ?*

Exercice 12. *Lors de différentes missions lunaires, des réflecteurs de faisceaux laser ont été installés sur la Lune de façon à pouvoir mesurer précisément la distance Terre-Lune depuis des observations terrestres. Le principe de cette mesure est simple : un puissant faisceau de rayons laser est émis à un instant trés précis depuis la Terre en direction des réflecteurs, qui en réflechissent une partie ; celle-ci est alors recue sur la Terre par un téléscope. L'enregistrement des émissions et de réception des rayons lumineux donne donc la durée d'un aller-retour de la lumière entre la Terre et la Lune.*
1) Expliquer comment, connaissant la vitesse de la lumière, on peut en déduire la distance Terre-Lune.
2) La vitesse de la lumière notée c (pour célérité) est une constante : $c = 299792458 m.s^{-1}$.
Un faisceau de rayons laser a effectué un aller-retour entre la Terre et la Lune en 2,5645 secondes. Calculer la distance de la Terre à la Lune (Indication : $2,5645 \times c \sim 7688177685 \sim 2 \times 3844408879$*).*
3) La première détermination de la distance Terre-Lune est due à Aristaque de Samos (310-230 av. J.C.). Utilisant la distance parcourue par la Lune pendant une éclipse totale, il obtint 357 000 km. Comparer cette valeur à celle obtenue dans la question 2 (Préciser le pourcentage d'erreur par exemple).

Exercice 13 (Partiel, décembre 2014)**.** *Un objet est vendu en magasin au prix de 120 euros.*
1) Pendant les soldes, l'objet subit une réduction de 20%*. Quel est son nouveau prix ?*
2) Aprés les soldes, l'objet retrouve son prix initial. Quel est le pourcentage d'augmentation correspondant ?

Exercice 14. *Dans un pays imaginaire, le chef de l'Etat gagne une indemnité de 7084 euros par mois.*

(1) *Aprés son élection, le chef de l'Etat décide d'augmenter son indemnité de 172 %. A combien se monte alors l'indemnité mensuelle ?*
(2) *A l'élection suivante, un nouveau chef de l'Etat est élu. Il décide de diminuer son indemnité de 30 %. Quel est le nouveau montant de celle-ci ?*
(3) *Un journaliste remarque que ce nouveau chef de l'Etat gagne encore 142 % de plus que le prédécesseur de son prédécesseur. Que pensez-vous de cette affirmation ?*

Exercice 15 (Examen, Décembre 2014)**.** *Un commerçant baisse de 25 pour cent le prix d'un article coûtant initialement 140 euros. Se rendant compte que son bénéfice est insuffisant, il décide d'augmenter le prix de cet article pour que la réduction accordée sur le prix initial soit de 10 pour cent.*
1) A quel prix ce commerçant veut-il vendre cet article ?
2) Quel pourcentage d'augmentation doit-il alors appliquer au prix ayant subi la réduction de 25 pour cent ?

Exercice 16 (Examen, juin 2015). *Un commerçant fait une promotion de 20 pour cent sur les jeans et de 40 pour cent sur les tee-shirts. Emy achète un jean à 33,60 euros et un tee-shirt à 8,40 euros. On posera les calculs sans les effectuer.*
1) Combien coutait intialement un jean ? un tee-shirt ?
2) Quel est le pourcentage de réduction dont a bénéficié Emy sur ses achats ?

Exercice 17. *Safia posséde deux aquariums et 72 poissons exotiques. Il y avait 60 poissons dans le grand aquarium et elle en ajoute 20 pour cent. Elle augmente de 50 pour cent le nombre de poissons dans le petit aquarium. Quel est le pourcentage d'augmentation du nombre total de poissons de Safia ?*

Exercice 18. *(*)*

(1) *La TVA sur un produit passe de 5% à 20%. Quelle est le pourcentage d'augmentation du prix total du produit ?*

(2) *Un épargnant place son argent sur un livret qui lui rapporte 3% par an. Après 10 ans, quel sera le pourcentage d'augmentation de son épargne ?*

Exercice 19. *On dispose d'un test imparfait pour détecter une certaine maladie. Le tableau ci-dessous indique les résultats du test et la condition réelle de* 10 000 *patients testés.*

	tests positifs	*tests négatifs*	*total*
patients malades	99	1	100
patients sains	891	9 009	9 900
total	990	9 010	10 000

(1) *Quel pourcentage des patients est malade ?*
(2) *Quel pourcentage des patients reçoivent un test positif ?*
(3) *Quel pourcentage des patients malades reçoivent un test positif ?*
(4) *Quel pourcentage des patients dont le test est positif sont malades ?*

4. Généralités sur les fonctions, fonctions usuelles

Inégalités, encadrements

Si $x \leq y$ alors $-x \geq -y$ et de manière générale, si $\lambda < 0$, $\lambda x \geq \lambda y$. Si $x \leq y < 0$ alors $0 > 1/x \geq 1/y$ et $x^2 \geq y^2 > 0$. Si $0 < x \leq y$ alors $1/x \geq 1/y > 0$ et $0 < x^2 \leq y^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$.

Exercice 20. *Soient x, y deux nombres réels ; déterminer le meilleur encadrement possible pour chaque expression ci-dessous, en fonction des encadrements donnés sur x et y.*

(1) x^2 *avec* $1 \leq x \leq 2$ *;*

(2) x^2 *avec* $-1 \leq x \leq 2$ *;*

(3) $\dfrac{1}{1+x^2}$ *avec* $-1 \leq x \leq 2$ *;*

(4) $\dfrac{1}{1-x^2}$ *avec* $-1 < x < \frac{1}{2}$ *;*

(5) $x+y$ *avec* $\begin{matrix} 1 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 3 \end{matrix}$ *;*

(6) xy *avec* $x, y \in [\sqrt{2}, 2]$ *;*

(7) xy *avec* $\begin{matrix} x \in [-1,1] \\ y \in [-1,1] \end{matrix}$ *;*

(8) $|x-y|$ *avec* $\begin{matrix} x \in [-1,1] \\ y \in [-1,1] \end{matrix}$ *;*

(9) $\dfrac{x}{y}$ *avec* $\begin{matrix} x \in [1,2] \\ y \in [2,3] \end{matrix}$ *;*

(10) $\dfrac{x}{y}$ *avec* $\begin{matrix} x \in [1,2] \\ y \in [-3,-2] \end{matrix}$ *;*

(11) $\dfrac{x}{y}$ *avec* $\begin{matrix} x \in [-2,3] \\ y \in [2,3] \end{matrix}$ *;*

(12) $\dfrac{1}{x+y}$ *avec* $\begin{matrix} x \in [1,2] \\ y \in [2,3] \end{matrix}$ *;*

(13) $\dfrac{1}{y-x}$ *avec* $\begin{matrix} x \in]1,2[\\ y \in]2,3[\end{matrix}$ *;*

(14) $(x-y)^2$ *avec* $\begin{matrix} x \in]1,2[\\ y \in]2,3[\end{matrix}$ *;*

(15) $(x-y)^2$ *avec* $x, y \in [-1,1]$.

(16) $\dfrac{x-y}{x+y}$ *avec* $\begin{matrix} x \in [1,9] \\ y \in [10,20] \end{matrix}$ *;*

(17) $\dfrac{x+y}{x-y}$ *avec* $\begin{matrix} x \in [1,9] \\ y \in [10,20] \end{matrix}$ *;*

Exercice 21. *Une salle de réunion rectangulaire de longueur 50m et de largeur 25m peut être partagée (suivant sa longueur) grâce à une cloison mobile. On note x la nouvelle longueur d'une des deux salles. Donner un encadrement de x sachant que pour des raisons techniques, l'aire de cette salle doit être supérieure à 450 m^2 et que son périmètre doit être inférieur à 90m.*

Exercice 22. *(*) 1) Soient x et y des réels. Démontrer que $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$. A quelle condition a-t-on égalité ?*
2) On considère un triangle dont les longueurs des côtés sont notées a, b et c.
2a) Ecrire trois inégalités entre a, b et c (Inégalité triangulaire).
2b) Déduire de ces trois inégalités la propriété de la double inégalité triangulaire : "Dans un triangle, la longueur de chaque côté est comprise entre la somme et la différence des longueurs des deux autres côtés".
2c) On considère un triangle ABC avec $AB = 14cm$ et $AC = 8cm$. Donner un encadrement de BC.

On termine par un exercice de programmation linéaire.

Exercice 23 (d'après Bac B de 1990)**.** *Un éleveur souhaite aménager pour ses moutons un enclos rectangulaire de $2400m^2$. Il veut trouver les dimensions qu'il doit donner à cet enclos pour que la dépense occasionnée par la clôture soit minimale. Il souhaite installer sur les deux longueurs et une largeur un grillage coûtant* 20 *euros le mètre, et sur la deuxième largeur une barrière coûtant* 40 *euros le mètre. On désigne*

par x la longueur de cet enclos, y sa largeur, exprimées en mètre ; la dépense d est exprimée en euros. On suppose que $x > 0$, $y > 0$ et $y \leq x$.
1) Justifiez les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xy & = & 2400 \\ 40x + 60y & = & d \end{array} \right.$$

2) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 1cm pour 10 mètres), représentez l'ensemble E des points de coordonnées (x, y) satisfaisant aux conditions suivantes :

$$x > 0, \quad y > 0, \quad y \leq x, \quad y = \frac{2400}{x}.$$

3) On note D_0 la droite d'équation $40x+60y = 0$ et D celle d'équation $40x+60y = d$. Représentez D_0 et montrer que D reste parallèle à D_0 quand d varie. A quelle condition D rencontre-t-elle E ? Que représentent les coordonnées des points d'intersection de D et E ?
4) En déduire la dépense minimale. Quelles sont alors les dimensions de l'enclos ?

Equations, inéquations

Soit le trinôme (Polynôme de degré 2) $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Cas 1. $\Delta > 0$. Alors, l'équation $P(x) = 0$ a deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. On peut alors factoriser P de la façon suivante : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est alors du signe de a à l'extérieur des solutions et du signe de $-a$ à l'intérieur des solutions. On peut le voir en faisant un tableau de signes à partir de la factorisation.
Exemple : Soit $P(x) = x^2 + x - 2$. Alors, $\Delta = 9 > 0$ et donc l'équation $x^2+x-2 = 0$ a deux solutions qui sont $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$. De plus, $x^2+x-2 \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$ et $x^2 + x - 2 \leq 0$ si et seulement si $-2 \leq x \leq 1$.

Cas 2. $\Delta = 0$. Alors, l'équation $P(x) = 0$ a une solution double qui est $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$. On peut alors factoriser P de la façon suivante : $P(x) = a(x - x_1)^2$. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est donc toujours du signe de a.
Exemple : Soit $P(x) = -x^2 + 2x - 1$. Alors, $\Delta = 0$. Donc, l'équation $-x^2 + 2x - 1 = 0$ a comme racine double $x_1 = 1$ et $-x^2 + 2x - 1$ est toujours négatif, c'est à dire $-x^2 + 2x - 1 \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cas 3. $\Delta < 0$. Alors, l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. On ne peut pas factoriser P comme précédemment. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a.

Exemple : Soit $P(x) = x^2 + 1$. Alors, $\Delta = -4 < 0$. Donc, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution et $x^2 + 1$ est toujours positif, c'est à dire $x^2 + 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$..

Exercice 24. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.*

$$(E_1) : x^2 = 4 \qquad (E_2) : 3x^2 + 4x + 3 = 4x^2 - 3x + 4$$
$$(E_3) : (x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3}) = 0 \qquad (E_4) : 2 + \frac{1}{x-1} = 1$$
$$(E_5) : \frac{2x+1}{3x-4} = \frac{x+1}{x-1} \qquad (E_6) : \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3}$$
$$(E_7) : x^3 + 4x^2 - 5x = 0 \qquad (E_8) : (x-1)(x^2 + 2x + 2) = x - 1.$$

Exercice 25. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :*

$$(I_1) : x^2 \leqslant 4 \qquad (I_2) : 2x^2 - 3x + 4 < 4x^2 + 2x + 9$$
$$(I_3) : \frac{1}{x} > x \qquad (I_4) : \frac{2x+1}{3x+2} < 0$$
$$(I_5) : 2x^3 - 5x^2 + 3x \leq 0 \qquad (I_6) : (x+2)(x^2 - 3x + 9) > x + 2$$
$$(I_7) : |x - 3| > |2x + 1|$$

Domaine de définition d'une fonction.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous savons qu'une fonction n'est pas toujours définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, c'est à dire qu'il peut y avoir un ou des éléments de $\mathbb{R}$ qui n'ont pas d'image par f. Penser à la fonction donnée par $f(x) = 1/x$ pour laquelle 0 n'a pas d'image. L'ensemble de définition de f, que nous noterons D_f, est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'expression $f(x)$ est bien définie. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est définie que pour $x \geq 0$. Il s'en suit que le domaine de définition de $x \to \sqrt{x^2 - 1}$ est $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, domaine sur lequel $x^2 - 1$ est positif. Le graphe de f est le sous-ensemble du plan (que l'on suppose muni d'un repère orthonormé)

$$G_f = \{(x, y); x \in D_f, y \in \mathbb{R} \text{ et } y = f(x)\}.$$

On rappelle que si f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$, c'est à dire D_f est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$, alors G_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $0y$. Dans le cas où f est impaire (c'est à dire D_f est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$), alors G_f est symétrique par rapport à l'origine du repère O.
Exemples. La fonction $x \to x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est paire. La fonction $x \to 1/x^3$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est impaire.

Exercice 26. *Pour chacune des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes, donner son ensemble de définition.*

$$a : x \mapsto 2x \qquad b : x \mapsto \pi x - 1 \qquad c : x \mapsto x^2/5$$
$$d : x \mapsto \frac{3x+2}{x-1} \qquad f : x \mapsto \frac{-x+1}{x^2-4} \qquad g : x \mapsto \sqrt{x+1}$$
$$h : x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2} \qquad i : x \mapsto \frac{12x+7}{\sqrt{x^2+1}} \qquad j : x \mapsto \frac{18x-7}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Fonctions logarithmes.
La fonction logarithme népérien notée $f(x) = \ln x$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Son graphe est représenté dans la figure 1. Rappelons que $\ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$ et que $\ln x = 1$ si et seulement si $x = e$. Le logarithme vérifie la propriété fondamentale suivante :

$$\text{Pour tous réels strictement positifs } a \text{ et } b,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Nous en déduisons que si a et b sont des réels strictement positifs, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$. Par récurrence, nous pouvons aussi démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tout $a > 0$, $\ln(a^n) = n \ln a$. Une autre propriété importante est que si $a \geq b > 0$, $\ln a \geq \ln b$ (c'est à dire la fonction logarithme est croissante, voir plus loin) et $\ln a = \ln b$ si et seulement $a = b$. La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. Nous pouvons facilement déduire les propriétés de la fonction log à partir de celles de la fonction ln. La fonction log est utilisée par exemple en chimie lors de calcul de pH (Voir exercice ci-dessous). De façon plus générale, le logarithme de base a (où $a > 0$) est définie par $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

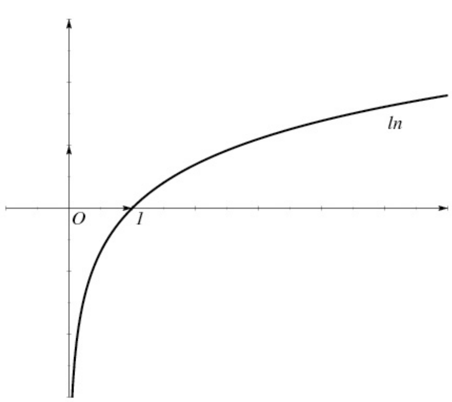


Figure 1. Graphe de la fonction $f(x) = \ln x$.

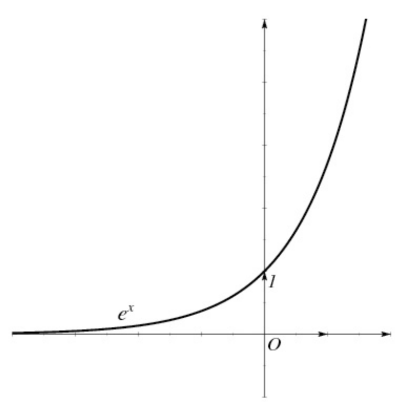


Figure 2. Graphe de la fonction $f(x) = e^x$.

Fonctions exponentielle et puissances.

La fonction exponentielle se note $f(x) = e^x$ et est définie sur $\mathbb{R}$. Elle satisfait de plus $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Voir Figure 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $e^{\ln x} = x$. De plus, les graphes de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. Toutes ces propriétés viennent du fait que ces deux fonctions sont des fonctions réciproques l'une de l'autre. La fonction exponentielle satisfait la propriété fondamentale suivante :

$$\text{Pour tout } a \text{ et tout } b \text{ dans } \mathbb{R},\ e^{a+b} = e^a e^b.$$

Cette propriété se démontre à partir de la propriété fondamentale du logarithme donnée plus haut. Il en résulte que pour tous réels a et b, $e^{-a} = 1/e^a$ et $e^{a-b} = e^a/e^b$. Enfin, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $(e^a)^n = e^{na}$.
Notons aussi que si $a \geq b$, $e^a \geq e^b$ (en d'autres termes, la fonction exponentielle est croisssante, voir plus loin) et il y a égalité si et seulement si $a = b$.

On peut à partir de la fonction exponentielle définir d'autres fonctions classiques.

Fonction exponentielle de base a (où $a > 0$) : Elle est défine par $x \to a^x = e^{x \ln a}$. Voir Figure 3. En particulier, la fonction exponentielle est alors la fonction exponentielle de base e. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que, pour tous réels x et y, pour tous $a > 0$ et $b > 0$, $a^{x+y} = a^x a^y$, $(ab)^x = a^x b^x$.

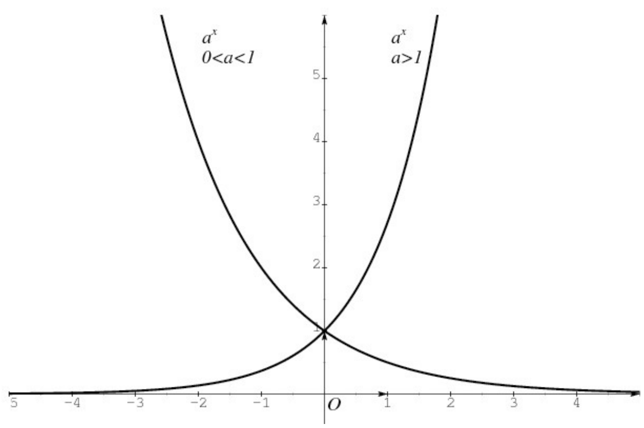


FIGURE 3. Graphe de la fonction $f(x) = a^x$.

Fonctions puissances : $f_\beta(x) = x^\beta$ où β est un réel. Supposons dans un premier temps que $\beta = n$ est un entier. Nous écartons le cas $n = 0$, car dans ce cas, la fonction est constante (et vaut 1).
Cas 1. $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, la fonction $x \to x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est paire (respectivement impaire) si n est un entier pair (respectivement impair).
Cas 2. n est un entier négatif non nul. Alors, la fonction $x \to x^n$ est définie sur

$\mathbb{R}^*$. Elle est paire (respectivement impaire) si n est un entier pair (respectivement impair).

Dans le cas où β est réel mais n'est pas entier, la fonction f_β est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_\beta(x) = e^{\beta \ln x}$. Notons que cette fonction est à valeurs strictement positives.

Les graphes de cette fonction diffèrent suivant les valeurs de β, comme le montre la figure 4. Le cas où $\beta < 0$ se déduit du cas précédent en remarquant que $x^{-\beta} = 1/x^\beta$.

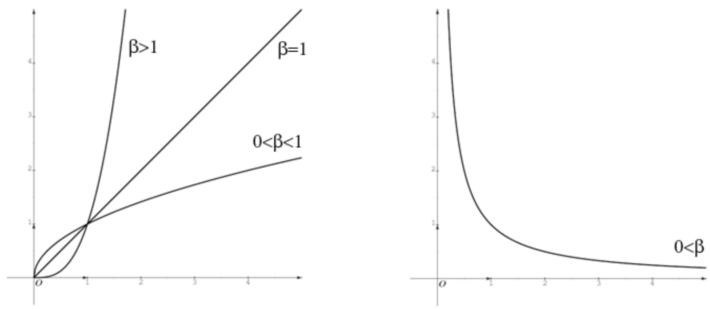


FIGURE 4. Graphe de la fonction $f_\beta(x) = x^\beta$.

Exercice 27. *Simplifier quand c'est possible les expressions suivantes (où a est un nombre strictement positif).*

(1) $a^2 \cdot a^3$;	*(4)* $\log_a(2) + \log_a(3)$;	*(7)* $2^{(3^2)}$;	*(10)* $\log_3(3^5)$;
(2) $a^2 + a^3$;	*(5)* $a^{(a^2)}$;	*(8)* $(2^3)^2$;	*(11)* $\log_2(1024)$;
(3) $\log_a(2) \cdot \log_a(3)$;	*(6)* $(a^a)^2$;	*(9)* $\log_3(5^3)$;	*(12)* $\log_2(\log_2(256))$.

Exercice 28. *Simplifier quand c'est possible les expressions suivantes.*

(1) $e^2 \cdot e^3$;	*(5)* $e^{(e^2)}$;	*(9)* $\ln(5^3)$;
(2) $e^2 + e^3$;	*(6)* $(e^e)^2$;	*(10)* $\ln(5 \times 3) + \ln(5/3)$;
(3) $\ln(2) \cdot \ln(3)$;	*(7)* $2^{(3^2)}$;	*(11)* $\ln(5 + 3)$;
(4) $\ln(2) + \ln(3)$;	*(8)* $(2^3)^2$;	*(12)* $\ln(\ln(5^3))$.

Exercice 29. *Donner le domaine de définition des fonctions suivantes.*

$$f(x) = \ln(3-5x); \quad g(x) = \ln(3x^2+2x-1); \quad h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2x+4}\right); \quad j(x) = \ln(\ln(x)).$$

Exercice 30. *(*) Résoudre les équations et inéquations suivantes (On précisera le domaine de définition) :*

$(a) : \ln(x-1) = \ln(3x-5)$ $\qquad$ $(b) : 2\ln(x) = \ln(x+4) + \ln(2x)$

$(c) : 3\ln(x) = \ln(x+2) + \ln(x^2-3)$ $\qquad$ $(d) : \ln(x-2) < 3$

$(e) : \ln(3-x) + 1 > 0$ $\qquad$ $(f) : \ln(3x^2-x) \leq \ln(x) + \ln(2)$

Exercice 31. *(*) Résoudre les équations et inéquations suivantes :*

$(a) : e^{3x} = 1$ $\quad (b) : e^{2x} - 4e^{x} + 3 = 0$ $\quad (c) : e^{x} + e^{-x} = 2$

$(d) : e^{2x} > 3$ $\quad (e) : e^{1+\ln x} < 2$ $\quad (f) : e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^{x} > 0$

Exercice 32 (Deux sujets de bac en terminales A1-B, 1990)**.** *1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois équations suivantes :*

$$t^3 - 4t = 0 \text{ où l'inconnue est } t \in \mathbb{R};$$
$$(\ln x)^3 - 4\ln x = 0 \text{ où l'inconnue est } x \in \mathbb{R};$$
$$e^{3x} = 4e^{x} \text{ où l'inconnue est } x \in \mathbb{R};$$

2a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 5x - 3 = 0$.
2b) En déduire les solutions des équations suivantes :

$$2(\ln(2x))^2 - 5\ln(2x) - 3 + 0$$
$$2e^{6x} - 5e^{3x} - 3 = 0.$$

Exercice 33. *On évalue l'acidité (ou la basicité) d'une solution en mesurant son pH (potentiel d'hydrogène), donc en évaluant sa concentration en ions H_3O^+ ; le pH d'une solution est en effet défini par : $pH = -\log[H_3O^+]$ (où $[H_3O^+]$ est le nombre d'ions H_3O^+ par litre de solutions.). On admet qu'à 25 degrés : $[H_3O^+][OH^-] = 10^{-14}$ (produit ionique de l'eau). Dans la suite, on suppose que les mesures sont faites à cette température.*

(1) Une solution de soude contient 10^{-2} moles d'ions OH^- par litre. Quel est son pH ?

(2) Dans l'eau pure, on trouve le même nombre de moles d'ions OH^- que d'ions H_3O^+ par litre. Quel est son pH ?

(3) Une solution est acide si elle contient plus de moles d'ions H_3O^+ que d'ions OH^-, et basique dans le cas contraire. Indiquer les inégalités que vérifient le pH d'une solution acide et le pH d'une solution basique.

Les deux prochains exercices montrent comment les fonctions exponentelles et logarithmes interviennent naturellement dans l'étude d'évolution de populations en biologie.

Exercice 34. *On admet que la population mondiale augmente de deux pour cent par an. En combien d'années double-t-elle ? Est-elle multipliée par 5 ? par 10 ?*

Exercice 35. *Le nombre de bactéries contenues dans un bouillon de culture est multiplié par 1,7 toutes les heures. Au bout de combien d'heures, la population de bactéries aura-t-elle été multipliée par 17 ?*

Exercice 36. *(**) Résoudre les systèmes suivants en* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$(A) : \begin{cases} x + y = 55 \\ \ln x + \ln y = \ln 700 \end{cases} \qquad (B) : \begin{cases} \ln(xy) = 4 \\ \ln x \cdot \ln y = -12 \end{cases}$$

$$(C) : \begin{cases} \ln(x-2) + 3\ln(y-1) = 9 \\ 2\ln(x-2) - \ln(y-1) = 4 \end{cases} \qquad (D) : \begin{cases} e^x . e^{2y-1} = 1 \\ e^{x+2} . e^y = e \end{cases}$$

Exemples d’applications des mathématiques à la biologie (proposés par Annie Ray-Viallet, biologiste)

1) Fractions, puissances entières er pourcentages (et proportions)

Exemple 1

L’hémoglobine est la protéine rouge présente en forte concentration dans les globules rouges (en particulier chez l’Homme) qui transporte le dioxygène (noté O_2) dans le sang.
Sachant que la masse molaire de l’hémoglobine est de 64.10^3 $g.mol^{-1}$ et que la concentration sanguine en hémoglobine est de 150 $g.L^{-1}$, *calculer le volume maximal de O_2 que peut transporter l’hémoglobine dans un litre de sang.*

A quelle masse de dioxygène correspond ce volume maximal?

Données:

- ➔ Une molécule d’hémoglobine transporte au maximum 4 molécules de dioxygène
- ➔ le volume molaire d’un gaz parfait (en l’occurence le dioxygène) est le volume occupé par une mole du gaz parfait dans les **C**onditions **N**ormales de **T**empérature et de **P**ression (CNTP), il est de 22,4 L (=0,02241 m^3)
- ➔ rappel : masse molaire du dioxygène=32 $g.mol^{-1}$

Exemple 2

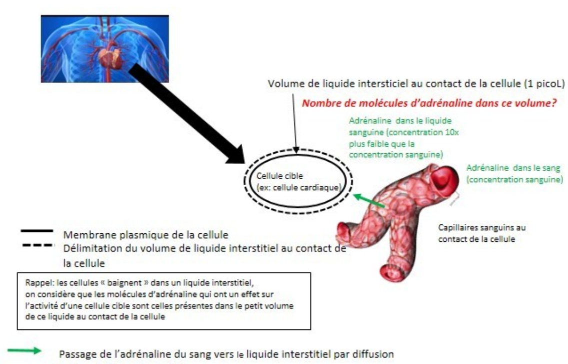
Lors d’un stress, il y a une variation de forte amplitude et de courte durée de la concentration sanguine en une hormone, l’adrénaline. Cette forte variation est appelée décharge d’adrénaline. Lors de cette décharge, la concentration dans le sang en adrénaline passe de 0,1 $\mu g.L^{-1}$ à 2 $\mu g.L^{-1}$.

Sachant que la masse molaire de l’adrénaline est de 183$g.mol^{-1}$, ***calculer le nombre de molécules d’adrénaline présentes dans le volume de liquide interstitiel environnant la cellule cible* avant et après la décharge d’adrénaline.***

*cellule présentant des récepteurs à l’adrénaline et dont l’activité est modifiée en présence d’adrénaline (par exemple, les cellules cardiaques : le cœur bat avec une fréquence augmentée et plus de force en présence d’adrénaline)

Données :

- ➔ on estime que la volume environnant la cellule cible est de 1 picoL (soit 10^{-12} Litres)
- ➔ on considérera que la concentration en adrénaline du milieu environnant la cellule est 10 fois moindre que la concentration sanguine



Schématisation du problème

2 Généralités sur les fonctions et fonctions usuelles

Exemple d'utilisation de la fonction log : le décibel (dB)

L'intensité sonore peut être exprimée en Pascal (Pa), unité de pression : l'intensité correspond alors à **la pression acoustique (force exercée par l'onde par unité de surface du milieu)**.
L'intensité sonore est le plus souvent exprimée en watts.m^{-2}, unité de puissance par unité de surface du milieu : l'intensité correspond alors à **la puissance sonore (ou acoustique)** par unité de surface. Cette puissance acoustique est **l'énergie acoustique** transmise par unité de temps.
Vous noterez que **l'intensité sonore n'est pas une grandeur physique** et **peut être exprimée par 2 grandeurs physiques différentes** : la pression acoustique ou la puissance acoustique, à ne pas confondre.
Les 2 sont évidemment liées : plus l'énergie libérée par la vibration sonore est forte, plus la pression acoustique par unité de surface du milieu est forte.

L'échelle des puissances acoustiques par unité de surface auxquelles le système auditif humain est sensible est :

10^{-12} watts.m^{-2} à 1 watt.m^{-2}

La valeur minimale est le seuil d'audibilité pour une fréquence de 1000 Hz et la valeur maximale est le seuil de perception douloureuse et sera responsable de traumatismes auditifs.
Il y a un facteur 10^{12} entre ces 2 valeurs extrêmes. L'utilisation de échelle n'étant pas aisée, on utilise classiquement l'échelle de niveau d'intensité sonore (**noté L**) **dont l'unité est le décibel (dB)**

$$L(\text{en dB})=10 \log I/I_o$$

avec I : intensité du son (exprimé en watts.m^{-2}) I_o : seuil d'audibilité (**10^{-12} watts.m^{-2}**)

L'unité décibel a-t-elle une dimension ? (exemple de dimension : Pascal pour la dimension de la pression, gramme pour la dimension de masse,…)
Vérifier que, si $I= I_o$, alors le niveau sonore L est de 0 dB.
Pour un niveau sonore de 20 dB, combien de fois l'intensité sonore est plus élevée que le seuil d'audibilité ?
*Si le niveau d'intensité sonore passe de 80 dB à 100 dB, par quel facteur l'intensité sonore (*watts.m^{-2}) est-elle multipliée ?

Dérivation des fonctions

Fonctions dérivées, dérivées successives

Soient I un intervalle (ouvert) de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. On note alors $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé de f en x_0. On appelle la quantité $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ le taux de variation de la fonction f en x_0.

On dit que f est dérivable sur I si pour tout $x \in I$, f est dérivable en x. Dans ce cas, nous pouvons définir une nouvelle fonction, que l'on appelle fonction dérivée ou tout simplement dérivée de f et que l'on note f', par

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f'(x) \end{array}$$

où $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x.

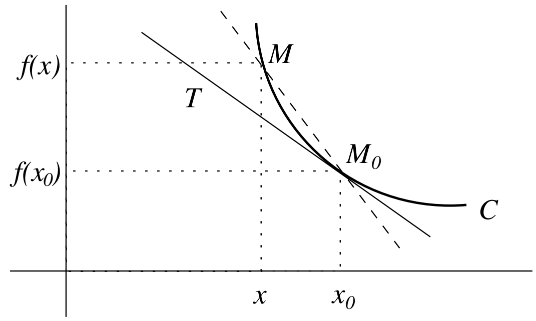
Exemple. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Alors, le taux de variation de f en x_0 s'écrit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}.$$

La dernière égalité a été obtenue en multipliant "le haut et le bas" par la quantité conjuguée du numérateur, à savoir $\sqrt{x}+\sqrt{x_0}$. Nous en déduisons aisément, en passant à la limite, que si $x_0 \neq 0$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Donnons maintenant une interprétation graphique de la dérivabilité. Supposons que f soit dérivable en x_0. Soit $\mathcal{C}$ le graphe de f (dans un repère orthonormé du plan). Notons M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et pour $x \in I$, $x \neq x_0$, M le point de coordonnées $(x, f(x))$. Notons que M et M_0 sont des points de $\mathcal{C}$. Le taux de variation $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ représente le coefficient directeur de la droite MM_0 (c'est à dire la droite passant par M et M_0). Puisque f est dérivable en x_0, ce coefficient directeur tend, quand x tend vers x_0, vers $f'(x_0)$. Ainsi, de façon intuitive, quand x tend vers x_0, la droite MM_0 a pour position limite la droite T passant par M_0 (qui est le point commun à toutes les droites MM_0) et de coefficient directeur $f'(x_0)$. Cette droite limite T s'appelle la tangente à $\mathcal{C}$ au point M_0. Voir la figure ci-dessous. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que son équation est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



Remarques (A éviter en première lecture) : Regardons maintenant ce qui se passe si le taux de variation n'a pas de limite ou une limite infinie.
Supposons d'abord que $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ n'existe pas mais que $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie (respectivement $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie). On dit alors que f est dérivable à droite en x_0 (respectivement à gauche en x_0) et on note $f'_d(x_0)$ (respectivement $f'_g(x_0)$) cette limite finie. Dans ce cas, le graphe $\mathcal{C}$ de f admet une demi-tangente à droite (respectivement à gauche) au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ d'équation $y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ (respectivement $y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$). Prenons l'exemple de la fonction $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$. Alors, $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$. Le graphe de f admet au point 0 deux demi-tangentes d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$. Il est clair que f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ (et dans ce cas, $f'(x_0)$ est égale à la valeur commune). Supposons maintenant que $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ou $-\infty$. Alors, le graphe de f admet au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ une tangente verticale. C'est par exemple le cas de la fonction $f(x) = \sqrt{|x|}$ en $x_0 = 0$.

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Supposons que la fonction dérivée soit elle-même dérivable sur I. Nous pouvons alors définir $f'' = (f')' : I \to \mathbb{R}$. Cette fonction s'appelle dérivée seconde de f. On la note aussi $f^{(2)}$. De manière plus générale, si f est dérivable n fois sur I, la dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$, est donnée par récurrence par $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Remarque. N'oubliez pas les parenthèses dans $f^{(n)}$. En effet, f^n désigne usuellement la puissance n-ième de f. Par convention, $f^{(0)} = f$.

Exemple 1. Soit $f(x) = e^x$. Alors, f est dérivable autant de fois que l'on veut sur $\mathbb{R}$ (une telle fonction est dite de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$) et nous pouvons montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = e^x$.

Exemple 2. Soit $g(x) = x^3$. Alors, g est dérivable à tout ordre sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 3x^2,\ g^{(2)}(x) = 6x,\ g^{(3)}(x) = 6, \text{ et pour tout } n \geq 4,\ g^{(n)}(x) = 0.$$

Remarque (Liens avec la physique). L'interprétation physique de la dérivée est la vitesse et de la dérivée seconde est l'accélération. Notons aussi qu'en physique la dérivée $f'(x)$ se note parfois $\dfrac{df}{dx}$ ou $\dot{f}$.

Dérivées des fonctions usuelles.

Nous rappelons les formules vues en Terminale.

$f(x)$	$f'(x)$	D_f	$D_{f'}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$

Rappelons que $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, ainsi $f(x) = x^\alpha$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Dans le cas particulier où $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$. Elle est dérivable sur son ensemble de définition et $f'(x) = nx^{n-1}$.

Dérivation et opérations

Nous rappelons sans preuve les règles usuelles de dérivation.

Fonction	Dérivée
$f+g$	$f'+g'$
fg	$f'g+g'f$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$

Exemple. D'après la définition de la fonction tangente et la règle de dérivation du quotient, la dérivée de la fonction $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est donnée par

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

qui par ailleurs peut s'écrire $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

Nous allons maintenant énoncer la règle sur la composition. Nous rappelons que si $x \in D_f$ et si $f(x) \in D_g$, on définit $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Proposition 1. *Si la fonction f est dérivable en x_0 et si la fonction g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$.*

Nous déduisons de la proposition 1 que si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors

Fonction	Dérivée
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln\lvert u(x)\rvert$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\sin u(x)$	$u'(x)\cos u(x)$
$\cos u(x)$	$-u'(x)\sin u(x)$
$u^{\alpha}(x)(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha u'(x)u^{\alpha-1}(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Attention, ici, nous ne précisons pas le domaine de dérivabilité de la fonction.

Exercice 37. *Calculer les dérivées des fonctions données par les expressions suivantes en commençant par $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 6 + 1/x - 3/x^2 + \ln(3x+1) - 6e^{2x} + \sqrt{3x+2} - 7\cos(2x)$ puis*

$$a(x) = \sin(2x+1) \qquad b(x) = e^{5x+1} \qquad c(x) = ln(x)e^x$$
$$d(x) = x\cos(x) \qquad f(x) = \frac{3x+1}{x-2} \qquad g(x) = (2x+1)^3$$
$$h(x) = \sin(x^3) \qquad i(x) = (\sin x)^3 \qquad j(x) = (3x^2+1)^2$$
$$k(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2 \qquad \ell(x) = \tan(2x+3) \qquad m(x) = 3e^{3x^2-1}$$
$$n(x) = \ln(3x^2-1). \qquad o(x) = \sqrt{x^2+2} \qquad p(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$$
$$q(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \qquad r(x) = e^{3\cos x} - 5e^{\sqrt{3x+1}} \qquad s(x) = \ln(1+2\sin x)$$
$$t(x) = \ln(\ln x) \qquad u(x) = x(\ln(x)-1)$$

Exercice 38. *(*) Calculer f' en fonction de g' dans les différents cas suivants (où a, b sont des constantes réelles) :*

$$f(x) = g(ax+b) \qquad f(x) = g(a+g(x))$$
$$f(x) = g(x+g(a)) \qquad f(x) = g(x+g(x))$$

Exercice 39. *Pour tout entier naturel n, déterminer la dérivée n-ième des fonctions données par les expressions suivantes :*

$$f(x) = 4x^3 + x \qquad g(x) = e^{2x} \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

Exercice 40. *(*) Soit la f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

(1) Déterminer le domaine de définition de f.

(2) Déterminer a et b pour que la droite d'équation $y = 4x + 3$ soit tangente à $\mathcal{C}$ au point I de coordonées $(0, 3)$.

Exercice 41. *(**) Etudier la dérivabilité en 0 et, s'il existe, calculer le nombre dérivé en 0 des fonctions définies de la façon suivante :*

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } f(0) = 0 \qquad g(x) = \sqrt{|x|}$$

$$h(x) = |x|^3 \qquad k(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ et } k(0) = 0$$

Dérivation et sens de variation d'une fonction ; Applications à la recherche d'extrema

Soit I un intervalle contenu dans D_f. On dit que f est croissante sur I si pour tout $x \in I$, tout $y \in I$,

$$x \geq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y).$$

On dira que f est strictement croissante si toutes les inégalités sont strictes. On dit que f est décroissante sur I si pour tout $x \in I$, tout $y \in I$,

$$x \geq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Attention, nous n'avons pas besoin (à priori) de la dérivée pour définir la croissance ou la décroissance d'une fonction !

Exemples (Fonctions affines). Soit $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour cela, prenons des réels x et y tels que $x < y$. Puisque $a > 0$, il vient $ax < ay$. D'où, $ax + b < ay + b$, ce qui peut encore s'écrire $f(x) < f(y)$, c'est à dire ce que l'on voulait. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que si $a < 0$, f est strictement décroissante. Dans le cas particulier où $b = 0$, $f(x) = ax$ s'appelle une fonction linéaire. Le graphe d'une fonction affine est la droite d'équation $y = ax + b$. Dans le cas particulier d'une fonction linéaire, cette droite passe par l'origine.

En pratique, il est plus facile d'étudier les variations de la fonction grâce au signe de la dérivée. Le résultat suivant fait le lien avec le signe de la dérivée.

Théorème 2. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors,*

(i) f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

(ii) f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

(iii) f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Il est important de noter que dans le théorème 2, nous nous sommes placés sur un intervalle. Le même résultat est faux en général si I n'est pas un intervalle. Voir le paragraphe sur les fonctions réciproques.

Remarque. Attention ! Dans le résultat précédent, nous parlons de “fonctions croissantes” et non de “fonctions STRICTEMENT croissantes”. En particulier, il est FAUX qu'une fonction est strictement croissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Pour voir cela, prenons la fonction $f(x) = x^3$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, si $x < y$, alors $f(x) = x^3 < y^3 = f(y)$. Pourtant, $f'(0) = 0$. En fait, on a le

Théorème 3. *Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f'(x) > 0$ (respectivement $f'(x) < 0$) pour tout $x \in]a, b[$. Alors, f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur $[a, b]$.*

En particulier, la dérivée peut être nulle en a et b.

Exemples. La dérivée de $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \to e^x$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc, $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La dérivée de $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \to 1/x$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ (qui est le domaine de définition de la fonction logarithme népérien). Donc, $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante (sur son domaine de définition).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum en $x_0 \in I$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$. On dit que f admet un minimum en $x_0 \in I$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(x_0)$. Dans les deux cas, on dit que f admet un extremum en x_0.

Remarque. Si f est dérivable sur I, une condition nécessaire pour que f admette un extremum en x_0 est que $f'(x_0) = 0$. Cette condition n'est pas suffisante comme le montre l'exemple suivant. Soit $f(x) = x^3$. Alors, $f'(0) = 0$ et pourtant f n'a pas d'extremum.

En pratique, les extrema peuvent se déterminer grâce au tableau de variation de f. Par exemple, considérons une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Alors, il est clair que f admet un minimum en 1 qui vaut -1. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq -1$. Cependant, f n'a pas de maximum car $f(x)$ devient infiniment grand quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 42. *En calculant la derivée, étudier les variations des fonctions suivantes.*

$$a : x \mapsto 6x^3 - 9x^2 + 2 \qquad b : x \mapsto \sqrt{2x+1} \qquad c : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$$

$$: x \mapsto \ln(3x+1) \qquad e : x \mapsto \frac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)} \qquad f : x \mapsto 1/\ln(x)$$

$$g : x \mapsto (x+2)e^{-x} \qquad h : x \mapsto e^{3x} - 3x \qquad i : x \mapsto e^{1/x}$$

Exercice 43. *Pour chacune des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes, déterminer si elle admet un minimum et si oui, en quel point (on donnera le domaine de définition de la fonction).*

$$a : x \mapsto x^2 + 3x - 1 \qquad b : x \mapsto \frac{1}{x^2} \qquad c : x \mapsto x^2 - 2\ln(x)$$

Exercice 44. *Soit la fonction définie sur $[10, 100]$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 2}{x}$.*
1a) Calculer $f'(x)$.
1b) Démontrer que $f'(x)$ est positive sur l'intervalle $[10, e^3]$ et négative sur l'intervalle $[e^3, 100]$. En déduire le tableau de variation de f.
2) On se propose d'étudier la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son age. Pour cela, on admet que la capacité pulmonaire $g(x)$ d'un être humain agé de x années ($x \in [10, 100]$) est donnée par $g(x) = 110f(x)$.
2a) Sachant que $g(10) \approx 3,33$, $g(15) \approx 5,19$, $g(30) \approx 5,14$ et $g(60) \approx 3,84$,donner l'allure de la courbe de g.
2b) A quel age la capacité pulmonaire est-elle maximale ? Quelle est cette capacité maximale ?
2c) Comment déterminer graphiquement la période (en années entières) durant laquelle la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à 5 litres.

Exercice 45. *Une substance est injectée par voie intramusculaire. Elle passe du muscle au sang puis est éliminée par les reins. Aprés étude, on constate que la quantité de substance contenue dans le sang à un instant t est donnée approximativement par la fonction s définie pour $t \geq 0$ par*

$$s(t) = q(e^{-0,5t} - e^{-t}),$$

t étant le temps exprimé en heures, q la quantité de substance injectée.
1) Calculer $s'(t)$ et étudier le signe de $s'(t)$ (Indication : mettre en facteur $e^{-0,5t}$). En déduire le tableau de variation de s.
2) On désire contrôler les effets de cette substance (cas d'un médicament). Pour cela, il faut que la quantité de ce médicament contenue dans le sang soit comprise entre deux valeurs, $S_m = 1,2$ le seuil d'efficacité et $S_M = 2,6$ le seuil de toxicité. D'aprés le tableau de variation de s, quelles valeurs peut-on donner à q pour qu'à aucun moment la quantité de substance ne dépasse S_M ?

3) On prend $q = 10$. *Comment déterminer graphiquement l'intervalle de temps durant laquelle le médicament est efficace ?*

Exercice 46. *Un camion toupie appartenant à une entreprise de travaux publics ravitaille en béton un chantier en empruntant toujours le même trajet qui mesure aller-retour 150 km. Le prix d'un litre de gazole est de* $1,3$ *euros. Le chauffeur du camion est payé (toutes charges comprises)* 31 *euros de l'heure. La consommation* c *du véhicule, exprimée en litres de gasoil par heure, est une fonction de la vitesse moyenne* v *du camion donnée par*

$$c(v) = 6 + \frac{v^2}{100},$$

v *étant exprimée en km par heure.*

(1) (a) *Si la vitesse moyenne* v *du camion est de* 50 *km par heure, calculer le coût de revient d'un trajet.*
   (b) *Plus généralement, exprimer en fonction de* v *le coût de revient d'un trajet. Vérifier le résultat du 1a).*

(2) *Etudier les variations de la fonction* f *définie pour* $x \in [40, 100]$ *par*

$$f(x) = 1,95x + \frac{5820}{x}.$$

(3) *Trouver la vitesse moyenne* v *pour que le coût d'u trajet soit minimal. Quel est alors ce coût ?*

Exercice 47. *(*) Parmi tous les rectangles de périmètre* 30 *cm, déterminer celui qui a la plus grande aire.*

Exercice 48 (Partiel, novembre 2014)**.** *Dans un petit champ, on plante des pommiers. On estime que le nombre moyen de pommes produites par pommier et par an décroit en fonction du nombre* n *d'arbres plantés dans le champ suivant la loi* $f(n) = 100\frac{\ln(n^2+1)}{n}$. *Les pommes se vendent à 30 centimes d'euro l'unité, et l'entretien d'un pommier coûte en moyenne* 10 *euros par an. On cherche à déterminer le nombre optimal de pommiers à planter afin de réaliser un profit maximal.*

(1) *Déterminer, en fonction du nombre* n *de pommiers plantés, la somme d'argent obtenue en un an grâce à la vente des pommes. Déterminer le montant annuel de l'entretien du champ de pommiers. En déduire le bénéfice annuel* $B(n)$ *en fonction du nombre de pommiers.*
(2) *Etudier le signe de l'expression* $\frac{-10x^2+60x-10}{1+x^2}$.
(3) *Etudier les variations de la fonction* B.
(4) *En déduire le nombre optimal de pommiers à planter, sachant qu'on veut qu'il y ait au moins un pommier dans le champ (pour avoir un peu d'ombre...). Ce nombre doit bien sûr être un entier.*

On termine par des exercices d'introduction aux équations différentielles. Celles-ci nous seront très utiles pour modéliser des évolutions de population en temps continu dans le cours de mat206. La variable est dans la suite le "temps" noté t et donc les fonctions sont de la forme $f(t)$.

Exercice 49. *1) Soit la fonction* $f(t) = 3e^{2t} - 1$.
1a) Calculer la dérivée $f'(t)$ *de* f *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.
1b) Montrer que pour tout t*, on a*

$$(E)\ f'(t) = 2f(t) + 2.$$

(E) s'appelle une équation différentielle (du premier ordre), c'est à dire une relation entre une fonction et sa dérivée. On l'écrira souvent dans la suite (on note y *la fonction inconnue)*

$$(E)\ y' = 2y + 2.$$

Le résultat précédent dit que f *est solution de (E).*

2) Pour chacune des fonctions suivantes, donner une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ *dont elle est solution.*
$f(t) = e^{-t}$, $g(t) = -3e^{2t}$, $h(t) = 5e^{-3t}$, $i(t) = 2e^t - 3$.

Exercice 50. *On note* $y(t)$ *le nombre d'individus d'une population donnée au temps* t *(en seconde). On suppose que la fonction* y *vérifie l'équation différentielle* $y' = 2y$ *et que la population initiale est de* 1000 *(c'est à dire* $y(0) = 1000$*).*
1) Montrer que $y(t) = 1000e^{2t}$ *est solution du problème. On admet que c'est la seule (cela serà justifié dans le cours de mat206 sur le modèle de Malthus. Voir aussi l'exercice suivant).*
2) La population croit-elle ?
3) Quand la population aura-t-elle doublé ?
4) Quand la population aura-t-elle dépassé les 5000 *individus ?*

Exercice 51. *(*) On fixe une constante* $a \in \mathbb{R}$*. On dit qu'une fonction* f *(dérivable sur* $\mathbb{R}$*) est solution de l'équation différentielle (M)* $y' = ay$ *si pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = af(t)$.
1) Dans le cas $a = 0$*, déterminer les solutions de (M).*
2) Si $a = 1$*, trouver une solution de (M) sous forme d'une exponentielle. Même questions avec* $a = 2$ *puis* $a = -3$.
3) Démontrer que toutes les solutions de (M) sont de la forme $f(t) = Ce^{at}$ *où* C *est une constante (on pourra considérer la fonction* $g(t) = f(t)e^{-at}$*). Comment interprêter* C *?*
4) Comment une solution de (M) varie au cours du temps t *suivant le signe de* a *? Supposons que* $f(t)$ *soit le nombre d'individus d'une population donnée au temps* t*. Le*

modèle de Malthus (proposé en 1798) prédit que l'évolution de certaines populations est régie par l'équation (M). Celà vous parait réaliste ?

6. Primitives usuelles, intégration

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. Une primitive F de f est une fonction dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. Dans le cas où l'intervalle $I = [a, b]$ est fermé, nous demanderons que l'égalité $F'(x) = f(x)$ soit vérifiée pour tout $x \in]a, b[$. Supposons que F et G soient deux primitives d'une même fonction f sur l'intervalle I. Alors, pour tout $x \in I$, $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Donc, la fonction $F - G$ est constante sur I. Ainsi, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ diffèrent d'une constante. Nous en déduisons que si F est une primitive de f sur l'intervalle I, toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Soit $I =]a, b[$ un intervalle (ouvert) et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Alors, f admet une primitive F sur I et $\displaystyle\int_a^b F(t)dt = [F]_a^b = F(b) - F(a)$. En particulier, si $x \in I$, comme $\displaystyle\int_a^x F(t)dt = F(x) - F(a)$, la fonction $x \to \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Si f est de plus positive, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est l'aire de la partie du plan délimitée par les droites $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et le graphe de f.

Si F et G sont des primitives de f et g respectivement sur I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I. De même si F est une primitive de f sur I et si λ est un réel, alors λF est une primitive de λf sur I. Pour le voir, il suffit de dériver $F + G$ et λF.

Chercher des primitives, c'est faire l'opération inverse de calculer des dérivées. Donc, du tableau donnant les dérivées des fonctions usuelles, nous déduisons le tableau des primitives usuelles.

$f(x)$	$F(x)$
e^x	e^x
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$x^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$

Exemple. Soit $f(x) = 3x^2 - 1/x + 2e^x$. Alors une primitive de f est $F(x) = x^3 - \ln|x| + 2e^x$ et toutes les primitives sont de la forme $G(x) = x^3 - \ln|x| + 2e^x + C$ où

$C \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(t)dt &= F(2) - F(1) = G(2) - G(1) = [x^3 - \ln|x| + 2e^x]_1^2 \\ &= (8-1) - (\ln 2 - \ln 1) + 2(e^2 - e^1) = 7 - \ln 2 + 2e^2 - 2e.\end{aligned}$$

En utilisant le tableau précédent et la formule de dérivation d'une fonction composée, on a si u est une fonction (dérivable),

$f(x)$	$F(x)$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'\sin u$	$-\cos u$
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'u^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

Exemple. Soit $f(x) = 2(x+1)^2 - \sin(2x-1) + \dfrac{3}{5x+4}$. Alors, une primitive de f est $F(x) = \dfrac{2}{3}(x+1)^3 + \dfrac{1}{2}\cos(2x+1) + \dfrac{3}{5}\ln|5x+4|$.

Exercice 52. *(1) Les fonctions données par* $f(x) = \dfrac{5x^2 - 7x + 9}{3x - 1}$ *et* $g(x) = \dfrac{5x^2 - 16x + 12}{3x - 1}$ *sont-elles des primitives de la même fonction sur* $I = [1, +\infty[$ *?*

(2) La fonction $F(x) = \dfrac{-x^2 + x - 4}{x^2 + 3x - 1}$ *est-elle une primitive de la fonction* $f(x) = \dfrac{-4x^2 + 10x + 11}{(x^2 + 3x - 1)^2}$ *sur* $I = [1, +\infty[$ *?*

Exercice 53. *Donner une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants.*
1) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ *sur* $I = \mathbb{R}$.
2) $f(x) = 3/x^2$ *sur* $I =]0, +\infty[$.
3) $f(x) = -4/x^3$ *sur* $I =]-\infty, 0[$.
4) $f(x) = 1/\sqrt{x}$ *sur* $I =]0, +\infty[$.
5) $f(x) = (2x+1)^3$ *sur* $I = \mathbb{R}$.
6) $f(x) = x(x^2+1)^2$ *sur* $I = \mathbb{R}$.
7) $f(x) = x - \dfrac{1}{(3x+1)^2}$ *sur* $I =]-1/3, +\infty[$.
8) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3}$ *sur* $I = [0, +\infty[$.
9) $f(x) = 2/\sqrt{1-x}$ *sur* $I =]-\infty, 1]$.
10) $f(x) = 2x/\sqrt{x^2-1}$ *sur* $I =]-\infty, -1[$.

Exercice 54. *Donner une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants.*

1) $f(x) = \sin x \cos x$ *sur* $I = \mathbb{R}$.
2) $f(x) = \tan x$ *sur* $]-\pi/2, \pi/2[$.
3) $f(x) = 1/\cos^2(x)$ *sur* $I = [0, \pi/4]$.
4) $f(x) = 1/(1-x)$ *sur* $I =]-\infty, 1[$.
5) $f(x) = \dfrac{4x+2}{x^2+x+1}$ *sur* $\mathbb{R}$.
6) $f(x) = \ln(x)/x$ *sur* $]0, +\infty[$.
7) $f(x) = e^{3x-5}$ *sur* $I = \mathbb{R}$.
8) $f(x) = 3xe^{x^2-3}$ *sur* $I = \mathbb{R}$.
9) $f(x) = 1/x^2 e^{1/x}$ *sur* $I =]0, +\infty[$.

Exercice 55. *Donner une primitive des fonctions données par les formules suivantes sur un intervalle* I *que l'on précisera.*

(1) $f(x) = x^4 - 5x^3 - x - 1$ *;*

(2) $f(x) = 1/x^2 + 2/\sqrt{3x}$ *;*

(3) $f(x) = (x+1)^3$ *;*

(4) $f(x) = 4x(x^2+3)^2$ *;*

(5) $f(x) = \dfrac{5x^2}{(2x^3+7)^3}$ *;*

(6) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{4x-1}}$ *;*

(7) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2-2}}$ *;*

(8) $f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x + 8)\cos x$ *;*

(9) $f(x) = \sin x \cos^4 x$ *;*

(10) $f(x) = 1/(4x-1)$ *;*

(11) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ *;*

(12) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ *;*

(13) $f(x) = \tan x$ *;*

(14) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ *;*

(15) $f(x) = 3e^{-2x+5}$ *;*

(16) $f(x) = (x^3+1)e^{x^4+4x+1}$.

Exercice 56. *Calculer les intégrales suivantes.*

$$I_1 = \int_2^3 4t^2 dt \qquad I_2 = \int_{-1}^3 (4t^2 - 5t - 1)dt$$

$$I_3 = \int_1^5 \frac{dt}{t^5} \qquad I_4 = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$$

$$I_5 = \int_0^1 te^{2t^2} dt \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{2}{3t+1} dt$$

$$I_7 = \int_0^{\pi/2} 3 \sin t (\cos t)^2 dt$$

Exercice 57. *(1) Calculer l'aire de la partie du plan D déterminée par $0 \le x \le 3$ et $0 \le y \le f(x)$ où $f(x) = x^2 + 1$.*

(2) Calculer l'aire de la partie du plan D déterminée par $-5 \le x \le -1$ et $0 \le y \le f(x)$ où $f(x) = 1/x^2$.

Exercice 58. *(*) Calculer les intégrales suivantes.*

(1) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{1-t^2}\, dt$ *(mettre la fraction sous la forme* $\dfrac{A}{t+1} + \dfrac{B}{t-1}$*).*

(2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t}{t^2+3t+2}\, dt$ *(mettre la fraction sous la forme* $\dfrac{A}{t+1} + \dfrac{B}{t+2}$*).*

(3) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^3+1}{4t^2-9}\, dt$ *(mettre la fraction sous la forme*
$P(t) + \dfrac{A}{2t-3} + \dfrac{B}{2t+3}$ *où P est un polynôme).*

(4) $\displaystyle\int_4^{5} \frac{2t^2-t+5}{(t-2)(t+1)^2}\, dt.$ *(mettre la fraction sous la forme* $\dfrac{A}{t-2} + \dfrac{B}{t+1} + \dfrac{C}{(t+1)^2}$*)*

Exercice 59. *(*) Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, on définit sa moyenne sur $[a, b]$ par*

$$M(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

1) Un mobile se déplace sur un axe. Sa vitesse au temps t est donnée par $v(t) = 3\cos(t)$. Calculer la valeur moyenne de $|v|$ (vitesse absolue) sur une période.

2) Un point M de masse m se déplace sur un axe avec une vitesse $v(t) = \cos(3t)$. Calculer la valeur moyenne de l'énergie cinétique $E = \dfrac{1}{2}mv^2$ pendant une période. Rappel : Si $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

7. Suites

Une suite numérique est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$, voir la remarque ci-dessous) à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $u_n = u(n)$ l'image de n par u. La suite est alors notée (u_n) dont le terme général est u_n (attention, ne pas confondre les deux notations).

Remarque. Une suite peut être définie seulement à partir d'un certain rang (et non pour tout $n \in \mathbb{N}$). Ainsi, si on pose $u_n = \dfrac{n^2+1}{n-1}$, la suite (u_n) est définie pour $n \geq 2$. Dans ce paragraphe, pour simplifier, nous écrirons par exemple "pour tout n" ou "$\forall n$" sans préciser le domaine de définition de la suite.

Exemples.
1) Soit $u_n = \ln(n-2)$. Alors, la suite (u_n) est définie pour tout $n \geq 3$.
2) Soit $u_n = e^{n^2-3n+9}$. Alors, la suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Soit $u_n = 1/n$. Alors, la suite (u_n) est définie pour $n \geq 1$. Notons que pour tout n, $0 < u_n \leq 1$. Que signifie cette propriété pour la suite (u_n) ?

Il y a deux façons de définir une suite qui sont

- de façon explicite : le terme général de la suite (u_n) est de la forme $u_n = f(n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ (ou une partie de $\mathbb{R}^+$). Par exemple, posons $u_n = \ln(n-1)$. Alors, si on pose $f(x) = \ln(x-1)$, on a $u_n = f(n)$. Notons que le domaine de définition de f est $D_f =]1, +\infty[$. Donc, la suite (u_n) est définie pour tout $n \geq 2$. Dans ce cas, pour représenter graphiquement la termes de la suite (u_n), il suffit de représenter les points d'abscisse n et d'ordonnée $u_n = f(n)$. Il est inutile de joindre les points obtenus. Cela revient à ne tracer que les points d'abscisses entières du graphe de f. Voir la figure ci-dessous dans le cas $f(x) = x^2$.

- par récurrence : la suite (u_n) est déterminée par une relation entre les termes géné-raux u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, ... Dans ce cas, il faut préciser les premiers termes u_0, u_1, u_2, ... sinon la suite n'est pas bien déterminée.

Exemple fondamental 1 (récurrence simple). La suite (u_n) est définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction. On doit alors préciser la valeur de u_0. Par exemple, on peut considérer la suite (u_n) définie par $u_0 = -1,5$ et pour tout n, $u_{n+1} = 2\sqrt{4 + u_n}$. Donc, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 2\sqrt{4+x}$. Dans ce cas, on peut représenter graphiquement la suite (u_n) en traçant sur un même

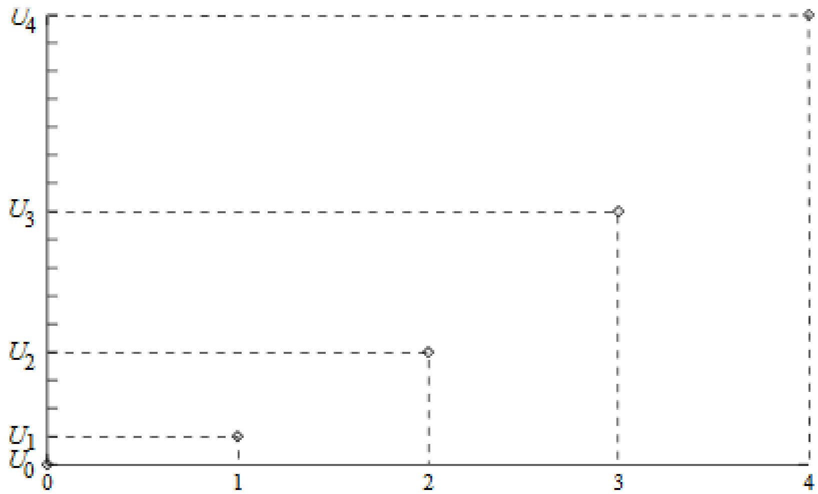


FIGURE 5. Représentation graphique de la suite $u_n = n^2$ (Echelle pour les abscisses : $0,3cm = 1$)

dessin le graphe de f et la droite d'équation $y = x$ comme sur le dessin ci-dessous. On part ensuite de u_0 en abscisse. L'ordonnée du point du graphe correspondant à cette abscisse est u_1 (flèche (1) sur le dessin). Pour déterminer $u_2 = f(u_1)$, il faut rabattre u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation $y = x$ (flèche (2) sur le dessin). Alors, u_2 est l'ordonnée du point sur le graphe d'abscisse u_1 (flèche (3) sur le dessin). Puis, on peut itérer pour obtenir u_3, u_4, ...

Exemple fondamental 2 (récurrence double). La suite (u_n) est définie par les deux premiers termes u_0 et u_1 puis par une relation entre les termes généraux u_{n+2}, u_{n+1}, et u_n de la forme $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ (voir le dernier paragraphe pour une définition précise). Un exemple célèbre est la suite de Fibonacci qui est définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Dans ce cas, la fonction f est donnée par $f(x, y) = x + y$. Cette suite a été introduite par Fibonacci dans son livre *Liber Abaci* publié en 1202 afin de modéliser l'évolution d'une population de lapins dont la croissance est donnée par les régles suivantes :
"Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?
Pouvez-vous expliquer pourquoi la suite de Fibonacci permet d'estimer l'évolution du nombre de lapins au cours des mois ? Ce modèle est-il réaliste ? Nous verrons dans l'UE mat206 divers modèles qui proposent l'étude d'évolution de populations à l'aide de suites.

Donnons maintenant quelques notions élémentaires autour des suites. Une suite (u_n) est croissante si pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$. Une suite (u_n) est décroissante si pour

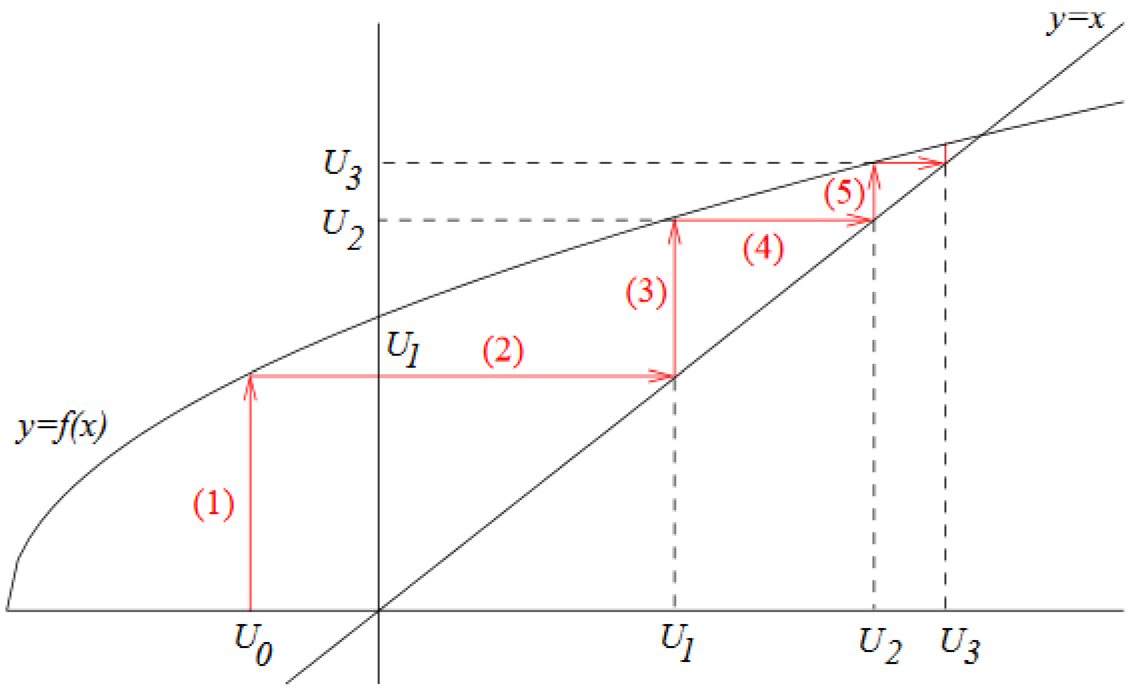


FIGURE 6. Représentation graphique de la suite $u_{n+1} = 2\sqrt{4+u_n}$ avec $u_0 = -1,5$

tout n, $u_{n+1} \leq u_n$. Une suite (u_n) est constante (ou stationnaire) si pour tout n, $u_{n+1} = u_n$.

Exemples.
1) Soit $u_n = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $u_n = f(n)$ où $f(x) = 1/x$. Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, il s'en suit que la suite (u_n) est décroissante.
2) Soit la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout n, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Alors, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$. Donc, la suite (u_n) est croissante.
3) Soit $u_n = \cos(2\pi n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout n, $u_n = 1$. Donc, la suite (u_n) est constante.
4) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Alors, pour tout n, $u_n = 1$ (à démontrer par récurrence !) et donc la suite (u_n) est constante. Notons que $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 2x - 1$ et que $f(1) = 1$ (on dit que 1 est point fixe de f). Donc, la valeur 1 est importante (comparer avec la suite obtenue quand on prend $u_0 = 2$). On reviendra sur ce point dans l'UE mat206.

Une suite (u_n) est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout n, $u_n \leq M$. Une suite (u_n) est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout n, $u_n \geq m$. Une suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples.
1) Soit $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout n, $u_n \leq 1$ puisque $n-1 \leq n+1$. Donc, (u_n) est majorée. Est-elle bornée ? On pourra étudier la fonction $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n^2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, donc (u_n) est minorée. Est-elle bornée ? On pourra s'aider de la représentation graphique de la suite.
3) Soit $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, (u_n) est minorée par -1 et majorée par 1, donc est bornée.

Remarque. Un résultat fondamental que nous n'utiliserons pas est que toute suite croissante, majorée (respectivement décroisante, minorée) converge.

L'étude des suites définies par récurrence est plus délicate que celles données sous forme explicite, dans la mesure où elle nécessite des raisonnements par récurrence. Cependant, il n'est pas facile en général de passer d'une définition par récurrence à une définition explicite. Nous présentons des exemples classiques de suites pour lesquelles cela est possible. Nous rencontrerons souvent ces suites dans l'UE mat206.

Exemple 1 (suites arithmétiques). Une suite arithmétique est une suite qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$ où $r \in \mathbb{R}$ est fixé et s'appelle la raison de la suite arithmétique (u_n). En pratique, pour montrer qu'une suite est arithmétique, on montre que $u_{n+1} - u_n$ est constant, c'est à dire indépendant de n. Une suite arithmétique (u_n) est déterminée de façon unique par son premier terme u_0 et sa raison r. En effet, on peut montrer alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + rn$. Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante. Si $r > 0$, la suite (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Si $r < 0$, la suite (u_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. Si on pose $S_n = u_0 + ... + u_n$ (somme des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0), alors

$$S_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ceci vient de l'égalité

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 2 (suites géométriques). Une suite géométrique est une suite qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = qu_n$ où $q \in \mathbb{R}$ est fixé et s'appelle la raison de la suite géométrique (u_n). En pratique, pour montrer qu'une suite est géométrique, on montre que u_{n+1}/u_n est constant, c'est à dire indépendant de n (à condition que $u_n \neq 0$). Une suite géométrique (u_n) est déterminée de façon unique par son premier terme u_0 et sa raison q. En effet, on peut montrer alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$. Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante. Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Si

$q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -/+\infty$ (suivant le signe de u_0). Si $q \leq -1$, la suite (u_n) n'a pas de limite. Notons enfin que si $q \neq 1$, on a (somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0),

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 + u_0 q + ... + u_0 q^n = u_0(1 + q + ... + q^n) = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Si $q = 1$, il est facile de voir que $S_n = (n+1)u_0$.

Exemple 3 (suites arithmético-géométriques). Une suite arithmético-géométrique est donnée par son premier terme u_0 et par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (où q et r sont fixés). Faisons deux remarques qui vont expliquer la terminologie. Si $r = 0$, la suite (u_n) est géométrique de raison q. Si $q = 1$, la suite (u_n) est arithmétique de raison r. Via un "changement de suite", on peut étudier une suite arithmético-géométrique à l'aide d'une suite géométrique auxiliaire. Donnons un exemple. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 8$. Alors, $v_0 = -6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = \frac{1}{2}u_n + 4 - 8 = \frac{1}{2}u_n - 4 = \frac{1}{2}(u_n - 8) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc, (v_n) est une suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme $v_0 = -6$. Il s'en suit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -6(1/2)^n$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 8 = -6(1/2)^n + 8$. On a donc trouvé une formule explicite pour u_n. Il s'en suit (avec un peu de calcul) que (u_n) est une suite croissante qui tend vers 8.

Exercice 60. *Déterminer si les suites suivantes sont croissantes, décroissantes, ou ni croissantes, ni décroissantes ?*
$u_n = \dfrac{3}{2^{n-1}}$, $v_n = 5.4^n$, $w_n = -2 + 5n$, $t_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $z_n = \dfrac{n^2}{n-3}$.

Exercice 61. *Déterminer si les suites suivantes sont majorées, minorées, bornées ?*
$u_n = 1 + \dfrac{2}{3^n}$, $v_n = 3 + 4n$, $w_n = -3.4^n$, $t_n = \dfrac{3n+1}{n-1}$.

Exercice 62. *1) Soit la fonction définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.*
1a) Déterminer les points fixes de f, c'est à dire les solutions de $f(x) = x$.
1b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > x$.
1c) Utiliser les questions précédentes pour tracer le graphe de f et celui de la droite d'équation $y = x$ sur un même dessin.

2) Soit la suite (u_n) définie par u_0 fixé dans $[0, +\infty[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^2$. Déterminer graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) dans les cas suivants : $u_0 = 0$; $0 < u_0 < 1$; $u_0 = 1$; $u_0 > 1$.
Dans chacun des cas, faire des conjectures sur les variations, la majoration/minoration et la convergence de la suite (u_n).

Exercice 63. *(*)*

1) Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x^2+1)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.
1a) Déterminer les points fixes de f, *c'est à dire les solutions de* $f(x) = x$.
1b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $f(x) \geq x$.
1c) Utiliser les questions précédentes pour tracer le graphe de f *et celui de la droite d'équation* $y = x$ *sur un même dessin.*

2) Soit la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 2$ *et la relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$.
2a) Déterminer graphiquement les premiers termes de la suite (u_n). *Que peut-on conjecturer sur le comportement (variation, majoration/minoration, convergence) de la suite* (u_n) *?*
2b) Montrer (par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
2c) Montrer que (u_n) *est croissante (on pourra utiliser la question 1a).*

3) Soit la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 1/2$ *et la relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$.
2a) Déterminer graphiquement les premiers termes de la suite (u_n). *Que peut-on conjecturer sur le comportement (variation, majoration/minoration, convergence) de la suite* (u_n) *?*
2b) Montrer (par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.
2c) Montrer que (u_n) *est croissante (on pourra utiliser la question 1a).*
2d) Que peut-on conclure des questions 2b et 2c ?

Exercice 64. *Les suites suivantes sont-elles arithmétiques, géométriques, ni l'un ni l'autres ?*
$u_n = 3 + 5n$, $v_n = \dfrac{-1}{n^2}$, $w_n = 2.5^n$, $t_n = -3n + 2$.

Exercice 65. *Dans chacun des cas ci-dessous, la suite* (u_n) *est une suite arithmétique de raison* r.
1) Calculer u_{10}, u_{20}, u_{30} *si* $u_0 = 2$ *et* $r = -3$.
2) Calculer u_1, u_{25}, u_{100} *si* $u_5 = 7$ *et* $r = 2$.

Exercice 66. *(*)*
1) Une suite arithmétique (u_n) *est telle que* $u_2 + u_3 + u_4 = 15$ *et* $u_6 = 20$. *Calculer le premier terme* u_0 *et la raison* r *de* (u_n).
2) Démontrer que les nombres -5, 8 *et* 21 *sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calculer le* 20*-ième terme de cette suite si le premier est* -5.

Exercice 67. *Dans chacun des cas ci-dessous, la suite* (u_n) *est une suite géométrique de raison* q.
1) Calculer u_4, u_8, u_{14} *si* $u_0 = 16$ *et* $q = 1/2$.
2) Calculer u_4, u_8, u_{12} *si* $u_1 = 3$ *et* $q = -2$.

Exercice 68. *(*)*
Trois nombres x, y et z sont les trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Leur produit est $8/27$ et leur somme $26/9$. Déterminer ces trois nombres.

Exercice 69. *Déterminer les limites (si elles existent) des suites dont le terme général est le suivant :*
$u_n = 3n - 5$, $v_n = 3n + \dfrac{1}{(-3)^n}$, $y_n = 4 + 2(-1)^n$, $w_n = 2 - 3^n$, $t_n = \dfrac{3n+1}{n-1}$, $z_n = 3n^2 - 5n + 2$.

Exercice 70. *Calculer les sommes suivantes*

$$1 + 3 + 5 + ... + 99$$

$$1 + 3 + 9 + ... + 3^{10}$$

Exercice 71. *Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.*
1) Déterminer u_n en fonction de n. En déduire que la suite (v_n) est bien définie.
2) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précidera le premier terme et la raison. Exprimer v_n en fonction de n.
3) Calculer en fonction de n la somme $S_n = v_0 + ... + v_n$ puis le produit $P_n = u_0 \times ... \times u_n$.

Exercice 72. *(Suite arithmético-géométrique 1)*
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
1) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2) Déterminer graphiquement les premiers termes de la suite (u_n).
3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
4) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
5) Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 73. *(Suite arithmético-géométrique 2)*
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 5$. On pose $v_n = u_n - 10$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1) Montrer que (v_n) est géométrique. En déduire v_n puis u_n en fonction de n.
2) Etudier la convergence de (u_n).
3) On pose $S = v_0 + ... + v_{10}$ puis $S' = u_0 + ... + u_{10}$. Calculer S et S'.

On termine par quelques exercices de modélisation sur lesquels nous reviendrons dans le cours de mat206. On s'inspirera de l'énoncé du premier exercice pour résoudre les trois suivants. Notons que le dernier exercice utilise les suites arithmético-géométriques. Voir aussi dans le même esprit les exercices 34 et 35.

Exercice 74 (d'après l'examen de mat206 de mai 2017). *On étudie une population qui double tous les ans. La population au début de l'année 2000 est de 100 individus. On note* u_n *le nombre d'individus au début de l'année* $2000 + n$.
1) Exprimer u_{n+1} *en fonction de* u_n.
2) En déduire l'expression de u_n *en fonction de* n.
3) Au bout de combien d'années la population aura-t-elle été multipliée par 32 *?*
4) Au bout de combien d'années la population aura-t-elle dépassé les 1000 *individus ?*

Exercice 75. *(*) Au cours d'une bourse aux livres, un manuel scolaire perd chaque année* 12 *pour cent de sa valeur. Un livre a été acheté neuf 15 euros en 2005. Quel est son prix à la bourse aux livres de 2010 ? de 2015 ? Quand aura-t-il perdu la moitié de sa valeur initiale ?*

Exercice 76. *(*) Une voiture achetée* 10000 *euros en* 2000 *perd chaque année* 20 *pour cent de sa valeur. Quel doit être son prix de vente en* 2011 *?*

Exercice 77. *(*) Deux villes X et Y ont au 1er janvier 1988 des populations respectives de* 100000 *et* 50000 *habitants. La population de X s'accroît de* 1 *pour cent tous les ans tandis que celle de Y augmente de* 5 *pour cent tous les ans. Déterminer à partir de quelle année l'effectif de la population de Y dépasera celui de la population de X ?*

Exercice 78 (d'aprés Bac ES de 2016). *Le 1er septembre 2015, un ensemble scolaire compte* 3000 *élèves. Une étude statistique interne a montré que chaque 1er septembre :*
- 10 *pour cent de l'effectif quitte l'établissement ;*
- *250 nouveaux élèves s'inscrivent.*

On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) *où, pour tout entier naturel* n, u_n *représente le nombre d'élèves le 1er septembre de l'année* $2015 + n$.
1) Justifier que l'on peut modéliser la situation avec la suite (u_n) *telle que* $u_0 = 3000$ *et pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.
2) Pour tout entier naturel n*, on pose* $v_n = u_n - 2500$.
2a) Démontrer que (v_n) *est une suite géométrique de raison* $0,9$. *Préciser* v_0.
2b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n *en fonction de* n. *En déduire que pour tout entier naturel* n, $u_n = 500.(0,9)^n + 2500$.
3) En déduire le sens de variation de (u_n). *Comment va évoluer l'effectif de l'établissement dans le futur ?*

8. Vecteurs et matrices

Matrices

Définition 1. *Soient* $n, m \in \mathbb{N}^*$ *deux nombres entiers strictements positifs. Une matrice A (à coefficients réels) est la donnée pour tout couple d'entiers* (i, j) *tel que*

$1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ d'un nombre réel $a_{i,j}$. L'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes est noté $M_{n,m}(\mathbb{R})$.

Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. On représente A comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Le terme $a_{2,1}$ est mis sur la case située sur la deuxième ligne et la première colonne.

Une matrice est donc un tableau de nombres réels ayant n lignes et m colonnes. Un vecteur à n composantes est une matrice à n lignes et une seule colonne. Un autre cas particulier mérite une terminologie spéciale.

Définition 2. *L'ensemble $M_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté $M_n(\mathbb{R})$. Ses éléments sont appelés matrices carrées $n \times n$.*

Une matrice carrée a donc autant de lignes que de colonnes.
Les cases i, j d'une matrice telles que $i = j$ sont appellées la diagonale de la matrice. Les éléments placés sur la diagonale sont dits éléments diagonaux. Ce sont les $a_{i,i}$.

En plus de la matrice nulle, la matrice carrée $n \times n$, la matrice I_n définie comme suit :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

joue un rôle particulier. Elle n'a que des 1 sur la diagonale et que des zéros hors de la diagonale.

Enfin si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A la somme de ses éléments diagonaux et on note :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = a_{1,1} + ... + a_{n,n}.$$

Exemples concrets de matrices : Certains ensembles de données numériques se représentent plus naturellement sous la forme de matrice que sous la forme de vecteurs. Supposez en effet un commerçant vendant des aspirateurs de 15 modèles différents. A un instant donné, il pourra représenter son stock d'aspirateurs comme un vecteur à 15 composantes, la i-ème composante étant le nombre d'aspirateurs du modèle i présents en stock. Maintenant, le commerçant ne saurait se satisfaire d'une vision statique de son stock et préférera représenter son évolution sur un mois de 30 jours comme une matrice à 15 lignes et 30 colonnes, la j-ème colonne étant le vecteur colonne correspondant au stock le j-ème jour du mois. Organiser les données sous la forme d'une matrice lui permettra de suivre plus facilement l'évolution des stocks (et donc de savoir quels sont les modèles qui ont le plus de succés) que s'il avait structuré sa donnée sous la forme d'un vecteur à 450 composantes.

Les commerçants étant parmi les utilisateurs les plus assidus des programmes informatiques de type tableur, l'exemple suivant de matrices dans la vie professionnelle actuelle ne devrait pas surpendre. La donnée numérique contenue dans une feuille de calcul d'un tableur comme Microsoft Excel est en effet une matrice. Si on ne considère que ses fonctions mathématiques et non ses fonctions de mise en forme, un tableur apparaît comme un programme informatique qui effectue des calculs sur des données qui sont des matrices. Les fonctions mathématiques d'un tableur étant le plus souvent de nature statistique, on ne s'étonnera pas que le calcul matriciel soit un outil important pour les statistiques.

Opérations vectorielles sur les matrices

On peut additionner les matrices à n lignes et m colonnes case par case par la régle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & \dots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,m}+b_{1,m} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & \dots & a_{2,m}+b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \dots & a_{n,m}+b_{n,m} \end{pmatrix}.$$

On peut multiplier une matrice par un nombre réel λ par la régle :

$$\lambda. \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,m} \\ \lambda a_{2,1} & \dots & \lambda a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \dots & \lambda a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

La matrice nulle, notée 0, est celle dont tous les coefficients sont nuls et joue un rôle particulier.

Il y a une autre opération importante, la transposition, qui transforme la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j, \leq m}$ à n lignes et m en la matrice ${}^tA = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j, \leq n}$, la transposée de A, qui a m lignes et n colonnes et dont le coefficient $b_{i,j}$ vaut par définition $a_{j,i}$. Ainsi,

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

La terminologie suivante est usuelle :

Définition 3. *Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si et seulement si ${}^tA = A$. A est dite antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.*

Théorème 4. *Ces opérations vérifient les régles arithmétiques :*

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= A+(B+C)\\
A+B &= B+A\\
A+0 &= A\\
\lambda.(A+B) &= \lambda.A+\lambda.B\\
(\lambda+\lambda').A &= \lambda.A+\lambda.'A\\
(\lambda\lambda').A &= \lambda.(\lambda'.A)\\
0.A &= 0\\
1.A &= A\\
{}^t(A+B) &= {}^tA+^tB\\
{}^t(\lambda.A) &= \lambda.{}^tA\\
{}^t({}^tA) &= A
\end{aligned}$$

pour $A, B, C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$.

Multiplication à gauche d'un vecteur par une matrice

Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Notez que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de $\mathbf{x}$. On définit le vecteur $A.\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ par la formule :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m \end{pmatrix}.$$

Notez que le nombre de lignes de $A.\mathbf{x}$ est égal au nombre de lignes de A.

Pour effectuer ce calcul correctement, la régle d'or est que pour calculer la i-ème composante de $A.\mathbf{x}$ il faut prendre la i-ème ligne de la matrice A et en la lisant de gauche à droite faire la somme des produits avec les coefficients du vecteur $\mathbf{x}$ lu de haut en bas.

Prenons un exemple, soit à calculer :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur résultat du calcul aura 2 composantes et sera représenté comme ue colonne de 2 nombres. Le premier de ces nombres est $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 14$, le second est $4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 = 32$. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Le calcul se faisant ligne par ligne par rapport à la matrice A, le cas particulier où la matrice $A \in M_{1,m}(\mathbb{R})$, c'est à dire où la matrice est une ligne, mérite d'être regardé à part. Le résultat sera un vecteur à une composante et sera donc complétement déterminé par un nombre. Le calcul est simple :

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n \end{pmatrix}.$$

Or, cette expression est celle utilisée dans la définition du produit scalaire de deux vecteur colonnes. La matrice ligne (on dit aussi le vecteur ligne) A peut être convertie en le vecteur colonne $\mathbf{y} =^t A$ et l'unique coefficient de $A.\mathbf{x}$ est le produit scalaire $(\mathbf{y}; \mathbf{x})$.

Théorème 5. *Les relations suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} A.(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) &= \lambda A.\mathbf{x} + \mu A.\mathbf{y} \\ (\lambda A + \mu B).\mathbf{x} &= \lambda A.\mathbf{x} + \mu B.x \end{aligned}$$

avec $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ces régles justifient le caractère inoffensif de l'abus de notation qui consiste à noter $A\mathbf{x}$ le produit $A.\mathbf{x}$. Notez que $\mathbf{x}.A$ n'est défini que dans le cas dégénéré $n = m = 1$. Hors de ce cas, il n'y a pas de sens à écrire $\mathbf{x}A = A\mathbf{x}$, une relation qui est pire que fausse : non définie !

Matrices et systèmes linéaires

La notion de produit matriciel permet de formaliser aisément ce qu'est un système linéaire (inhomogène) de n équations à m inconnues.

Définition 4. *Le système linéaire homogène de n équations à m inconnues associé à la matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ est l'équation d'inconnue un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ donnée par $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

On notera l'équivalence suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m &=& 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m &=& 0 \\ \vdots &=& 0 \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,m}x_m &=& 0 \end{array} \right. .$$

Définition 5. *Le système linéaire inhomogène de n équations à m inconnues associé à la matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et au vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ est l'équation d'inconnue un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ donnée par $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.*

On notera l'équivalence suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m & = & b_n \end{array}\right. .$$

Par exemple le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Produits de matrices

Soient $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$. Notez que A a autant de colonnes que B a de lignes.

Définition 6. *Le produit $A.B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice C telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq p$, le coefficient $c_{i,k}$ est donné par la formule :*

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k}.$$

Le cas $p = 1$ correspond au produit à gauche du vecteur colonne B par la matrice A.

Plus généralement, la k-ième colonne de $A.B$ est le produit $A.\mathbf{B}_k$ où $\mathbf{B}_k$ est la k-ième colonne de B. De sorte que le coefficient à la i-ème ligne de $A.B$ se calcule en prenant la i-ème ligne de A et la j-ième colonne de B puis en faisant la somme des produits des termes qui apparaissent en parcourant la ligne de gauche à droite et la colonne du haut en bas. Calculons un exemple :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 5 + 2 \times 0 + 2 \times 1 \\ 0 \times 4 + 3 \times 1 + 1 \times 2 & 0 \times 5 + 3 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notez que si $A.B$ est bien défini, c'est à dire si $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ $B.A$ n'est défini que si $n = p$. Bien sûr, dans le cas particulier $m = n = p$, les deux expressions sont définies. En particulier, on peut multiplier entre elles dans les deux sens les matrices carrées de taille donnée.

Théorème 6. *Les relations suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} A.(B.C) &= (A.B).C \\ A.I_m &= A \\ I_n.A &= A \\ 0.A &= 0 \\ A.0 &= O \\ (\lambda A + \mu A').B &= \lambda A.B + \mu A'.B \\ A.(\lambda B + \mu B') &= \lambda A.B + \mu A.B' \\ {}^t(A.B) &= {}^tB.{}^tA \end{aligned}$$

avec $A, A' \in M_{n,m}(\mathbb{R}),\ B, B' \in M_{m,p}(\mathbb{R})\ C \in M_{p,q}(\mathbb{R}),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ainsi dans un produit bien défini de plusieurs matrices on peut omettre les parenthèses. Tant qu'on ne travaille qu'avec des produits et sommes de matrices bien définis on peut appliquer presque les mêmes régles de calcul algébrique. Mais ce presque est ici une restriction de taille !

En effet, même si A et B sont tels que $A.B$ et $B.A$ sont bien définis, il est généralement faux que $A.B = B.A$. Ce défaut de commutativité est le trait le plus saillant du calcul matriciel et se retrouve dans ses applications les plus simples comme les plus profondes. Donnons un exemple :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 79. *Calculer la somme des vecteurs* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ *suivants :*

(1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$

Exercice 80. *Calculer la somme des vecteurs* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ *suivants :*

(1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Exercice 81. *Calculer le produit scalaire* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ *des vecteurs* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ *suivants :*

(1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 82. *Calculer* $3.A$ *pour les matrices* A *suivantes.*

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 83. *Calculer la somme* $A + B$ *des matrices suivantes, si toutefois elle est bien définie.*

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 84. *Dans les cas suivants, le produit* $A.\mathbf{x}$ *du vecteur* $\mathbf{x}$ *par la matrice* A *est-il bien défini ? Si oui le calculer.*

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(4) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(5) $A = \begin{pmatrix} 45 & 2 & 1 \\ 2 & 16 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(6) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 12 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 85. *Dans les cas suivants, le produit A.B des matrices A et B est-il bien défini ? Si oui le calculer.*

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 45 & 2 & 1 \\ 2 & 16 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 8 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(5) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(6) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 12 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Matrices et suites récurrentes

Nous allons voir rapidement dans ce paragraphe comment étudier certaines suites récurrentes à l'aide des matrices. Nous reviendrons sur ce point dans le cours de mat206.

Considérons la suite de Fibonacci qui est donnée par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, un calcul élémentaire donne que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation fondamentale

$$X_{n+1} = AX_n.$$

En itérant cette relation, on obtient alors

$$X_{n+1} = AX_n = A^2 X_{n-1} = ... = A^{n+1} X_0.$$

Or, par définition, $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc, quitte à faire un changement d'indice, on a

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si on connait A^n, on peut exprimer u_n en fonction de n. En effet, si $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, alors $u_n = a_n + b_n$. Le point est qu'il n'est pas facile de calculer A^n en général. Nous verrons dans le cours de mat206 comment s'en sortir.

Matrices inversibles

Un système linéaire inhomogène de n équations à n inconnues s'écrit sous la forme $A.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée $n \times n$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Dans le cas $n = 1$, cette équation s'écrit sous la forme (1) $ax = b$ et se résout, si $a \neq 0$, en $x = a^{-1}b$.

Dans le cas général, si nous connaissons une matrice notée A^{-1} (et appelée inverse de A) telle que $A^{-1}.A = I_n$ on aurait :

$$(2)\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow I_n\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Donc, moyennant la connaissance de A^{-1} et du produit matriciel, le principe de résolution d'un système linéaire de n équations à n inconnues est aussi simple que celui de (1). En pratique, c'est bien sûr plus compliqué que celà pour deux raisons : il existe des matrices non nulles non inversibles et le calcul de l'inverse n'est pas simple.

Néanmoins l'intérêt de ces problèmes dépasse le strict cadre des systèmes linéaires et nous allons expliquer plus en détail comment reconnaitre les matrices inversibles et calculer, s'il existe, l'inverse d'une matrice carrée. De (2), on déduit en partie le résultat primordial suivant.

Théorème 7. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée $n \times n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) L'unique solution du système linéaire $A\mathbf{x} = 0$ est $\mathbf{x} = 0$.

(2) Pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une solution unique.

(3) $\exists B \in M_n(R), \quad BA = AB = I_n$.

Dans ces conditions, on dit que la matrice A est inversible et on pose $A^{-1} = B$ qu'on appelle l'inverse de A. L'ensemble des matrices carrées inversibles est appelé $GL_n(\mathbb{R})$.

Exemples :

1) La matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas d'inverse. En effet, on a toujours :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

De sorte qu'il ne peut pas exister de matrice $F \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $FE = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On a alors par un calcul simple que $AB = BA = I_3$ et donc A est inversible avec $B = A^{-1}$. Cependant, si on ne nous ne donne pas B, il n'est pas évident de voir que A est inversible puis de calculer A^{-1} !

Proposition 8. *I_n est une matrice inversible d'inverse I_n. Le produit AB de deux matrices inversibles est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.*

Démonstration. Comme $I_n.I_n = I_n$ il suit que I_n est son propre inverse.

Si A et B sont inversibles, on a :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Donc AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$. □

Déterminants

Le but de ce paragraphe est de donner un critère numérique (et facilement vérifiable) pour déterminer si une matrice est inversible ou non. Pour cela, on commence par considérer le cas simple où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Nous voulons donc donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d telle que A est inversible si et seulement si cette condition est vérifiée. Il suffit donc de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A\mathbf{x} = 0$ ait comme seule solution $\mathbf{x} = 0$ (d'aprés le théorème 1). Ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0. \end{aligned}$$

Cas 1 : $a \neq 0$. On peut ajouter $-\frac{c}{a}$ la première ligne à la seconde pour obtenir le système équivalent :

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ (d - \frac{c}{a}b)y &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, ce système n'a que la solution nulle si et seulement si $d - \frac{c}{a}b \neq 0$.

Cas 2 : $c \neq 0$. On peut ajouter $-\frac{a}{c}$ la seconde ligne à la première pour obtenir le système équivalent :

$$\begin{aligned} (b - \frac{a}{c}d)y &= 0 \\ cx + dy &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, ce système n'a que la solution nulle si et seulement si $b - \frac{a}{c}d \neq 0$.

Cas 3 : $a = c = 0$. $x = 1, y = 0$ est alors solution et la matrice n'est pas inversible.

Le bilan est que A est inversible si et seulement $ad - bc \neq 0$.

Définition 7. *Le nombre réel $ad - bc \in \mathbb{R}$ est appelée le déterminant de A et noté* $\det(A)$.

On a établi le critère numérique suivant d'inversibilité.

Théorème 9. *$A \in M_2(\mathbb{R})$ est inversible ssi $det(A) \neq 0$.*

Ce résultat s'étend au cas des matrices plus grandes. Ainsi, pour une matrice 3×3, on définit le déterminant par la formule :

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} &= a_{1,1}\det\begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} - a_{2,1}\det\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &\quad + a_{3,1}\det\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La recette est la suivante : on suit la première colonne, on multiplie $a_{i,1}$ par $(-1)^{i+1}$ fois le déterminant de la matrice 2×2 obtenue en otant la première colonne et la i-ème ligne, puis on fait la somme de ces réels.

On peut en fait développer par rapport à n'importe laquelle des lignes ou colonnes. L'idée est de choisir la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéro (Pour un exemple, voir l'exercice 2 plus bas). La recette est alors la même : on suit la ligne ou colonne choisie, on multiplie $a_{i,j}$ (où i ou j est fixe, suivant le choix de la ligne ou de la colonne) par $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice 2×2 obtenue en otant la i-ième ligne et la j-ème colonne, puis on fait la somme de ces réels. Par exemple, si on développe par rapport à la deuxième ligne, on obtient (attention aux $(-1)^{i+j}$)

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} &= -a_{2,1}\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} + a_{2,2}\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &\quad - a_{2,3}\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. On développe par exemple par rapport à la deuxième colonne et on obtient

$$det(A) = -(-1).\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 4.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-6-5)-4(-2-10)-(1-6) = 42.$$

Cette recette marche pour définir par récurrence le déterminant d'une matrice $n \times n$:

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = a_{1,1}\det\begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
$$- a_{2,1}\det\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
$$+ \dots$$
$$+ (-1)^{n+1}a_{n,1}\det\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

Une des découvertes mathématiques majeures de la fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle est le critère suivant :

Théorème 10. *$A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible ssi $det(A) \neq 0$.*

Il n'y a pas de formule simple pour le déterminant d'une somme. En revanche, on a le résultat suivant.

Théorème 11. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices $det(AB) = det(A)det(B)$.*

La preuve de ces théorèmes demande de développer au-delà des objectifs de ce cours la théorie des déterminants et sera donc omise.

Corollaire 12. *Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, $det(P^{-1}) = (det(P))^{-1}$.*
Soit $A \in M_n(R)$ une matrice, $det(PAP^{-1}) = det(A)$.

Démonstration. Le théorème 11 donne $det(P)det(P^{-1}) = det(PP^{-1}) = det(I_n)$. Avec la définition ci dessus du déterminant, on vérifie aisément que $det(I_n) = 1$. D'où le premier point.

Le second point découle du théorème 11 et du premier point, car :

$$det(PAP^{-1}) = det(P)det(A)det(P^{-1}) = det(A)det(P)det(P)^{-1} = det(A).$$

$\square$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. On a vu que $det(A) = 42 \neq 0$. Donc, A est inversible. On verra plus tard comment déterminer A^{-1} !

Exercices corrigés

Exercice 1. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, la matrice $A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Corrigé. On a $det(A) = 2m - 6 = 2(m-3)$. Donc, A est inversible si et seulement si $m \neq 3$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le déterminant de A. La matrice A est-elle inversible ?
2) En déduire (sans chercher à résoudre)
2a) Le nombre de solutions de

$$(S_1) \begin{cases} x - y + z &= 1 \\ 2x + 3y - 4z &= -2 \\ x - 2y &= 3 \end{cases}$$

2b) les solutions de

$$(S_2) \begin{cases} x - y + z &= 0 \\ 2x + 3y - 4z &= 0 \\ x - 2y &= 0 \end{cases}$$

Corrigé.
1) On développe par rapport à la dernière colonne qui contient le plus de zéro (Remarque : On aurait pu aussi choisir la dernière ligne). On a alors

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-4). \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-4-3)+4(-2+1) = -7-4 = -11 \neq 0.$$

Comme le déterminant de A est différent de zéro, la matrice A est inversible.

2a) Le système (S1) s'écrit de façon matricielle sous la forme $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Comme A est inversible, ce système admet une unique solution.

2B) Le système (S2) s'écrit de façon matricielle sous la forme $AX = O$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme A est inversible, ce système admet une unique solution. Or,

$x = y = z = 0$ est une solution évidente (On aurait pu remarquer que le système est homogène). Donc, l'unique solution est $x = y = z = 0$.

Le but de la suite est de décrire diverses méthodes pratiques pour inverser une matrice. Il ne vous est pas demandé de maitriser toutes ces méthodes, mais de choisir une de ces méthodes (celle qui vous parait la plus simple à appliquer) et de savoir l'utiliser. On commence par rappeler le résultat fondamental suivant.

Théorème 13. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée $n \times n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) L'unique solution du système linéaire $A\mathbf{x} = 0$ est $\mathbf{x} = 0$.

(2) Pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une solution unique.

(3) Il existe une unique matrice $B \in M_n(R), BA = AB = I_n$.

(4) $det(A) \neq 0$.

Dans ces conditions, on dit que la matrice A est inversible et on pose $A^{-1} = B$ qu'on appelle l'inverse de A. L'ensemble des matrices carrées inversibles est appelé $GL_n(\mathbb{R})$.

Un point important est de d'abord vérifier que la matrice est inversible avant d'essayer de calculer son inverse !

8.1. **Méthode 1 : Par résolution d'un système.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On utilise le fait que $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$. Donc, pour obtenir A^{-1}, on résoud le système linéaire $AX = B$ où B est une matrice quelconque.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. On note que $det(A) = -8 - 5 = -13 \neq 0$, donc A est inversible. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On doit résoudre le système (d'inconnue X) $AX = B$, c'est à dire trouver x et y en fonction de a et b. Le système AX=B s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x - 5y & = & a \\ -x - 2y & = & b \end{array} \right.$$

En multipliant la deuxième ligne par 4, on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x - 5y & = & a \\ -4x - 8y & = & 4b \end{array} \right.$$

En additionnant les deux lignes, on obtient $-13y = a + 4b$, soit $y = -1/13a - 4/13b$. D'où, $x = -2y - b = 2/13a - 5/13b$.
On a donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/13 & -5/13 \\ -1/13 & -4/13 \end{pmatrix} = 1/13 \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.
La première ligne de A^{-1} correspond à x, la seconde à y en fonction de a puis b.

8.2. **Méthode 2 : Par résolution de systèmes.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. L'idée est similaire à celle de la méthode 1. Mais, au lieu de considérer B quelconque, on résoud le système $AX = B$ en prenant pour B les vecteurs de la base canonique (c'est à dire $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ si $n = 2$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ si $n = 3$). Il nous faut donc résoudre deux ou trois systèmes (suivant la valeur de n). Les solutions de ces systèmes (considérés dans l'ordre de la base canonique) donnent les colonnes de A^{-1}. Ceci se justifie par la formule de changement de bases qui est expliquée dans la dernière section.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 1 & 2\\1 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Comme $det(A) = 3 \neq 0$, A est inversible. On commence par résoudre $AX = E_1$ où $E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, c'est à dire

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 1 \\ 2x + y + 2z & = & 0 \\ x + 2y & = & 0 \end{array}\right.$$

On remplace (L_2) par $(L_2) - 2(L_1)$ et (L_3) par $(L_3) - (L_1)$ pour obtenir

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + 2y + z & = & 1 \\ -3y & = & -2 \\ -z & = & -1 \end{array}\right.$$

On obtient alors $x = -4/3$, $y = 2/3$ et $z = 1$.

On résoud ensuite $AX = E_2$ où $E_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, c'est à dire

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 0 \\ 2x + y + 2z & = & 1 \\ x + 2y & = & 0 \end{array}\right.$$

On remplace (L_2) par $(L_2) - 2(L_1)$ et (L_3) par $(L_3) - (L_1)$ pour obtenir

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 0 \\ -3y & = & 1 \\ -z & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient alors $x = 2/3$, $y = -1/3$ et $z = 0$.

On résoud enfin $AX = E_3$ où $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 0 \\ 2x + y + 2z & = & 0 \\ x + 2y & = & 1 \end{array} \right.$$

On remplace (L_2) par $(L_2) - 2(L_1)$ et (L_3) par $(L_3) - (L_1)$ pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 0 \\ -3y & = & 0 \\ -z & = & 1 \end{array} \right.$$

On obtient alors $x = 1$, $y = 0$ et $z = -1$.

On a donc obtenu comme solutions $\begin{pmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4/3 & 2/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

8.3. **Méthode 3 : Par la comatrice.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R)$ une matrice inversible. Introduisons la matrice B suivante :

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

et calculons :

$$\begin{array}{rcl} AB & = & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a établi :

Proposition 14. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *une matrice inversible. Alors,*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 1/det(A) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

On notera qu'il est nécessaire que le déterminant soit non nul pour que cette formule ait un sens.

Cette formule se généralise pour les matrices $A \in M_3(\mathbb{R})$ de la façon suivante.
Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. On note $A_{i,j} \in M_2(\mathbb{R})$ la matrice obtenue en enlevant à A la i-ème ligne et la j-ième colonne, puis $d_{i,j} = (-1)^{i+j} det(A_{i,j})$.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, alors $A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $d_{1,2} = -1$.

La comatrice de A, notée $Com(A)$, est la matrice des $d_{i,j}$, c'est à dire

$$Com(A) = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc cette matrice en calculant les déterminants des $A_{i,j}$ et en appliquant la même règle des signes que pour le déterminant (Développement par rapport à une ligne ou une colonne).
On a alors

$$A^{-1} = 1/det(A)(Com(A))^t$$

où $(Com(A))^t$ est la transposée de la comatrice de A.
On a donc

$$A^{-1} = 1/det(A) \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{2,3} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{3,2} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Remarque. On peut voir que la méthode précédente redonne la proposition 2 dans le cas $n = 2$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. En développant par rapport à la première colonne, on a

$$det(A) = det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -4 - 5 = -9 \neq 0.$$

On a de plus

$$d_{1,1} = -4 \quad d_{1,2} = -1 \quad d_{1,3} = -1$$

$$d_{2,1} = -2 \quad d_{2,2} = -5 \quad d_{2,3} = -4$$

$$d_{3,1} = -5 \quad d_{3,2} = 1 \quad d_{3,3} = 1$$

On a donc $Com(A) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis

$$A^{-1} = -1/9 \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & 1/9 & 1/9 \\ 2/9 & 5/9 & -4/9 \\ 5/9 & -1/9 & -1/9 \end{pmatrix}.$$

8.4. **Méthode 4 : Par le pivot de Gauss.** Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice inversible, on fait des manipulations sur les lignes de A pour se ramener à la matrice identité I_n et on fait en même temps les mêmes manipulations sur I_n. La matrice ainsi obtenue est A^{-1}. Ceci se justifie par la théorie des système linéaires.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. On note que $det(A) = -8 - 5 = -13 \neq 0$, donc A est inversible. Puis, on applique la méthode décrite au dessus :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remplace (L_2) par $4(L_2)$ pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \qquad\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On remplace (L_2) par $(L_1) + (L_2)$ pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -13 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On remplace (L_2) par $-1/13(L_2)$ pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/13 & -4/13 \end{pmatrix}$$

On remplace (L_1) par $(L_1) + 5(L_2)$ pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 8/13 & -20/13 \\ -1/13 & -4/13 \end{pmatrix}$$

On remplace (L_1) par $1/4(L_1)$ pour obtenir

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 2/13 & -5/13 \\ -1/13 & -4/13 \end{pmatrix}$$

On a donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/13 & -5/13 \\ -1/13 & -4/13 \end{pmatrix} = 1/13 \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercices corrigés

Exercice 1

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible, et si oui, calculer son inverse et vérifier votre calcul.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 1. Vous devez utiliser la méthode que vous avez choisi pour obtenir les resultats suivants. La vérification se fait en effectuant le produit $A.A^{-1}$. On doit obtenir alors la matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour le premier exemple et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour les deux suivants.

$det(A) = 1 \neq 0$ donc A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$det(B) = -1 \neq 0$ donc B est inversible et

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$det(C) = -1 \neq 0$ donc C est inversible et

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Plus dur !).
Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose

$$A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Pour quelles valeurs de m, $A(m)$ est-elle inversible ?
2) Déterminer l'inverse de $A(m)$ quand cela est possible.

Corrigé de l'exercice 2.
1) On a $det(A(m)) = 2m - 2$ donc, $A(m)$ est inversible si et seulement si $2m - 2 \neq 0$, c'est à dire $m \neq 1$.
2) La difficulté est de faire les calculs avec le paramètre $m \neq 1$. Appliquons par

exemple la première méthode (Essayer avec votre méthode préferée !). On doit donc résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} mx+y &=& a \\ 2x+2y &=& b \end{array}\right.$$

En faisant $(L_2)-2(L_1)$, on obtient $(2-2m)x=b-2a$, soit $x=1/(2-2m)(b-2a)=1/(2m-2)(2a-b)$. D'où, $y=1/2(b-2x)=1/2(b-1/(m-1)(2a-b))=1/(2m-2)(-2a+mb)$. On a donc

$$A(m)^{-1}=1/(2m-2)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & m \end{pmatrix}.$$

Exercice 86. *Calculer les déterminants suivants.*

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 87. *Pour chacun des systèmes suivants, déterminer s'il y a unicité de la solution (sans chercher à la déterminer).*

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y &=& 2 \\ x+2y &=& 1 \end{array}\right.$$

$$(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+5z &=& -1 \\ x+y-2z &=& 1 \\ x+2y-2z &=& 18 \end{array}\right.$$

$$(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+2z &=& 0 \\ 2x+y+3z &=& 0 \\ 3x+2y+z &=& 0 \end{array}\right.$$

Dans ce dernier cas, quelles sont les solutions du système ?

Exercice 88. *Soit le système* (S_m) *où* m *est un paramètre réel :*

$$(S_m)\left\{\begin{array}{rrrcl} x & -my & +m^2z &=& m \\ mx & -m^2y & +mz &=& 1 \\ mx & +y & -m^3z &=& -1. \end{array}\right.$$

(1) *Déterminer les valeurs du réel* m *, pour lesquelles ce système possède une unique solution. (On ne demande pas de calculer cette solution.)*

(2) *Résoudre complètement le système pour* $m=0$ *et pour* $m=\pm 1$.

Exercice 89. *Calculer le déterminant des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Lesquelles sont inversibles ? Calculer leur inverse.

Exercice 90. *Montrer que les deux matrices suivantes sont inversibles et l'inverse l'une de l'autre :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 91. *Calculer le déterminant des matrices suivantes. Sont-elles inversibles ?*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 92. *Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ les matrices $M(a), N(a)$ suivantes sont-elles inversibles ?*

$$M(a) = \begin{pmatrix} 4+a & 1+2a \\ -5 & -3a \end{pmatrix}, \quad N(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+a \\ -1+a & 1+2a \end{pmatrix}.$$

Exercice 93. *Inverser les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 94. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, A^3.
Trouver une relation de la forme $A^3 = aA^2 + bA + cI_3$.
En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

9. Fonctions de plusieurs variables, dérivées partielles

Le but de ce paragraphe est d'expliquer comment dériver des fonctions de plusieurs variables. A titre culturel, nous en profitons pour faire le lien avec les travaux de Joseph Fourier.

Les fonctions que nous allons considérer sont définies sur

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, \text{ ou } \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

Une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est la donnée pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (qui est contenu dans le domaine de définition D_f de f) d'un réel noté $f(x,y)$.

Exemple 1. Soit $f(x,y) = \dfrac{3}{1-xy}$. Alors, $f(x,y)$ est définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $1 - xy \neq 0$. Notons que l'ensemble des points du plan d'équation $xy = 1$ (c'est à dire $y = 1/x$) est une hyperbole.

Une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est la donnée pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (qui est contenu dans le domaine de définition D_f de f) d'un réel noté $f(x,y,z)$.

Exemple 2. Soit $f(x,y,z) = \dfrac{4}{x+4y+z+1}$. Alors, $f(x,y,z)$ est définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ avec $x + 4y + z + 1 \neq 0$. Notons que l'ensemble des points de l'espace d'équation $x + 4y + z + 1 = 0$ est un plan.

Nous pouvons voir les fonctions sur $\mathbb{R}^2$ ou sur $\mathbb{R}^3$ comme des fonctions sur l'ensemble des points du plan ou de l'espace respectivement, c'est à dire, quand c'est possible, elles associent à un point une valeur (réelle). Donnons un exemple qui est important historiquement pour nous. Le lecteur pourrait se demander pourquoi l'Université de Grenoble I s'appellait Université Joseph Fourier, alors que celui-ci n'est pas né dans le Dauphiné (il est né à Auxerre en 1768 et mort à Paris en 1830). En fait, Fourier fut préfet de l'Isère. On lui doit (entre autres) la construction de la portion française de la route menant à Turin et le drainage des marais paludéens. Mais, Fourier était aussi un scientifique, il est souvent considéré comme le fondateur de la physique mathématique. Son grand traité est “Théorie analytique de la chaleur” (parution vers 1822), dans lequel il étudie la propagation de la chaleur. Pour cela, il introduit les bases de ce que l'on appelle maintenant l'analyse de Fourier. A quoi s'intéressait Fourier ? Prenez une plaque (trés mince) que l'on assimile à un plan. Chauffez cette plaque en un point. Comment se diffuse la chaleur ? C'est à dire quelles est la quantité de chaleur (notée $f(x,y,t)$) au point M de coordonnées (x,y) au temps t (le temps

$t = 0$ correspondant à l'instant où nous chauffons la plaque). Le but de Fourier était de trouver expérimentalement l'équation satisfaite par la quantité de chaleur f, puis de la résoudre mathématiquement. Il a considéré le cas d'autres solides et a tenté d'en présenter une approche uniforme en développant des outils mathématiques adaptés (comme ce que nous appelons maintenant les séries de Fourier).

FIGURE 7. Joseph Fourier

Considérons une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour dériver cette fonction par rapport à x, nous considérons que y est une constante et donc que la fonction ne dépend que de x. S'il est possible de dériver cette fonction qui ne dépend que de x, nous obtenons ce que nous appelons la dérivée partielle de f par rapport à x, qui se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. La même méthode permet de calculer la dérivée de f par rapport à y, qui se note $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exemple 1 : Soit $f(x,y) = xy + 4x + 5y$. Cette fonction est définie pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$. Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y+4$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+5$. Ici, il est important de voir que la dérivée de xy par rapport à x est y.

Exemple 2 : Soit $f(x,y) = \sin(xy)$. Cette fonction est définie pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$. Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)$. La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est une fonction de deux variables que nous pouvons dériver suivant les mêmes règles :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\sin(xy).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy).$$

De la même façon, nous pouvons calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

Remarque : En faisant ces calculs, le lecteur se rend compte que, dans ce cas,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Ceci n'est pas toujours vrai, c'est à dire dériver par rapport à x puis par rapport à y (c'est à dire $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$) ne donne par forcément le même résultat que dériver par rapport à y puis par rapport à x (c'est à dire $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$). Cela ne sera pas important pour nous.

Les mêmes règles s'adaptent pour la dérivation des fonctions de 3 variables.

Exemple. Soit $f(x,y,z) = xyz$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^3$. De plus pour tout (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$, nous avons par exemple

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = z.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}(x,y,z) = 0.$$

S'il existe, le laplacien de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, noté Δf, est donné par

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z).$$

On pourra vérifier que le laplacien de l'exemple précédent est nul. Dans l'espace, l'équation de la chaleur s'écrit $\Delta f = C\dfrac{\partial f}{\partial t}$ où C est une constante et la fonction inconnue f dépend des variables x y, z et t. Le laplacien est pris par rapport aux variables d'espace x, y et z.

Exercice 95. *Calculer les dérivées partielles premières des fonctions donnÃľes par les expressions suivantes.*

$$\begin{aligned} a(x,y) &= x + 2y & b(x,y) &= xy^2 \\ c(x,y) &= \frac{x}{y} & d(x,y) &= xe^{x+y} \\ f(x,y) &= x^3y + 5xy - 6x + 8y - 6 & g(x,y) &= \cos(xy) \\ h(x,y) &= \ln(5x + 8xy) & i(x,y) &= 7e^{x^2y+7xy^3} \\ j(x,y) &= \sqrt{5x - xy^2} & k(x,y) &= \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \\ \ell(x,y,z) &= xyz + x^2z + z^3y & m(x,y,z) &= ze^{xy} \\ n(x,y,z) &= \sin(xy + yz + xz). \end{aligned}$$

Exercice 96 (Partiel, novembre 2014)**.** *Calculer les dérivées (ou, le cas échéant, les dérivées partielles) des fonctions définies par les expressions suivantes (on ne cherchera pas à calculer le domaine de définition des fonctions) :*

$$a(x) = x^2 \ln(x) \qquad b(x) = \arctan(x^3) \qquad c(x) = e^{\ln(3x)+\ln(x^2)}$$
$$d(x) = \cos(\sin(x)) \quad f(x,y) = \tan(x+xy) \quad g(x,y,z) = 3x^2y + xyz - 2xz + z^3$$

Exercice 97. *(*) L'équation des ondes (utilisée en sismologie par exemple) est*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = C\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

où f est une fonction dépendant de la variable "espace" ($x \in \mathbb{R}$ pour nous) et du temps ($t > 0$), et C est une constante.
1) Considérons une onde se déplaçant à la vitesse V suivant la loi $f(x,t) = (x-Vt)^2$. A quelle condition, f est solution de l'équation des ondes ?
2) Donner une condition pour que l'onde $f(x,t) = g(x - Vt)$ soit solution de l'équation des ondes.
3) Existe-t-il des ondes sinusoidales, c'est à dire décrites par une fonction de la forme $f(x,t) = \sin(kx - \omega t)$?

10. Sujets de partiel et d'examen

Nous donnons quelques subjets des années précédentes..

MAT103 (2016-2017)
Partiel de novembre 2016
Durée : 1h
Sans calculatrice, ni document
Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1. *(4 points) Les deux questions sont indépendantes.*
1) En 2015, une entreprise a augmenté ses ventes de 30 pour cent. En 2016, les ventes ont encore augmentées de 20 pour cent. Calculer l'augmentation globale en pourcentage sur ces deux années.

2) Un propriétaire terrien a vendu le quart de sa propriété en 2015 et les quatre cinquièmes du reste en 2016. Quelle est la superficie de la propriété sachant que la partie invendue au bout de deux ans représente six hectares ?

Exercice 2 (9 points)**.** *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes. On précisera le domaine de définition dans chaque cas.*

(1) $x^2 + 3x + 5 = 0$ *;*

(2) $x^3 + 2x^2 - 3x = 0;$

(3) $2x^2 - x - 1 < 0$ *;*

(4) $\dfrac{2x+1}{x+2} < 1$ *et ensuite* $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right) < 0$ *;*

(5) $t^2 + t - 2 = 0$ *(avec inconnue* t*) et ensuite* $e^{2x} + e^x - 2 = 0$*.*

Exercice 3 (7 points)**.** *Sous certaines hypothèses, la quantité d'un produit intervenant dans une réaction chimique d'ordre 1 est donnée en fonction du temps* t *par* $f(t) = A + Be^{-kt}$ *où* A*,* B *et* k *sont des paramètres (dépendant de la réaction et du produit considérés) avec* A *et* k *strictement positifs. On ne précise pas l'unité de mesure de la quantité de produit. On suppose dans cet exercice que* $A = 2$*,* $B = 8$ *et* $k = 1$*. Donc,* $f(t) = 2 + 8e^{-t}$*. On exprimera les réponses en utilisant les fonctions exponentielle et logarithme néperien.*
1) Que vaut la quantité initiale de produit (c'est à dire pour $t = 0$*) ?*
2) Etudier les variations de f*.*
3) En déduire comment évolue la quantité de produit. 4) Déterminer un temps $t_0 > 0$ *tel que la quantité de produit au temps* t_0 *vaut 4.*
5) Déterminer un temps $t_1 > 0$ *tel que si* $t \geq t_1$*, la quantité de produit au temps* t *est inférieure à 8.*
6) On considère la phrase (P) *:*

$$\forall t \in [0, +\infty[, \exists s \in [0, +\infty[, f(t) < f(s).$$

Ecrire la négation de (P)*. La phrase* (P) *est-elle vraie (On pourra justifier en utilisant la question 2).*

MAT103 (2016-2017)
Examen de décembre 2016
Durée : 2h

Sans calculatrice, sans document
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (Pourcentage, 1 point)**.** *Un commerçant vend un meuble 100 euros. Pendant les soldes, il veut le vendre 80 euros. Quel pourcentage de rabais doit-il alors appliquer ?*

Exercice 2 (Equations/Inéquations, 4 points)**.** *Les trois questions sont indépendantes.*

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $\dfrac{x-2}{(x^2-x-6)} > 0$*.*

2) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$*, l'équation* $x^2 - mx + 1 = 0$ *admet-elle une unique solution (L'inconnue est* $x \in \mathbb{R}$*) ?*

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $\ln(x) + \ln(x+2) = 0$*.*

Exercice 3 (Dérivées/dérivées partielles, 3 points)**.** *Les deux questions sont indépendantes.*

1) Calculer les dérivées des fonctions suivantes (On ne précisera pas l'ensemble de définition).

$$f(x) = xe^{3x+1},\ g(x) = \ln(5x^2 - 3x + 2),\ h(x) = \frac{x^2+2}{2x-3},\ i(x) = (5x-1)\sin(2x+1).$$

2) Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = 3\ln(3x+4xy),\ g(x,y,z) = 3x^2yz - 7xz + 12.$$

Exercice 4 (Primitives/intégrales, 4 points)**.** *Les deux questions sont indépendantes.*

1) Calculer les primitives des fonctions suivantes (On ne précisera pas leur ensemble de définition).

$$f(x) = x - 3^7 + 6x^2 + 1/\sqrt{2x+1},\ g(x) = \frac{3x}{1-x^2},\ h(x) = 6x^2(x^3+4)^6.$$

2) Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi/4} \cos(2x)dx,\ J = \int_0^1 \frac{4}{2-x}dx.$$

Exercice 5 (Etude de fonction/optimisation, 2 points)**.** *Soit* $f(t) = \dfrac{2t+3}{t+2}$.
1) Etudier les variations de f *sur* $[0, +\infty[$.
2) Si $f(t)$ *représente le nombre d'individus d'une population donnée en fonction du temps t (en années), indiquer quand la population est la moins nombreuse et quand elle est la plus nombreuse durant la période entre* $t = 0$ *et* $t = 10$.

Exercice 6 (Calcul matriciel, 6 points)**.** *Les 3 questions sont indépendantes.*

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ *? Calculer* $A^2 - 3A + I$ *où* I *est la matrice identité de dimension* 3..

2) Soit $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ *où* $m \in \mathbb{R}$ *est un paramétre.*
2a) Déterminer les valeurs de m *pour lesquelles* $A(m)$ *est inversible.*
2b) Si $m = 2$, *calculer l'inverse de de* $A(2)$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *La matrice* A *est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse et vérifier votre calcul.*

MAT103 (2016-2017)
Examen de mai 2017
Durée : deux heures
Calculatrice et documents interdits
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (1 point). *Un magasin spécialisé dans la vente d'accessoires automobiles vend un modèle de pneu à 120 euros l'unité. Lors d'une promotion, il décide de faire une remise de 25 pour cent sur l'achat de chaque pneu. Son affiche publicitaire affirme "Le 4 ème pneu est gratuit". Est-ce exact (Justifier) ?*

Exercice 2 (3 points). *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes. On précisera dans chaque cas le domaine de définition.*
1) $\dfrac{x+1}{x-1} = 1$ *puis* $\dfrac{x+1}{x-1} \leq 1$;
2) $x^2 + x - 2 < 0$;
3) $e^x e^{2x-1} = 1$
4) $\ln(x+1) + \ln(x) = 0$

Exercice 3 (3 points). *Les deux questions sont indépendantes.*
1) Calculer les dérivées des fonctions suivantes. On précisera dans chaque cas le domaine de définition.

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-1},\ g(x) = 3\ln(2x^2+3),\ \ , h(x) = 4e^{x^3+x+5}.$$

2) Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes. On ne précisera pas le domaine de définition.

$$f(x,y) = \frac{3x^2}{y-1},\ g(x,y,z) = 3xyz^2 - 6yx^3.$$

Exercice 4 (3 points). *1) Trouver les solutions de*

$$x\,(x-2) > 0$$

2) Soit $f\,(x)$ la fonction définie par :

$$f\,(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$$

Donner le domaine de définition de $f\,(x)$, calculer sa dérivée et donner son sens de variation (on utilisera la première question).

Exercice 5 (4 points). *1) Calculer une primitive de .*
$f(x) = 3x^2 - 6x + 5 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^4}$
$g(x) = \dfrac{5x}{(1+x^2)}$

$h(x) = 3x^2 e^{x^3}$
2) Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^1 (3t^2 - 2t + 1)dt.$$

$$J = \int_0^1 \frac{3}{1+2x} dx.$$

Exercice 6 (2 points)**.** *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
1) Calculer si possible AB *et* BA*.*
2) Calculer $A^2 + 3A - 2I$ *où* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (4 points)**.** *Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, puis (quand cela est possible) calculer leur inverse.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Partiel de mat103 (octobre 2017)
Université Grenoble Alpes
Durée : 1 heure
Documents et calculatrice interdits

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (2 points)**.** *On rappelle que le pH d'une solution aqueuse est donné par* $-\log[H_3O^+]$ *où* $\log(x)$ *est le logarithme en base* 10 *de* x *et* $[H_3O^+]$ *est la concentration des ions hydronium (en moles par litre).*
1) Que vaut le pH si $[H_3O^+] = 10^{-2}$ *?*
2) On considère une solution dont le pH vaut 2. Quelle doit être la nouvelle concentration en ions hydronium pour augmenter cette valeur initiale du pH de 25% *?*

Exercice 2 (8 points)**.** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations et inéquations d'inconnue* x *(sauf une équation d'inconnue* t *dans la question 4). On commencera par préciser le domaine de définition.*

(1) $2x^2 + x - 1 > 0$ *puis* $2x^3 + x^2 - x \leq 0$.

(2) $\dfrac{2x+1}{x-1} > 1$.

(3) $t^2 - t - 2 = 0$ *(d'inconnue* t*) puis* $e^{2x} - e^x - 2 = 0$.

Exercice 3 (7 points)**.** *Calculer la dérivée des fonctions suivantes en précisant d'abord leur domaine de définition.*

(1) $f(x) = 3x^7 + 5x^2 - 3 + 3e^{2x} - 4\ln(x) + \sin(4x)$.

(2) $h(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$.

(3) $g(x) = \ln\big(3x^2 + 1\big)$.

Exercice 4 (3 points)**.** *Une quantité* $f(t)$ *de produit chimique (exprimée en grammes) est donnée en fonction du temps* t *(mesuré en secondes) par la formule* $f(t) = e^{t^2-2t+7}$ *(*$t \geq 0$*).*
1) Dresser le tableau de variation de la fonction f *sur* $[0 + \infty[$ *et représenter son graphe.*
2) On arrête l'expérience quand la quantité de produit dépasse les 2000 grammes. Déterminer graphiquement s'il existe des temps $t \geq 0$ *tels que* $f(t) \geq 2000$.
Si c'est le cas, calculer le plus petit temps T *tel que* $f(T) = 2000$ *(on écrira l'équation satisfaite par* T*).*
Indications numériques : $e^5 \sim 148$, $e^6 \sim 403$, $e^7 \sim 1096$, $\sqrt{-6 + \ln(2000)} \sim 1,2652$.

Examen de mat103 (Janvier 2018)
Université Grenoble-Alpes
Durée : 2 heures
Documents et calculatrice interdits

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)**.** *Les deux questions sont indépendantes.*
1) Calculer les dérivées des fonctions suivantes. On précisera dans chaque cas le domaine de définition.

$$f(x) = 5\ln(2x^2 - 5x - 3), \;\; g(x) = 5e^{x^3+6x-1}.$$

2) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction suivante. On ne précisera pas le domaine de définition.

$$f(x,y) = 3x^2y - 5xy + \frac{y}{x}$$

Exercice 2 (3 points)**.** *1) Soit* $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$ *définie sur* $[0 + \infty[$*. Etudier les variations de* f *sur* $[0, +\infty[$*. La fonction* f *admet-elle un maximum sur* $[0, +\infty[$ *?*

2) On dispose de n lampes montées en série (n est un entier). L'éclairement total fourni par la batterie de lampes est donné par

$$E(n) = \frac{144n}{(1+n)^2}.$$

En utilisant la question 1, déterminer la nombre de lampes n pour avoir un éclairement maximal.
Remarque : le résultat précédent peut sembler surprenant, mais l'éclairement ne correspond pas à l'éclairage fourni par la batterie de lampes.

Exercice 3 (5 points)**.** *1) Calculer une primitive sur $]0,+\infty[$ de*
$f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 6 - \dfrac{5}{2x} + \dfrac{1}{x^3}$
$g(x) = \dfrac{6x^2}{x^3+1}$
$h(x) = 5xe^{x^2+1}$
2) Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^1 (4t^3 + 2t - 1)dt.$$

$$J = \int_0^1 \frac{-2}{1+2t}dt.$$

Exercice 4 (4 points)**.** *Les deux questions sont indépendantes.*

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1a) Montrer que A est inversible.
1b) Calculer A^2.
1c) Calculer $A^2 - 3A$.
1d) Calculer A^{-1} en utilisant la question 1c) ou par un calcul direct.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ *et soit* $B = \begin{pmatrix} -17 & 12 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer AB. Que peut-on en déduire pour A ?*

Exercice 5 (4 points)**.** *Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.*
1) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Examen de mat103 (Juin 2018)
Université Grenoble-Alpes
Durée : 2 heures
Documents et calculatrice interdits

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (2 points). *Laure possède 540 bandes dessinées dont 15 pour cent de mangas. Justine, elle, a 250 bandes déssinées dont 24 pour cent de mangas.*
1) Qui possède le plus de mangas ?
2) Quel pourcentage de mangas ont Laure et Justine à elles deux ?
Indications numériques : $540 \times 15 = 8100$, $790 \times 15 = 11850$, $790 \times 24 = 18960$, $250 \times 24 = 6000$, $790/141 \sim 17,8$, $540/15 = 36$, $250/24 \sim 10,41$.

Exercice 2 (4 points). *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations et inéquations suivantes. On précisera dans chaque cas le domaine de définition.*
1) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ *puis* $2x^2 - 5x + 3 > 0$
2) $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{2}{x-1}$
3) $e^x e^{-2x+1} = 1$
4) $\ln(2x-1) + \ln(x) = 0$

Exercice 3 (4 points). *Les deux questions sont indépendantes.*
1) Calculer les dérivées des fonctions suivantes. On précisera dans chaque cas le domaine de définition.

$$f(x) = 3\ln(x^2+1), \; g(x) = 5e^{x^2-3x+1}.$$

2) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction suivante. On ne précisera pas le domaine de définition.

$$f(x, y) = -xy^2$$

Exercice 4 (4 points). *1) Calculer une primitive sur* $]0, +\infty[$ *de*
$f(x) = 6x^3 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^4}$
$g(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$
$h(x) = 6xe^{3x^2+1}$
2) Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^1 (4t^2 + 4t - 2)dt.$$

$$J = \int_0^1 \frac{3}{1+t}dt.$$

Exercice 5 (3 points). *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A *est inversible.*
2) Calculer A^2.
3) Calculer $A^2 - 3A$.

Exercice 6 (3 points). *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_0 = 2$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
1) La suite (u_n) *est-elle arithmétique ? géométrique ?*
2) Soit (v_n) *la suite définie par* $v_n = u_n - 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Démontrer que* (v_n) *est une suite géométrique. En déduire une expression de* v_n *puis de* u_n *en fonction de* n.

Partiel de mat103 (Octobre 2019)
Université Grenoble Alpes
Durée : 1 heure
Documents et calculatrice interdits

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (3 points). *Laure possède 540 bandes dessinées dont 15 pour cent de mangas. Justine, elle, a 250 bandes déssinées dont 24 pour cent de mangas.*
1a) Qui possède le plus de mangas ?
1b) Quel pourcentage de mangas ont Laure et Justine à elles deux ?
(Indications numériques : $141/790 \sim 0,178$, $123/970 \sim 0,12$*).*

Exercice 2 (7 points). *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations et inéquations d'inconnue* x *(sauf mention du contraire). On commencera par préciser le domaine de définition.*

(1) $x^2 - 4x - 12 < 0$, *puis* $x^3 - 4x^2 - 12x < 0$.

(2) $t^2 - 9 = 0$ *(d'inconnue* t*) puis* $e^{2x} - 9 = 0$.

(3) $\ln(x) + \ln(4x) > 2\ln(2)$.

Exercice 3 (7 points). *Calculer la dérivée des fonctions suivantes en précisant d'abord leur domaine de définition.*

(1) $f(x) = 2x^7 - 4x^2 - 3 + 2e^{2x} - 12\ln(x) - 3\sin(4x) - 2\sqrt{x} + \dfrac{2}{3x}$.

(2) $g(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$.

(3) $h(x) = \ln\left(5x^2 + 3e^{2x} + 1\right)$.

Exercice 4 (3 points)**.** *Dans le jardin de Mme et Mr X, une famille d'insectes nocifs double tous les ans. En 2019, il y a 50 insectes. Le jardin devra être traité si le nombre d'insectes atteint 500. Au bout de combien d'années ce traitement devra avoir lieu ? (Indications numériques :* $ln(10)/ln(2) \sim 3,32$*,* $\ln(2)/10 \sim 0,07$*,* $ln(10)/2 \sim 1,15$*)*

Examen de mat103 (Décembre 2019)
Université Grenoble Alpes
Durée : 2 heures
Documents et calculatrice interdits

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)**.** *Les deux questions sont indépendantes.*
1) Calculer les dérivées des fonctions suivantes. On précisera dans chaque cas le domaine de définition.

$$f(x) = 6\ln(3x^2 + 1), \ g(x) = 5e^{x^3-2x-1}.$$

2) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction suivante. On ne précisera pas le domaine de définition.

$$f(x, y) = x^2 - 4xy.$$

Exercice 2 (2 points pour 1), 1 point pour 2))**.** *1) Etudier sur* $]0, +\infty[$ *les variations de la fonction* $f(x) = 3x^2 + \dfrac{3072}{x}$*. Cette fonction admet-elle un minimum sur* $]0, +\infty[$ *?*
2) Une maison a une base carrée et un volume habitable parallélépipédique de 768 m^3*. Le coefficient de perte de chaleur par unité de surface est trois fois plus élevé pour le plafond que pour les murs. On suppose qu'il n'y a pas de perte de chaleur par le plancher. Quelles doivent être les dimensions de la maison pour que la perte de chaleur soit minimale ? Est-ce raisonnable ?*
Indications numériques : $4 \times 768 = 3072$*,* $8^3 = 512$*.*

Exercice 3 (5 points)**.** *1) Soit* $f(x) = \dfrac{3x+1}{x\sqrt{x}}$ *et* $F(x) = \dfrac{3x-1}{\sqrt{x}}$*. La fonction* F *est-elle une primitive de* f *sur* $]0, +\infty[$ *?*
2) Calculer une primitive sur $]0, +\infty[$ *des fonctions suivantes.*
$f(x) = 7x^2 - 6x - e^{2x} + \dfrac{1}{3x} + \sqrt{x}$.
$g(x) = x^2 e^{x^3-6}$.
3) Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^1 (6t^2 - 4t + 1)dt.$$

$$J = \int_0^1 \frac{3t}{1+2t^2} dt.$$

Exercice 4 (5 points)**.** *On considère* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *On pose* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer si possible A^2, $A^2 - A + I$ *(*I *est la matrice identité),* AB *et* BA.
2) La matrice A *est-elle inversible ?*
3) Calculer A^{-1} *si possible. Comment vérifier ce calcul ?*

Exercice 5 (3 points)**.** *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_0 = 2$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
1) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n).
2) Soit (v_n) *la suite définie par* $v_n = u_n - 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Démontrer que* (v_n) *est une suite géométrique. En déduire une expression de* v_n *puis de* u_n *en fonction de* n.

MAT103
Partiel de novembre 2020
Durée : 1h

(Sans calculatrice, sans document)
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (Pourcentage, 4 points) Durant les soldes, un article est vendu 270 euros après une baisse de 10 %.
1) Quel était son prix initial ?
2) Après les soldes, l'article revient à son prix initial. Quel est alors le pourcentage d'augmentation ? (Applications numériques : $\frac{1}{9} \simeq 0,1111.$).
Exercice 2 (Equations/Inéquations, 8 points)
Les quatre questions sont indépendantes.

1) On considère les assertions suivantes (pour $x \in \mathbb{R}$) :
(i) $x > 1$;
(ii) $x^2 \geq 1$.
.
Est-ce que (i) est une condition nécessaire et/ou suffisante de (ii) ?

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 + x - 2 > 0$. En déduire le domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} = 1$ puis $e^x = e^{-x}$.
.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x+2) + \ln(3) = \ln(2)$.

Exercice 3 (Dérivées, 5 points).

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (On précisera l'ensemble de définition).

$$f(x) = x^{12} + 17x^2 - 3x + 4 - \sqrt{x} + 4e^{2x} - \ln(3x) + 3\cos(2x).$$
$$g(x) = 2xe^{2x}.$$
$$h(x) = \frac{\ln(3x)}{2x}.$$

Exercice 4 (Etude de fonction/optimisation, 3 points).
1) Soit la fonction $f(x) = e^{-x}(x-3)$ pour $x \geq 0$. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$. Cette fonction admet-elle un maximum ? Un minimum ?
2) Le nombre $g(t)$ d'individus de pays XYZ varie suivant la loi $g(t) = e^{-t}(t-3)$ où le temps t est donné en dizaine d'années. Le gouvernement du pays XYZ s'inquiète du fait que le nombre d'individus pourrait augmenter infiniment.
Qu'en pensez-vous ?

MAT103 (2020-2021)
Examen de janvier 2021
Durée : 2h
(Sans calculatrice, sans document)
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (4 points)**.** *1) Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on précisera leur domaine de définition) :*

$$f(x) = x^2 e^{3x+1}$$
$$g(x) = \frac{\ln(3x+1)}{x}$$

.
2) Calculer la dérivée seconde de $f(x) = 3\sin(2x)$.
3) Calculer les dérivées partielles premières de $f(x, y) = xe^{3xy}$.

Exercice 2 (4 points)**.** *1) Donner une primitive sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *des fonctions suivantes :*

$$f(x) = 5x^{12} + \cos(3x) + \frac{1}{x^2}$$
$$g(x) = \frac{6x}{x^2+1}.$$

2) Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 te^{2t^2-1}dt$$

3) La fonction $F(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ *est-elle une primitive de* $f(x) = \dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}$ *sur* $]0, +\infty[$ *?*

Exercice 3 (5 points)**.** *1) Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ *. Déterminer si* A *et* B *sont inversibles. Si oui, calculer leur inverse.*
2) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$*. Effectuer si possible les produits* $A.B$ *et* $B.A$*.*
3) On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice identité et on pose* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$*. Calculer* $A^2 - 2A + I$ *et* $(A - I)^2$*. Comparer les deux valeurs obtenues.*

Exercice 4 (3 points)**.** *On considére la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = 1$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2}$.
1) Calculer u_1 *et* u_2*.*
2) La suite (u_n) *est-elle arithmétique ? géométrique ?*
3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 - u_n$*. Démontrer que* (v_n) *est géométrique. En déduire* v_n *puis* u_n *en fonction de* n*.*