Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques

EXERCICES DE MATHEMATIQUES

Semestre 3

Filière MIAS

Ceci est juste une compilation d'exercices de mathématiques à destination d'étudiants de S3 MIAS. Ont été particulièrement "pillés" :

E. Leichtnam et X. Schauer, Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours de Polytecnique et des Ecoles Normales Supérieures, Tomes 3 et 4, Ellipses

J. M. Monier, Cours de mathématiques 2e année MP-PSI-PCI-PT, Tomes 3 et 4, Dunod

J. M. Monier, Exercices corrigés d'analyse 2e année MP, Dunod.

E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, Analyse exercices avec solutions, Tomes 1 et 2, Masson

et pour la partie historique

A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer, Une histoire des mathématiques "Routes et dédales", Collection Points Sciences, Seuil

E. Hairer et G. Wanner, L'analyse au fil de l'histoire, Bibliothèque SCOPOS, Springer

et aussi "Les Mathématiciens" dossier hors-série (janvier 1994) de Pour La Science (réédité chez Belin).

Pour des raisons techniques, les portraits de mathématiciens qui illustrent ce polycopiés ne sont pas dans ce fichier. Merci de me signaler toutes les erreurs et imprécisions (qui ne doivent pas manquer !).

Table des matières

1. Continuité des fonctions de plusieurs variables

Un bref aperçu historique

- On trouve les normes $||.||_p$ et $||.||_\infty$ dans, par exemple, le "Cours d'Analyse" de Jordan (1882). D'autre part, on peut trouver la définition rigoureuse d'ouverts, de fermés et de compacts respectivement dans les oeuvres de Hausdorff (1914), de Cantor (1884) et de Fréchet (1906). Celui-ci n'avait pas tout à fait tort quand il écrivait en 1928 :"*Nous avons déja signalé et nous reconnaitrons dans tout le cours de ce livre l'importance des ensembles compacts. Tous ceux qui ont eu à s'occuper d'analyse générale ont vu qu'il était impossible de s'en passer*" (voir les théorèmes de la fin du chapitre I du cours !).
Cantor a construit dans les années 1880 des "monstres", c'est à dire des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont fermés mais pas ouverts, et qui ne sont pas de "dimension" entière. Sierpinski

a construit vers 1915 des analogues de ces ensembles dans $\mathbb{R}^2$, comme ce que l'on appelle maintenant le tapis de Sierpinski :

- La notion de "suite de Cauchy" a été introduite par ..... Cauchy dans son cours d'analyse algébrique (1821). Cependant, sa preuve du fait que $\mathbb{R}$ est complet est plutot intuitive et ne devient rigoureuse qu'après la construction de $\mathbb{R}$ à partir des rationnels par (indépendamment) Cantor, Heine, Meray et Dedekind (1872).

- L'étude des fonctions de plusieurs variables a son origine dans la géométrie (par exemple l'étude des courbes paramétrées par Leibniz(1694)) ou la physique (comme un des grands problèmes du XVIIIe siècle : l'étude du mouvement des cordes vibrantes).

- Le nom "functio" (fonction) a été proposé par Leibniz et J. Bernoulli (1718). La notation "f(x)" a été introduite par Euler (1734). La définition moderne de la notion de fonction est dûe à Dirichlet (1837) :
Si pour tout x, il existe un unique, fini y .... alors y est appelé une fonction de x ....".
Cauchy (1821) introduit le concept de fonctions continues de la façon suivante :
"$f(x)$ sera fonction continue, si .... les valeurs numériques de la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroit indéfiniment avec celle de α ...."
Bolzano (1817) et surtout Weierstrass (1874) étaient plus précis :
" Ici, on dit qu'une quantité y est une fonction continue de x si, après avoir choisi une quantité ε, on peut montrer l'existence d'un δ tel que, pour toute valeur comprise entre $x_0-\delta...x_0+\delta$, la valeur correspondante de y reste entre $y_0-\varepsilon....y_0+\varepsilon$".

- On attribue à Weierstrass et à son école la définition de la continuité uniforme (1841). Cette notion a permis de clarifier certains points, comme par exemple la continuité des séries de fonctions. Le théorème sur la continuité sur les compacts est dûe à Heine (1872).

Georg Cantor (1845-1918)

Né à Saint-Petersbourg de parents allemands, Cantor fit ses études universitaires d'abord à Zurich, puis à Berlin où Weierstrass fut son professeur. A partir de 1869, Cantor enseigna à l'université de Halle. Il fonda, en 1890, la Société des Mathématiciens Allemands

et devint son premier président ; en 1897, il organisa le premier congrés international des mathématiciens à Zurich. Dès 1884, il souffrit sporadiquement de dépressions profondes et il est mort à la clinique psychiatrique de l'Université de Halle.
C'est à partir d'un problème très particulier sur les séries trigonométriques que se développera son oeuvre majeure, l'élaboration de la théorie des ensembles. Soutenu par Dedekind, Cantor a du endurer une forte opposition de la part de mathématiciens importants comme Kronecker pour lesquels la théorie de Cantor était "monstrueuse"

Dans la suite, on supposera, sauf mention du contraire, que $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne.

Vrai ou faux ?

(a) Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est soit ouvert, soit fermé (considérer le cas $n = 1$, puis $n = 2$).
(b) Il n'existe pas de sous-ensemble propre de $\mathbb{R}^n$ qui soit à la fois ouvert et fermé.
(c) Toute suite convergente de $\mathbb{R}^n$ est une suite de Cauchy.
(d) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f_1 : x \to f(x, 0)$ et $f_2 : y \to f(0, y)$ sont continues en 0, alors f est continue en $(0, 0)$.
(e) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors Ω est compact.
(f) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction et soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Alors, f est bornée sur B.

Topologie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1.1 : Parmi les ensembles suivants, préciser ceux qui sont ouverts, fermés, compacts.
(a) $\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}$; $[0, 1]$; $]0, 1]$; $]-\infty, 1]$, $]1, +\infty[$, $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$.
(b) $]-2, 1[\times[0, 3]$; $[0, 1] \times \{9\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = x^2\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y - x^3 > 0\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy < 1\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a < x < b\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 \geq 1$ et $x^2 + y^2 < 2\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |x| + |y| < 1\}$.

Exercice 1.2 : On définit, pour $x = (x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
||x||_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ (norme } l^1\text{)}, \\
||x||_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (norme } l^2\text{)}, \\
||x||_\infty &= \sup_{i=1,..,n} |x_i| \text{ (norme } l^\infty\text{)}.
\end{aligned}
$$

(a) Montrer que $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
(b) Dessiner dans chaque cas la boule unité (pour $n = 2$).

Exercice 1.3 : Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x + ty|$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner la sphère unité.

Exercice 1.4 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]1, +\infty[$, $q = \dfrac{p}{p-1}$.
(a) Si a et b sont des réels positifs, montrer que

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Si $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(b) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big| \leq ||x||_q ||y||_q.$$

(c) Montrer que $||.||_p$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^n$.
(d) Quelle est la limite de $||x||_p$ lorsque p tends vers $+\infty$?

Exercice 1.5 : Soit I un ensemble au plus dénombrable et soit (O_i) une famille d'ouverts.
(a) Montrer que $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
(b) Que peut-on dire de $\bigcap_{i \in I} O_i$ quand I est fini ? quand I est dénombrable ?
(c) Donner des résultats analogues pour les fermés.

Exercice 1.6 : Soit X un ensemble infini. On pose pour tout $x \in X$, tout $y \in X$, $d(x, y) = 0$ si $x \neq y$ et $d(x, y) = 1$ si $x = y$. Montrer que (X, d) est un espace métrique. Quels en sont les ouverts ? les fermés ?

Exercice 1.7 : Si (x_n) est une suite convergente dans un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$, montrer que la suite $(||x_n||)$ est convergente dans $\mathbb{R}$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 1.8 : On note E l'espace vectoriel des applications $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[0, 1]$ et telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on note $N_1 = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$ et $N_2(f) = \sup_{t \in [0,1]} (|f(t)| + |f'(t)|)$. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 1.9 : Soit ϕ une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, strictement croissante, vérifiant $\phi(0) = 0$ et qui est sous-additive, c'est à dire, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\phi(x + y) \leq \phi(x) + \phi(y)$.
(a) Montrer que si d est une distance sur un ensemble E, alors $\phi \circ d$ en est aussi une.
(b) Montrer que si d est une distance sur E, il en est de même pour $d_1 = \dfrac{d}{1+d}$, $d_2 = \log(1 + d)$ et $d_3 = d^a$ ($0 < a < 1$).

Exercice 1.10 : Trouver les compacts de $\mathbb{R}^{+*}$ muni de la distance $d(x, y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$.

Exercice 1.11 : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On définit l'intérieur de A et l'adhérence de A respectivement par
$\overset{\circ}{A} = \{x \in \mathbb{R}^n;$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A\}$;
$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n;$ pour tout $r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$.
(a) Montrer que $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$.

(b) Montrer que $\overset{\circ}{A}$ est ouvert et que $\overset{\circ}{A} = A$ si et seulement si A est ouvert.
(c) Montrer que $\overline{A}$ est fermé et que $\overline{A} = A$ si et seulement si A est fermé.

Continuité

Remarque : Dans les exercices où on travaille sur un espace vectoriel normé E, on pourra se placer par commodité sur $\mathbb{R}^n$, bien que les résultats restent vrais pour un espace vectoriel normé quelconque.

Exercice 2.1 : Etudier la continuité des applications suivantes :

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0;$$

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ si } (x,y) \neq 0 \text{ et } f(0,0) = 0;$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x - y} \text{ si } x \neq y \text{ et } f(x,x) = 0;$$

$$f(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \text{ et } f(x,0) = 1;$$

$$f(x,y) = \operatorname{th}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) \text{ si } y \neq 0 \text{ et } f(x,0) = 1;$$

$$f(x,y) = e^{x^2 - y} \text{ si } x < y \text{ et } f(x,y) = 1 \text{ si } x \geq y.$$

Exercice 2.2 : Soit E un espace vectoriel normé de norme $||.||$. Montrer que $\forall x \in E$, $\forall y \in E$,

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||.$$

En déduire que l'application $x \to ||x||$ est continue.

Exercice 2.3 : Soient f et g les deux fonctions définies par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \text{ et } g(x,y) = x^y + y^x$$

Montrer que f et g n'ont pas de limite en 0.

Exercice 2.4 : Soit E un espace vectoriel normé et K une partie compacte de E. Considérons $f : K \to K$ telle que, $\forall (x,y) \in K^2$ $(x \neq y)$, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 2.5 : Soit E un espace vectoriel normé et K une partie compacte de E. Considérons $f : K \to K$ telle que, $\forall (x,y) \in K^2$, $d(f(x), f(y)) \geq d(x,y)$. Montrer que f est une isométrie de K sur K.

Exercice 2.6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer qu'on a l'équivalence des propositions.

(1) L'image réciproque par f de tout compact est un compact ;
(2) $\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = \lim_{x \to -\infty} |f(x)| = +\infty$.

Exercice 2.7 : On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et bornées muni de

$$||f||_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f|.$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, et $f \in E$, on note $\tau_a f$ la translatée de f par a. Montrer que si $\{\tau_a f; a \in \mathbb{R}\}$ est une partie compacte de E, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Etudier la réciproque.

Exercice 2.8 : Soient E un espace vectoriel normé, et F et G deux fermés de E tels que $F \cap G = \emptyset$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que

$$F \subset U \quad G \subset V \quad U \cap V = \emptyset$$

Exercice 2.9 : Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$.

(a) Montrer l'équivalence des propositions suivantes.

(1) f n'est pas uniformément continue sur E ;

(2) $\exists \varepsilon > 0\ \exists (x_n), (y_n) \quad | \quad \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Application : Si (x_n) est une suite convergente de E, et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \geq \varepsilon,$$

que peut-on en conclure pour f ?

(b) Montrer que si E est bornée et $f(E)$ non bornée, alors f n'est pas uniformément continue.

Exercice 2.10 : Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues sur $]0, 1[$?

$$\sin x \qquad \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \frac{1}{x} \qquad \tan x.$$

2. Différentiabilité des fonctions de plusieurs variables

Un bref aperçu historique

- Dans le cas des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on peut distinguer trois formulations (équivalentes) pour la différentiabilité (c'est à dire la dérivabilité) :

Formulation de Cauchy (1821) : f est différentiable en x_0 si $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et alors cette limite est $f'(x_0)$.

Formulation de Weierstrass (1861) : f est différentiable en x_0 s'il existe un unique réel noté $f'(x_0)$ et une fonction $r(x)$ continue en x_0, vérifiant $r(x_0) = 0$ tels que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0).$$

Formulation de Caratheodory (1950) : f est différentiable en x_0 s'il existe une fonction ϕ continue en x_0 telle que $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$. Alors, $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

On remarquera que la formulation de Weierstrass est à la base de la théorie de la différentiabilité de fonctions de plusieurs variables.

- La définition usuelle de la différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ apparait dans les oeuvres de Stolz (1887) et Fréchet (1906).

D'après Weierstrass, la notation ∂ pour les dérivées partielles vient de Jacobi (vers 1840).

C. G. J. Jacobi (1804-1851)

Né à Postdam (Allemagne), fils d'un banquier israélite, Jacobi, après avoir soutenu une thèse à l'Université de Berlin, se convertit au christianisme pour pouvoir se faire habiliter. En 1826, il fut appelé à l'Université de Könisberg. L'état de sa santé l'obligea, en 1843, à faire un voyage en Italie. A son retour en 1844, il reprit une chaire à Berlin. Jacobi était membre de l'Académie des Sciences de Berlin. Surtout connu pour sa découverte des fonctions elliptiques et hyperelliptiques, il a aussi publié de nombreux articles sur l'analyse, le calcul des variations et la théorie des nombres. En 1830, dans une lettre à Legendre, il écrivait : "*M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question de système du monde.*"

Vrai ou faux ?

Dans la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction.

(i) Si f admet des dérivées partielles en $a \in \Omega$, alors f est différentiable en a.
(ii) Si f est différentiable et est continue en tout point de Ω, alors f est de classe C^1 sur Ω.
(iii) Si $a \in \Omega$ est un point tel que $Df(a) = 0$, alors f admet un extremum local en a.

Quelques exercices

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = f(\phi(t), \psi(t))$ est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = f(x^2 + y^2)$. Montrer que, pour tout x, tout y dans $\mathbb{R}$, on a

$$y\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$$

.

Exercice 3 : Etudier la continuité et la différentiabilité des fonctions suivantes :

(a) $f(x, y) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

(b) $g(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $g(0,0)=0$.
(c) $h(x,y)=||(x,y)||$ ($||.||$ désigne la norme euclidienne).

Exercice 4 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré α si, pour tout $x\in\mathbb{R}$, tout $y\in\mathbb{R}$, tout $t\in\mathbb{R}^{+*}$,

$$f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y).$$

(a) Montrer qu'une fonction différentiable et homogène de degré α a des dérivées homogènes de degré $\alpha-1$.
(b) Soit f une fonction homogène de degré α et de classe C^1. Montrer que $(*) x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\alpha f$.
(c) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant (*). En étudiant $g(t)=\dfrac{f(tx,ty)}{t^\alpha}$, montrer que f est homogène de degré α.

Exercice 5 : Montrer que :

$$f(x,y,z)=\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\ \text{ et }\ f(0,0,0)=0$$

est continue, admet des dérivées partielles en tout point et n'est pas de classe C^1.

Exercice 6 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(0,0)=0$ et $f(x,y)=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$.
(a) Montrer que f est continument dérivable sur $\mathbb{R}^2$.
(b) f est elle deux fois différentiables sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7 (Les exemples d'Andrei) :
(a) Soit la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ défini par $f(x,y)=1$ si $x\neq0$ et $y\neq0$, et $f(x,y)=0$ sinon. Etudier la continuité de f. Admet-elle des dérivées partielles (d'ordre 1) en $(0,0)$. Conclure.
(b) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=y^2\log(1+\dfrac{x^2}{y^2})$ si $y\neq0$ et $f(x,y)=0$ sinon.
Cette fonction est-elle (sur un domaine de $\mathbb{R}^2$) continue, différentiable, de classe C^1, deux fois différentiables, de classe C^2 ? Calculer les derivées partielles mixtes d'ordre 2 en $(0,0)$ et commenter le résultat du point de vue du théorème de Schwarz.

Exercice 8 (Partiel 96) : Soient $(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}$ et soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\frac{x^py^q}{x^2+y^2}\ \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \text{ et } f(0,0)=0.$$

Pour quelles valeurs de p et q la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? différentiable sur $\mathbb{R}^2$? C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9 (Partiel 95) : Soit $a>0$ et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $\dfrac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^a}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.
1) Quelles sont les valeurs de a possibles si on impose f continue ?
2) On suppose $a=1$. Montrer que f est de classe C^∞.

3) Toujours pour $a = 1$, f est-elle deux fois différentiable en $(0,0)$?

Exercice 10 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy(|x| + |y|)$. f est-elle de classe C^1 ? A-t-on $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?

Exercice 11 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$.
1) Montrer que f possède des dérivées partielles premières en tout point.
2) Montrer que f est différentiable en tout point.
3) Déterminer les points où les dérivées partielles premières sont continues.
4) Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent à l'origine et les calculer.
5) Montrer que les points du type $(0, y_0)$ ne sont ni des maxima ni des minima locaux.
6) Déterminer les points où la différentielle de f est nulle. Que peut-on en déduire à propos des maxima et minima locaux de f ?

Exercice 12 : Donner un DL de
(a) $f(x,y) = x^y$ à l'ordre 2 en $(1,0)$;
(b) $f(x,y,z) = (1+x)^{\frac{1}{2}}(1+y)^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}$ à l'ordre 1 en $(0,0)$;

Exercice 13 : Déterminer les extrema locaux et globaux des applications suivantes :
1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x^3$.
2) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = (x^2 + y^2 - 8)(x^2 + y^2)$.
3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.
4) $i : (\mathbb{R}^{*+})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $i(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
5) $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $j(x,y) = e^{x \sin y}$.

Exercice 14 : Une boite rectangulaire (ouverte en haut) a pour volume 32 cm^2. Trouver les dimensions de la boite pour lesquelles la surface est minimale.

Exercice 15 : Soit $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ si $(x,y) \neq (1,1)$ et $f(1,1) = 0$.
(a) Montrer que f est continue sur $[0,1]^2$.
(b) Déterminer $\sup_{[0,1]^2} f(x,y)$.

Exercice 16 : Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes en utilisant le changement de fonctions ou de variables indiqué (toutes les fonctions sont de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).
1) $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ $(u = x + y,\ v = x + 2y)$.
2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} + 3(x-y)f = 0$ $(u = xy,\ v = x + y,\ x > y)$.
3) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ $(x = u,\ y = uv,\ x > 0)$.
4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial f}{\partial y} - f = 0$ $(g = e^f,\ u = x + y,\ v = x - y)$.

Exercice 17 : Trouver toutes les applications $f : (\mathbb{R}^{*+})^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que, pour tout $x,\ y \in \mathbb{R}^{*+}$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

en utilisant le passage en coordonnées polaires.

Exercice 18 : Soit $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, x+y > 0\}$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \left(x+y, \dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x}\right)$.

(a) Déterminer $f(U)$.

(b) Montrer que f est un C^∞-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

3. Séries numériques

Un bref aperçu historique

La plupart des résultats vus en cours sont dans le cours d'analyse albébrique de Cauchy de 1821. Ce qui lui a valu ce commentaire d'Abel : *"Cauchy est fou, et avec lui il n'y a pas moyen de s'entendre, bien que pour le moment il soit celui qui sait comment les mathématiques doivent être traitées. Ce qu'il fait est excellent, mais très brouillé ......"*

A. L. Cauchy (1789-1857)

Né à Paris, Cauchy, après l'Ecole Polytechnique, passa par l'Ecole des Ponts et Chaussées et participa comme ingénieurs à divers travaux publics. En 1813, il revint à Paris pour enseigner à l'Ecole Polytechnique, à la faculté des Sciences et au Collège de France. En 1816, il fut nommé membre de l'Académie des Sciences. Lors de la révolution de juillet 1830, Cauchy s'éxila à Turin, puis à Prague, où il devint le précepteur du petit-fils de Charles X. En 1838, il retourna en France, reprit son travail à l'Académie et, en 1848, retrouva une chaire à la Sorbonne. Il est à l'origine de la théorie des fonctions de la variable complexe. Pour plus de détails, on pourra consulter la biographie de Cauchy par Bruno Belhoste publié chez Belin.

Vrai ou faux ?

(i) Soit (a_n) une suite à termes positifs. Alors, $\sum a_n$ et $\sum a_n^2$ sont de même nature.
(ii) Pour tout $\alpha > 0$, la série de Riemann $\sum_{n>0} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.
(iii) Pour tout $\alpha > 1$, tout $\beta > 1$, la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\mathrm{Ln} n)^\beta}$ converge.
(iv) Soit (u_n) une série à termes positifs. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et si pour n assez grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
(v) Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réels. Alors, $\sum (u_n + v_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Et que se passe-t-il si les suites sont à termes positifs ?
(vi) Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ pour n assez grand. Alors, si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge.
(vii) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors, $\sum u_n$ converge si et seulement si il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n u_k \leq M$.
(viii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
(ix) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ou nuls. S'il existe $a \in]0, +\infty[$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^a u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.

Quelques exercices

Exercice 1 : Déterminer la nature des séries de terme général suivant :
1) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$;
2) $u_n = \dfrac{1}{2n(n-1)}$;
3) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} e^n$;
4) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + 7\cos n}$;
5) $u_n = \dfrac{1! + 2! + ... + n!}{(n+p)!}$ (suivant la valeur de p) ;
6) $u_n = \dfrac{1}{2^p}$ si $n = 2p$ et $u_n = \dfrac{1}{2^{p+1}}$ si $n = 2p - 1$ (Calculer la somme).
7) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, puis $u_n = \sin \frac{(-1)^n}{n}$.
8) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
9) $u_n = |\sqrt{n^2 + n + 1} - (n^3 + an^2 + cn + d)^{\frac{1}{3}}|$ où a, b et c sont des réels fixés.

Exercice 2 : Déterminer la nature des séries de terme général suivant
1) $u_n = (\log n)^{-\sqrt{n}}$;
2) $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{(\log n)^2}$;
3) $u_n = \left(\mathrm{ch}\dfrac{1}{n}\right)^{-n^3}$;
4) $u_n = \log\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)$;
5) $u_n = n^{-\mathrm{ch}\frac{1}{n}}$;

6) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}$;

7) $u_n = \text{Arcsin}\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right) - \text{Arcsin}\left(\dfrac{n-1}{2n-1}\right)$;

8) $u_n = n^{n^a} - 1$ ($a \in \mathbb{R}$ fixé) ;

9) $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+5}\right)^{n}$;

10) $u_n = \dfrac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$;

11) $u_n = n!\ \Pi_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{1}{2^k}\right)$;

12) $u_n = \left(C_{np}^{n}\right)^{-1}$ (p un entier fixé différent de 0 et 1) ;

13) $u_n = (-1)^n n^{-(1+n^a)}$ ($a \in \mathbb{R}$) ;

14) $u_n = (-1)^n \exp\left(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$;

15) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$;

16) $u_n = \dfrac{(-1)^n \sqrt{n} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;

17) $u_n = (-1)^n \left(\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

18) $\sin\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right)$;

19) $u_n = \dfrac{n^n}{n!e^n}$;

20) $u_n = \dfrac{n^a n! e^n}{(n+1)^n}$ ($a \in \mathbb{R}$).

(pour 19 et 20, on pourra utiliser la formule de Stirling)

Exercice 3 : Déterminer la nature des séries de terme suivant :

1) $u_n = 1 - \int_0^1 (1-t^n)^{\frac{1}{n}} dt$;

2) $u_n = \text{Ln}\left(\cos \dfrac{x}{2^n}\right)$;

3) $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{p=2}^{n} (\text{Ln}p)^2$ où $\alpha > 0$;

4) $u_n = (-1)^n((1+\frac{1}{n})^{-n}) - \frac{1}{e})$;

5) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$;

6) $u_n = \left(\dfrac{1}{p(n)}\right)^{p(n)}$ où $p(n)$ est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n ;

7) $u_n = \Pi_{p=2}^{n} (2-(e)^{\frac{1}{p}})$;

8) $u_n = \sin \pi\sqrt{n^2+1}$;

9) $u_n = \dfrac{(-1)^n \sqrt{n} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{n+(-1)^n}$ ($n > 1$).

10) $u_n = \sin(n!\frac{2\pi}{e})$ puis $v_n = \sin(n!\frac{\pi}{e})$.

Exercice 4 : Soit (a_n) une suite réelle et positive.
1) Que peut-on dire de $\displaystyle\sum_n \frac{a_n}{1+a_n}$ quand $\sum a_n$ converge ? diverge ?
2) Que peut-on dire de $\displaystyle\sum \frac{1}{1+n^2 a_n}$ quand $\sum a_n$ converge et de $\displaystyle\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ quand $\sum a_n$ diverge.

Exercice 5 : Soit E l'ensemble des suites (x_n) de réels vérifiant
(i) $x_0 = 1$;
(ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 < x_k \leq x_{k+1}$;
(iii) La série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{x_n^2}{x_{n+1}}$ est convergente.
1) Montrer que pour toute suite (x_n) de E, la somme $S = \sum u_n$ vérifie $S \geq 4$.
2) Peut-on avoir $S = 4$?

Exercice 6 : Etudier la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{1+2^\alpha + .. + n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 : Soit la série $\sum u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$.
1a) Calculer u_0, u_1 et trouver une relation permettant de calculer les u_n par récurrence.
1b) Trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la nature de $\sum u_n$.
2) Exprimer $\sum u_n$ sous la forme d'une intégrale.

Exercice 8 : Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$ où

1) $u_n = \dfrac{4n-3}{n(n^2-4)}$;
2) $u_n = \dfrac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$;
3) $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$;
4) $u_n = \dfrac{E(\sqrt{n+1})-E(\sqrt{n})}{n}$.

Exercice 9 : Soient (ε_n) une suite à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et (α_n) une suite réelle décroissante. On suppose en outre que la série $\sum_{n\geq 1} \varepsilon_n \alpha_n$ converge.
1) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n)\alpha_n = 0$.
2) Etudier le cas où $\varepsilon_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10 : Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels positifs, divergentes et telles que $a_n \sim b_n$ au voisinage de $+\infty$. On note $A_n = \sum_{k=0}^n a_n$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_n$. Montrer que $A_n \sim B_n$ au voisinage de $+\infty$. Que se passe-t-il si les séries convergent ?

Exercice 11 :
1) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^n k^2 \sin\left(\frac{\theta}{k}\right)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
2) Déterminer un équivalent de $\left(\sum_{k\geq n} \dfrac{1}{k^2}\right)$, puis en donner un développement limité à l'ordre 2.

3) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\right)^{-\frac{1}{2\log n}}$.

4) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\right|^{\frac{1}{\log(\log n))}}$.

Exercice 12 : Donner un équivalent quand $x\to+\infty$ de $\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(x+p)^2}\right)$.

Exercice 13 : Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, tendant vers 0 en décroissant. On suppose que la suite $((\sum_{k=1}^{n}a_k)-na_n)$ est bornée. Montrer que la série $\sum_{n\geq1}a_n$ converge.

Exercice 14 : Etudier la convergence de la série de terme générale $u_n=e^{in\theta}$ où $\theta\in[0,2\pi]$.

Exercice 15 : Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n<1$. Montrer que si la série $\left(\sum_{n\geq1}\frac{u_n}{\mathrm{Ln}(\frac{1}{u_n})}\right)$ converge, il en est de même de la série $\left(\sum_{n\geq2}\frac{u_n}{\mathrm{Ln}n}\right)$.

Exercice 16 :

1) Calculer $\sum_{k\geq1}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ à 10^{-1} près.

2) Majorer l'écart entre $\sum_{k\geq1}\frac{1}{k^3}$ et $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k^3}$.

3) Déterminer une valeur approchée à 10^{-5} de la somme $\sum\frac{k}{3^k}$.

4) On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}$ et soit $S=\lim_{n\to+\infty}S_n$.

4a) Donner un encadrement de $R_n=S-S_n$; Déterminer n tel que $|R_n|\leq10^{-4}$.

4b) Montrer qu'il existe a et b tels que

$$\frac{1}{n^2+1}=\frac{a}{n(n+1)}+\frac{b}{n(n+1)(n+2)}+0\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

4c) Déduire de 4b) une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 17 : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $0<a<1<b$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\alpha_n=E(\log n)$. Comparer les règles de Cauchy et de D'Alembert pour la série de terme général $u_n=a^{n-\alpha_n}b^{\frac{1}{2}\alpha_n(\alpha_n+1)}$.

Exercice 18 :

1) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $\int_{u_n}^{1}\frac{e^t}{t}dt=n$.

2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

3) On note $v_n=n+\log u_n$ ($n\in\mathbb{N}^*$). Etudier la convergence de cette suite. On exprimera sa limite sous la forme d'une intégrale.

4) Quelle est la nature de $\sum u_n$?

Exercice 19 : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On note (pour $n\in\mathbb{N}$) $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$. Montrer que $\sum nu_n$ converge si et seulement si $\sum R_n$ converge, et dans le cas de la convergence, que ces deux séries ont la même somme.

Exercice 20 : Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)^3 u_{n+1} = (n+1)u_n + n.$$

Exercice 21 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{1}{n}$ si n est le carré d'un entier et $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ sinon. Montre que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Exercice 22 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$. Quelle est la nature de $\sum (-1)^n u_n$?

Exercice 23 (Règle de Raabe-Duhamel) :

1) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

2) Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + +o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrer que si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge et que si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
3) Déterminer pour $(a,b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-)^2$ la nature de la série de terme générale

$$u_n = \frac{a(a+1)....(a+n-1)}{b(b+1)....(b+n-1)}.$$

4. Suites et séries de fonctions

Un bref aperçu historique

La convergence des suites ou séries de fonctions n'est pas une notion facile à maitriser, puisque même le grand Cauchy s'est trompé en l'étudiant ! Comme le confirme Abel (1826) : *“ Dans l'ouvrage de Mr Cauchy on trouve le théorème suivant : “ Lorsque les différents termes de la série $u_0 + u_1 + u_2 + ..$ sont des fonctions continues, la somme s de la série est aussi (....) fonction continue de x”. Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série $\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + ...$ est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ de x ...”.* Heine (1870) confirme le flou autour de cette notion après les travaux de Cauchy et Bolzano dans la première moitié du 19e siecle : *“ Jusque récemment on croyait que l'intégrale d'une série convergente (...) est égale à la somme des intégrales des termes de la série, et Mr Weierstrass a été le premier à observer .....”.* Ainsi, on attribue à Weierstrass et à son école la définiton de la convergence uniforme (1841) ainsi que la plupart des théorèmes sur la continuité, la dérivabilité et l'intégrabilité des suites et séries de fonctions (1850-1880).

K. Weierstrass (1815-1897)

Né à Ostenfelde (Allemagne), Weierstrass s'inscrivit en 1834 à l'Université de Bonn, mais la quitta après huit semestres sans avoir passé les examens. Il les passa en 1841 à Münster et enseigna dans plusieurs lycées. En 1854, Il obtint un doctorat honoraire de l'Université de Könisberg, et en 1856, il fut nommé professeur à l'Institut Industriel de Berlin. Professeur associé à l'Université de Berlin depuis 1856, il y occupa une chaire en 1864. Il était membre de l'Académie des Sciences de Berlin depuis 1856. D'après Hermitte, Weierstrass était le grand législateur de l'analyse moderne.

Vrai ou faux

(1) Si (f_n) converge simplement vers f sur $A \subset \mathbb{R}$ et si toutes les fonctions f_n sont continues sur A, alors f est continue sur A (Cauchy, Cours d'analyse, 1821).
(2) Il n'existe pas de suite de fonctions (f_n) continues sur $A \subset \mathbb{R}$ qui converge simplement (et pas uniformément) sur A vers une fonction f continue sur A (on pourra considérer $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, exemple dû à Cantor, 1850).
(3) Si (f_n) est une suite de fonctions croissantes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f sur I, alors f est croissante sur I.
(4) Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Alors,
$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt.$$
(5) Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur $[0,1]$ qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$, alors f est dérivable sur $[0,1]$.

Quelques exercices

Exercice 1 : Etudier la convergence simple, puis uniforme de (f_n) sur I.

(1) $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n}$ et $I = \mathbb{R}$;
(2) $f_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}$ et $I = [0, +\infty[$;
(3) $f_n(x) = \dfrac{\sin^2 nx}{x \sin x}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $f_n(x) = 0$ sinon, et $I = \mathbb{R}$;

(4) $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}$ et $I = \mathbb{R}$;
(5) $f_n(x) = (n-1)x$ si $0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}$ et $f_n(x) = 1-x$ si $\dfrac{1}{n} \leq x \leq 1$, et $I = [0,1]$;
(6) $f_n(x) = \cos\dfrac{nx}{n+1}$ et $I = \mathbb{R}$;
(7) $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$ si $|x| < n$ et $f_n(x) = 0$ sinon, et $I = \mathbb{R}$.
8) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.
9) $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^{2n}}$ sur $\mathbb{R}^+$.
10) $f_n(x) = \sin(\sqrt{x + 4\pi^2 n^2}) - \dfrac{x}{4n\pi}$ sur $\mathbb{R}^+$.
11) $f_n(x) = \dfrac{nx^2 e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.
12) $f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.

Exercice 2 : Soit (f_n) une suite de fonctions bornées qui converge uniformément sur un intervalle I vers une fonction f. Montrer que les fonctions f_n sont uniformément bornées.

Exercice 3 : Soient (f_n) une suite d'applications d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f et si g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$.

Exercice 4 : Soit (f_n) une suite de fonctions uniformément continues sur un intervalle I et qui converge uniformément vers une fonction f sur I. Montrer que f est uniformément continue sur I.

Exercice 5 : Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément sur un intervalle I vers une fonction f. Montrer que la suite $\left(\dfrac{f_n}{1+f_n^2}\right)$ converge uniformément vers $\left(\frac{f}{1+f^2}\right)$ sur I.

Exercice 6 : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On suppose que f n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+$. Soient (f_n) et (g_n) les suites de fonctions définies par $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f\left(\dfrac{x}{n}\right)$.
(1) Montrer que (f_n) et (g_n) convergent simplement vers une même fonction sur $\mathbb{R}^+$. Cette convergence est-elle uniforme ?
(2) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
(3) Soit $a > 0$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et que (g_n) converge uniformément sur $[0, a]$.
(4) Montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction à déterminer.

Exercice 7 : Soit (P_n) définie sur $[-1, 1]$ par

$$P_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}.$$

1) Etudier la convergence de (P_n).
2) En déduire la convergence uniforme de la suite de fonctions (Q_n) définies sur $[-1, 1]$

par $Q_n(x) = \int_0^x P_n(t)dt$.

Exercice 8 : Soit (P_n) une suite de polynômes de degré au plus N. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in [0,1]$, $|P_n(x)| \leq 1$. Montrer qu'il existe une sous-suite de (P_n) qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers un polynôme de degré au plus N.

Exercice 9 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x f(t^n)dt$ si $x \in [0,1]$.

Exercice 10 : On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x + x^n)^n$.
1) Etudier les convergences simples et uniformes de (f_n).
2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \sim \frac{2^{n+1}}{n^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Quelques exemples de suites de fonctions continues dont la limite n'est pas continue

Exercice 11 : Etudier la convergence (simple, uniforme, absolue et normale) des séries de fonctions suivantes.

(1) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ si $x = n$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

(2) $f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

(3) $f_n(x) = (_1)^n \dfrac{n}{n^2 + x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

(4) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ sur $\mathbb{R}^+$ (étudier la dérivabilité de la somme, puis en donner un développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 2).

(5) $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ (Etudier la continuité et la dérivabilité de la somme).

(6) $f_n(x) = \text{Arctan}\dfrac{x}{n^2 + x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$ (Déterminer la limite de la somme en $+\infty$).

(7) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ sur $\mathbb{R}^+$ (Etudier la continuité de la somme).

8) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}(x^n + (1-x)^n)$.

9) $f_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}^+$.

10) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ si $n < x < n+1$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

11) $f_n(x) = \dfrac{1}{n} e^{-(x-n)^2}$.

12) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n n^{-x}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

13) $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$, puis $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$

Exercice 12 : On considère $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$ sur $\mathbb{R}^+$.

1) Etudier la convergence de la série des (f_n).

2) On note S la somme des f_n.

2a) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

2b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{S(x)}{x} = +\infty$. La fonction S est-elle dérivable en 0 ?

2c) Etablir $\lim_{x \to +\infty} S(x) = 0$.

Exercice 13 (Fonction ζ de Riemann) :

On note, pour $x \in]1, +\infty[$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

1) Montrer que $\lim_{x \to 1^+} \zeta(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$.

2) Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et exprimer les dérivées successives de ζ comme somme de séries.

3) Etudier les variations et la convexité de ζ.

4) Tracer la courbe représentative de ζ.

Exercice 14 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| \leq M|x|$ (où M est une constante). On définit, pour tout $n \neq 0$, $f_n(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

1) Etudier la convergence de la série $\sum f_n$.

2) Montrer que la somme est continue sur $[a, b]$.

Exercice 15 : Soit $f_n = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1) Etudier les convergences de $\sum f_n$.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la somme f.
3) Calculer $\int_0^1 t^{n+x-1}dt$; en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$.
4) Montrer que f est décroissante, puis déterminer une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
5) Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 16 : Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients réels convergeant uniformément vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 17 : Etudier la série $\sum_n x^\alpha e^{-n^2 x}$. Donner un équivalent de cette somme quand $x \to 0^+$.

Exercice 18 : Montrer que $x \to \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(2^n x)}{n^n} = f(x)$ est de classe C^∞ et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ diverge pour tout réel $x \neq 0$.

exercice 18 : Etudier la fonction $x \to \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-nx}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 : Prouver que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1}dx = \sum_{n\geq 1} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

Exercice 21 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Ln}t}{t}\mathrm{Ln}(1-t)dt$.

Exercice 22 : Soit $\sum_n f_n$ la série des applications $t \to \dfrac{1}{n+n^2t^2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1) Etudier la convergence et la continuité de la somme f.
2) Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 3 en $+\infty$. Le déterminer.
3) Trouver un développement asymptotique de f au voisinage de 0.

Exercice 23 : Montrer que, pour tout $a \in [0, +\infty[$, tout $x \in]0, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^a t^{x-1}e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^{x+n}}{n!(x+n)}$.

Exercice 24 : Pour la série d'applications $\sum f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$, étudier la convergence (simple, absolue, normale, uniforme) et calculer la somme.

Exercice 25 : On note f_n la fonction définie, si $n \geq 1$, par $f_n(x) = n^x e^{-nx}$ sur $]0, +\infty[$.
a) Etudier les convergences de $\sum f_n$;
b) Soit $S(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$. Montrer que $S_n(x) \sim \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0^+.

Exercice 26 :
a) Etudier les convergences sur $\mathbb{R}^+$ de $\sum f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n}$.
b) On note $S = \sum_{n=1}^\infty f_n$. Montrer que $\lim_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$.

Exercice 27 :

a) Etudier les convergences sur $\mathbb{R}^+$ de $\sum_{n\geq 1} f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x)}$.

b) On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. S est-elle dérivable en 0 à droite ?

Exercice 28 :

a) Etudier les convergences sur $]1, +\infty[$ de $\sum f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$.

b) On note $S = \sum_{n\geq 0} f_n$. Former le développement asymptotique de $S(x)$ à la précision $\dfrac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 29 :

a) Etudier les convergences sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $\sum_{n\geq 1} f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{\text{Ln}(1+nx)}{nx^n}$. On note S sa somme.

b) Montrer que S est continue sur $]1, +\infty[$.

c) Montrer que $\lim_{x\to 1^+} S(x) = +\infty$.

Exercice 30 : Démontrer les égalités suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x(x - \text{Ln}(e^x - 1))dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$ où a, b sont des réels strictement positifs.

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$ où $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^{+*}$.

Weierstrass en train d'expliquer la convergence uniforme à Cauchy qui médite sur le contre-exemple d'Abel (dessin de K. Wanner)

5. Séries entières

Un bref aperçu historique

Niels Abel (1802-1829)

Né à Finnoy, ile norvégienne, Abel fit ses études à l'Université d'Oslo. En 1825, il reçut une bourse du gouvernement et put faire un voyage à Berlin et à Paris. Abel est mort de tuberculose à Froland, en Norvège.
Son chef d'oeuvre est sa démonstration de l'impossibilité de résoudre avec des radicaux l'équation du cinquième degré. Il est le premier à se rendre compte que la limite d'une suite de fonctions continues n'est pas forcément continue, contrairement à ce qu'affirmait Cauchy. On lui doit bon nombre de résultats sur les séries entières (complexes), comme par exemple le "lemme d'Abel".
Sur la vie romanesque d'Abel, on pourra consulter sa biographie par O. Ore chez Belin.

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.
1) $\sum n^n x^n$;
2) $\sum \dfrac{x^n}{n^n}$;
3) $\sum (\mathrm{Ln} n)^2 x^n$;
4) $\sum x^{2n}$;
5) $\sum \dfrac{n!}{n^n} x^n$, puis $\sum \dfrac{(np)!}{(n!)^q} x^n$ (où $p, q \in \mathbb{N}$) ;
6) $\sum (3\alpha^n - 5\beta^n) x^n$ où α et β sont des nombres réels tels que $|\alpha| < |\beta|$;
7) $\sum a_n x^n$ où (a_n) est une suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et pour tout $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.
8) $\sum a_n x^n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2} \right)^n dt$.
9) $\sum \left((n^3 + n^2 + n)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{n^2+1} \right) x^n$.
10) $\sum \dfrac{n^2 + n}{2^n + n!} x^n$.
11) $\sum \dfrac{\ln(\sqrt{n}+1)}{\ln(\sqrt{n}-1)} x^n$.
12) $\sum (e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}}) x^n$.
13) $\sum (\ln(n!))^2 x^n)$.
14) $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 n^n} x^n$.

15) $\sum(\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^3-x-1}dx)x^n$.
16) $\sum(\sqrt{n}+3^{(-1)^n}n)^{-1}x^n$.
17) $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^3 n}{n(n+2)}x^n$.

Exercice 2 :
1) Calculer le rayon de convergence et trouver la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dont les coefficients ont pour valeur $a_n = 3^n$ si n est pair et $a_n = \frac{1}{2^n}$ si n est impair.
2) Même question avec la série entière réelle $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}$, puis $\sum \left(n+\frac{1}{n}\right)x^{2n}$.

Exercice 3 : Déterminer le développement en série entière de $f(x) = \frac{1}{(x+1)(2x+3)}$, et donner son rayon de convergence.

Exercice 4 : Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ des séries entières de rayons de convergence $R > 0$ et $R' > 0$.
a) Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 x^n$?
b) Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n b_n x^n$?
c) Comparer les rayons de convergence des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum S_n x^n$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.
d) Soit c_n définie par $c_{2n} = a_n$ et $c_{2n+1} = 0$. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum c_n x^n$.
e) Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum n a_n x^n$? $\sum n^2 a_n x^n$? $\sum n^d a_n x^n$ (où $d \in \mathbb{N}$) ?
f) Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum k^n a_n x^n$?

Exercice 5 : Donner le développement en série entière en 0 des fonctions réelles suivantes (on précisera le rayon de convergence) :
1) e^x, $(1+x)^\alpha$, $\mathrm{Ln}(1+x)$, $\mathrm{Arctan}x$.
2) $x \to \mathrm{sh}(\mathrm{Arcsin}x)$;
3) $x \to \int_x^1 \frac{1-\cos t}{t}dt$.
4) $x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{sh}(a^n x)$ où $a \in]-1,1[$.
5) $x \to \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}$.
6) $x \to (1+x+x^2+x^3)^{-3}$.
7) $x \to \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 6 : Montrer que l'équation différentielle $4ty'' - 2y' + 9t^2 y = 0$ ($t \in \mathbb{R}$) admet comme solution une série entière dont on déterminera le rayon de convergence.

Exercice 7 : Montrer que l'équation différentielle $xy'' + y' + y = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une solution et une seule développable en série entière en 0 et prenant la valeur 1 en 0.

Exercice 8 : Quel est la rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 2}\left(\ln\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)x^n$? Déterminer la nature de la série pour $x=1$ et $x=-1$.

Exercice 9 : On considère la série entière $\sum_{n\geq 1}\left(\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$, $x\in\mathbb{R}$.
1) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2) Etudier la convergence en R et $-R$.
3) Etudier la continuité de la somme S.
4) Montrer que $\lim_{x\to 1^-}(1-x)S(x)=0$.

Exercice 10 : Etablir les égalités suivantes :
1) si $x\in]-1,1[$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}dt=\pi(\sqrt{1+x}-1)$.
2) $\displaystyle\int_0^1 e^x\ln x dx=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n.n!}$.

Exercice 11 : Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{n!}\sim e^{ex-\frac{1}{2}}$ quand $x\to+\infty$.

Exercice 12 : Soit (λ_n) une suite dans $\mathbb{R}^{+*}$ strictement croissante telle que $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$.
1) Etudier les convergences simple et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ où, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)=(-1)^n e^{-\lambda_n x}$ si $x\in\mathbb{R}^+$.
2) En notant $S=\sum_{n\geq 0}f_n$, montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}S(x)dx$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}S(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n}$

Exercice 13 : De combien de façon peut-on faire 100f avec des pièces de 1f, 5f et 10f ?

6. Séries de Fourier

Un bref aperçu historique

J. B. J. Fourier (1768-1830)

Orphelin à neuf ans, Fourier, en 1789, enseigna à Auxerre, sa ville natale. Arrêté en 1794, puis relaché après l'éxécution de Robespierre, Fourier rejoignit Paris pour entrer à l'Ecole Normale, fondée et fermée la même année. En 1795, Fourier devint assistant à l'Ecole polytechnique, et en 1798, il suivit Monge dans la campagne d'Egypte de Bonaparte. A son retoir en 1801, Napoléon le nomma préfet de l'Isère. Après les Cent-Jours, Fourier fut nommé, grâce à un ami, directeur du bureau des statistiques de la Seine. En 1817, il devint membre de l'Académie des Sciences et son secrétaire perpétuel en 1822 ; il fut élu à l'Académie Française en 1827. Son oeuvre majeure est la création de la théorie de la chaleur qui l'a conduit à la théorie de ce que l'on appelle maintenant les séries et intégrales de Fourier. Il est considéré par certains comme le créateur de la physique mathématique. Pour plus de détails, on pourra consulter la biographie de J. Dhombres et J. B. Robert "Fourier, créateur de la physique-mathématique" (Belin).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et continue par morceaux.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on appelle n-ème coefficient exponentiel de Fourier de f le nombre complexe $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les coefficients trigonométriques de Fourier de f comme étant les nombres réels donnés par

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt \; dt \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt \; dt.$$

On a les relations : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ (ou encore $2c_n = a_n - ib_n$ et $2c_{-n} = a_n + ib_n$).
On appelle série de Fourier de f la série de fonctions $t \to c_0 + \sum_{n\geq 0}(c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int})$.
On définit les sommes partielles de la série de Fourier de f par $S_n(t) = \displaystyle\sum_{p=-n}^{p=+n} c_p e^{ipt}$ ou de manière équivalente $S_n(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{p=1}^{n}(a_p \cos pt + b_p \sin pt)$.
On a alors
<u>Théorème de Parseval :</u> Si f est 2π-périodique, continue par morceaux telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)),$$

alors $\lim_{n\to+\infty} ||f - S_n(f)||_2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t) - S_n(f)(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0$.

<u>Egalité de Parseval :</u> Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème de Parseval,
- La série $|c_0|^2 + \sum_{n\geq 1}(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$ et vaut $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$.
- Si $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, alors la série $\dfrac{a_0^2}{4} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$ converge et vaut $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$.

<u>Théorème de convergence normale :</u> Si f est 2π-périodique, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

<u>Théorème de Dirichlet :</u> Si f est 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $t \to \dfrac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))$.

Pour les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes, vérifier que f est 2π-périodique, continue par morceaux ; Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f ; Etudier la convergence de la série de Fourier de f ; En déduire les sommes indiquées.

1) f 2π-périodique, paire telle que $f(t) = 1$ si $0 \leq t < \dfrac{\pi}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f(t) = -1$ si $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$;

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}, \ \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \ \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$

2) f 2π-périodique, impaire telle que $f(t) = t$ si $0 \leq t < \dfrac{\pi}{2}$ et $f(t) = \pi - t$ si $\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$;

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}, \ \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}.$$

3) f 2π-périodique, paire telle $f(t) = 1 - \dfrac{2t}{\pi}$ si $t \in [0, \pi]$;

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}, \ \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}.$$

4) $f(t) = \sup(0, \sin t)$ pour $t \in \mathbb{R}$;

$$\sum_{p \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}, \ \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}, \ \sum_{p \geq 1} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

7. Espaces de Banach. Espaces de Hilbert

Un bref aperçu historique

David Hilbert (1862-1943)

Né à Könisberg, Hilbert étudia, de 1880 à 1884, à l'Université de sa ville natale (à l'exception d'un semestre qu'il passa à Heidelberg). Il fit un voyage à Lepizitg et Paris, et se qualifia, en 1886, come Privatdozent à l'Université de Könisberg. En 1895, il obtint une chaire à Göttingen qu'il garda jusqu'à sa retraite.

Il a essayé d'axiomatiser les mathématiques et pensait que tout problème de mathématiques doit pouvoir être résolu. Au congrés des mathématiciens de Paris (1990), il a énoncé une liste de 23 problèmes importants (selon lui), dont certains n'ont toujours pas été résolus. Malheureusement pour Hilbert, en 1931, K. Gödel montrait que l'hypothèse du continu (premier problème d'Hilbert) était indécidable et, de manière plus générale, que tout dans système formel existent des propriétés indémontrables.

Quelques Exercices

Exercice 1

1) Soit $E = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). On munit E des normes $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_{+\infty}$. Ces normes sont-elles équivalentes ? E muni de ces normes est-il complet ?

2) On considère les cinq ensembles suivants de suites réelles.
- E_1 est l'ensemble des suites bornées ;
- E_2 est l'ensemble des suites qui convergent vers 0 ;
- E_3 est l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang ;
- E_4 est l'ensemble des suites (u_n) telles que $\sum |u_n| < +\infty$;
- E_5 est l'ensemble des suites (u_n) telles que $\sum u_n^2 < +\infty$.

Vérifier que ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des suites réelles, les comparer pour l'inclusion et donner pour chacun d'eux les différentes normes possibles ($||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$).
Montrer que $(E_1, ||.||_\infty)$ est un espace de Banach de dimension infinie.

3) Soit E l'espace vectoriel formé des suites réelles bornées $u = (u_n)$ telles que $u_0 = 0$. Pour $u \in E$, on pose $N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.
3a) Vérifier que N est une norme sur E.
3b) Montrer que, pour tout $u \in E$, $N(u) \leq 2||u||_\infty$. Montrer que cette inégalité est optimale.
3c) Montrer que les normes N et $||.||_\infty$ ne sont pas équivalentes.

4) On suit les mêmes notations que dans 2). On définit sur E_5 le produit scalaire $< u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. On note $(x^p)_{p\geq 1}$ la suite dans E_5 dont les éléments $x^p = (x_n^p)$ sont donnés par $x_0^p = 0$ et si $n \geq 1$, $x_n^p = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{p}}}$. On note enfin x l'élément de E_5 défini par $x_0 = 0$ et, si $n \geq 1$, $x_n = \dfrac{1}{n}$.
4a) Montrer que $(E_5, < .,. >)$ est un espace de Hilbert.
4b) Montrer que $(x^p)_{p\geq 1}$ converge (quand $p \to +\infty$) vers x dans $(E_5, < .,. >)$.
4c) Montrer que E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel fermé de $(E_5, < .,. >)$.

Exercice 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues. Sur E, on définit

$$\begin{aligned} ||f||_1 &= \int_0^1 |f(t)|dt; \\ ||f||_2 &= \left(\int_0^1 f(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}; \\ ||f||_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|. \end{aligned}$$

1) Vérifier que $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ sont des normes sur E.

2) On note f_n, $n \geq 1$, les fonctions données par :

$$f_n(x) = 2nx \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n},\ f_n(x) = -2nx + 2 \text{ si } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n},\ f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq \frac{1}{n}.$$

Calculer $||f_n||_1$, $||f_n||_2$ et $||f_n||_\infty$. Etudier ensuite l'équivalence des trois normes proposés.

3) E muni de la norme $||.||_\infty$ est-il un espace de Banach ? Même question avec $||.||_2$ et $||.||_1$.

4) Soit F l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in F$, on pose $N(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$. Vérifier que N est une norme sur F et que (F, N) est un espace de Banach. F muni de la norme $||.||_\infty$ est-il un espace de Banach ? N et $||.||_\infty$ sont-elles équivalentes sur F ?

5) Sur E, on définit le produit scalaire $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Pour $\alpha \geq 0$, soit $u_\alpha(t) = t^\alpha$ si $t \in [0,1]$.
5a) A quelle norme est associée $< ., . >$?
5a) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (u_n).
5b) Calculer $||u_\alpha||_2$ et $\lim_{n\to+\infty} ||u_n||_2$. En déduire la limite de la suite (u_n) dans $(E, ||.||_2)$.

Exercice 3

Soit E un ensemble quelconque et soit $(F, ||.||)$ un espace de Banach. On considère B l'espace vectoriel des applications bornées de E dans F, et on pose, pour $f \in B$, $N(f) = \sup_{x\in E} ||f(x)||$.
1) Montrer que (B, N) est un espace de Banach.
2) On suppose que $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$. Soit $G = \{f \in B; \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\}$. Que suffit-il de montrer pour prouver que G est un espace de Banach ? le faire.
3) On suppose que $E = \mathbb{R}^n$. Montrer de même que l'espace des fonctions continues bornées est un espace de Banach.
4) On suppose que $E = F = \mathbb{R}$. Soit C le sous-espace vectoriel de B formé des fonctions bornées de classe C^1. Soit $\sum f_n$ la série de fonctions définie par $f_0(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et, si $n \geq 1$, $f_n(x) = \dfrac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos nx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement vers la fonction $x \to |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. Que peut-on en conclure pour C ?

Exercice 4

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0, \pi]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour $f \in E$, on définit $N(f) = \left(\displaystyle\int_0^\pi f(t)^2 \sin t dt \right)^{\frac{1}{2}}$.
1) Montrer que N est une norme sur E et que cette norme est associée à un produit scalaire que l'on indiquera.
2) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^\pi t^n \sin t dt$. Calculer I_n.
3) Construire une base orthogonale de $V = \text{vect}(t^0, t^1, t^2)$.

Exercice 5

Soit $m \in \mathbb{R}^*$.
1) Montrer que l'ensemble E des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2my' + (1+m^2)y = 0$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que $< f, g > = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{2mx} f(x)g(x)dx$ détermine un produit scalaire sur E et donner une base orthonormée de E.

Exercice 6

1) On considère $R[X]$ muni de $||.||_\infty$. L'endomorphisme qui à P associe P' est-il continu ? Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{R}$, la forme linéaire qui à P associe $P(c)$ est-elle continue ?
2) Soient E l'espace vectoriel complexe des applications bornées sur $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ muni de $||.||_\infty$, $\phi \in E$, T_ϕ une application de E dans E définie par $T_\phi(f) = f\phi$, pour tout $f \in E$. Montrer que T_ϕ est une application linéaire continue et calculer sa norme.
3) Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, T l'application de E dans E définie par $(T(f))(x) = \int_0^x f$ pour tout $f \in E$, tout $x \in [0,1]$. Montrer que T est linéaire et continue, puis calculer sa norme.
4) Soient $E = \mathbb{R}[X]$, T une application de E dans E définie par $T(P) = P'$, et $N : E \to \mathbb{R}^+$ définie par $N(0_E) = 0$ et $N(P) = \sum_{n=0}^{\deg P} \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}$, pour tout $P \in E$. Montrer que N est une norme sur E. L'application T est-elle continue sur (E, N) ? Comparer avec 1).

Exercice 7
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et soit $< .,. >$ le produit scalaire ususelle sur E.

1) Soit $c \in]0,1[$ et soit ϕ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(f) = \int_0^c f$ pour tout $f \in E$.
1a) Montrer que ϕ est une forme linéaire continue sur E. On note $H = \mathrm{Ker}(\phi)$.
1b) Montrer que H est fermé mais que $H^\perp = \{0\}$.
1c) Montrer que $H^{\perp\perp} \neq H$.

2) On note F (respectivement G) le sous-espace de E formé des fonctions nulles sur $[0, \frac{1}{2}]$ (respectivement sur $[\frac{1}{2}, 1]$).
Montrer
2a) $F^\perp = G$ et $G^\perp = F$;
2b) $F^{\perp\perp} = F$ et $F \oplus F^\perp \neq E$;
2c) $(F \cap G)^\perp \neq F^\perp + G^\perp$.

Exercice 8

1) Soit $(H, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $||.||$ est induite par un produit scalaire si et seulement si l'identité du parallélogramme est satisfaite : pour tout $x \in H$, tout $y \in H$, $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ (Théorème de Jordan-Von Neumann).
2) Soit $(H, < .,. >)$ un espace préhilbertien. On note $||.||$ la norme associée. Soient x, y dans H. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $x = ky$ ou $y = kx$;
(ii) $||x+y|| = ||x|| + ||y||$;
(iii) $< x, y > = ||x||.||y||$.
3) Soit $(H, < .,. >)$ un espace préhilbertien (de dimension infinie). Soit (x_n) un ensemble fini orthonormal dans H. Montrer les égalités et inégalités suivantes $(x,\, y \in H)$.
(i) $||x||^2 = \sum_{i=1}^{N} | < x, x_n > |^2 + ||x - \sum_{i=1}^{N} < x, x_n > x_n||^2$.
(ii) $||x||^2 \geq \sum_{i=1}^{N} | < x, x_n > |$ (Inégalité de Bessel).
(iii) $| < x, y > | \leq ||x||.||y||$ (Inégalité de Cauchy-Schwartz).
4) Soit $(H, < .,. >)$ un espace préhilbertien. Soit (x_n) une suite de vecteurs de H. S'il existe $x \in H$ tel que, pour tout $y \in H$, on ait $\lim_{n \to +\infty} < x_n, y > = < x, y >$, alors on dit que x est la limite faible de la suite (x_n).
4a) Montrer que si (x_n) est une suite orthonormale, elle converge faiblement vers 0_H.
4b) Trouver dans $l^2(\mathbb{R})$ une suite qui converge faiblement, mais qui ne converge pas pour la norme $||.||_2$.
4c) Soit $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la base orthonormée canonique de $l^2(\mathbb{R})$. On définit la suite (x_n) de $l^2(\mathbb{R})$ par $x_n = \sum_{j=1}^{+\infty} x^j e_{j+n}$ où x^j est la j-ième composante d'un vecteur fixé $x \in l^2(\mathbb{R})$. Montrer que (x_n) converge faiblement vers le vecteur nulle O_H.
4d) Utiliser 4a) pour montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction f intégrable et 2π périodique convergent vers 0 quand $n \to 0$.

Exercice 9

1) Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$. Montrer que $< P, Q > = \sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i)$ est un produit scalaire sur E. Soit $F = \text{vect}(1, x, x^2)$. Déterminer une base orthonormale de F.

2) Dans l'espace $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire ususel, trouver des bases orthonormales pour le sous-espace F engendré par les vecteurs $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (0,2,3,0)$ et $u_3 = (0,0,4,1)$.