MATHS 110C
CHAPITRE IV : CONTINUITÉ

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème des valeurs intermédiaires. Nous en donnerons des applications à la résolution d'équations du type $f(x) = 0$ et aux fonctions réciproques.

1. Définition et propriétés élémentaires

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est continue en x_0 si f **est définie en** x_0 et $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Nous supposons ici que la fonction est définie dans un intervalle ouvert contenant x_0 (pour pouvoir parler de limite de f en x_0). Si f n'est pas continue en x_0, on dit que f est discontinue en x_0 (ou encore que x_0 est un point de discontinuité de f).
On dit que la fonction f est continue à droite (respectivement à gauche) en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $[x_0, x_0 + \delta[$ avec $\delta > 0$ (respectivement $]x_0 - \delta, x_0]$ avec $\delta > 0$) et que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (respectivement $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$).
Alors, f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.

Exemples.

1) Les fonctions usuelles, à savoir x^m (avec $m \in \mathbb{Z}$), $\ln x$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\sqrt{x}$, sont continues en tout point de leur domaine de définition.

2) Soit la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors, $E(1) = 1$, $\lim_{x \to 1, x<1} E(x) = 0$ et $\lim_{x \to 1, x>1} E(x) = 1$. Donc, la fonction "partie entière" E est continue à droite en 1, mais elle n'est pas continue en 1 (puisqu'elle n'est pas continue à gauche en 1). Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que tous les points de $\mathbb{Z}$ sont des points de discontinuité de E.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Alors, $f(1) = 0$, et $\lim\limits_{x \to 1, x > 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 1) = 0 = \lim\limits_{x \to 1}(x - 1) = \lim\limits_{x \to 1, x < 1} f(x)$. Donc, f est continue à droite et à gauche en 1, donc est continue en 1.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors, d'après les régles sur les limites, nous avons les propriétés suivantes.

(P1) Si f et g sont continues en x_0, alors il en est de même de $f + g$, $\lambda.f$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$), $f.g$.

(P2) Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de x_0 et est continue en x_0.

(P3) Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que f ne soit pas définie en x_0, mais que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et soit égal à l. Alors, nous pouvons définir une nouvelle fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

La fonction g est un prolongement (voir le chapitre 2 pour la définition) de f en x_0 qui est continue en x_0. En effet,

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = l = g(x_0).$$

On dit que g est un prolongment par continuité de f en x_0.

Exemples.

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Alors, f n'est pas définie en 0, mais $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

est un prolongement par continuité de f en 0.
2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(1 + x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comme
$$\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = \lim_{x\to 0, x<0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{e^x - 1}{x},$$
la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$
est un prolongement par continuité de f en 0.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$ si f est définie et continue en tout x_0 de I. On dit que f est continue sur un intervalle fermé $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ si f est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et à gauche en b (Il est difficile d'approcher a et b respectivement par la gauche et par la droite tout en restant dans l'intervalle $[a, b]$, donc de parler de continuité à gauche en a et en b à droite).

Exemple. La fonction “partie entière” est continue sur $]0, 1[$ mais pas sur $[0, 1]$.

2. Continuité et suites

Nous avons vu dans le chapitre sur les limites qu'une suite (u_n) croissante majorée (ou décroissante minorée) converge. Cependant, il n'était pas clair de déterminer la valeur exacte de la limite de (u_n). Le but de ce paragraphe est de résoudre (en partie) ce problème.

Théorème 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en l. Si la suite (u_n) tend vers l, alors la suite $f(u_n)$ tend vers $f(l)$.*

Démonstration. Cette preuve est un exercice de manipulation des ε. Rappelons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ signifie que
$$(1)\ \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in N, (n \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (|u_n - l| \leq \varepsilon),$$
et f continue en l signifie
$$(2)\ \forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \eta(\varepsilon) > 0, \forall x \in D_f, (|x - l| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(l)| \leq \varepsilon).$$
Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Nous cherchons N tel que, si $n \geq N$, $|f(u_n) - f(l)| \leq \varepsilon$. Or, d'après (2), il existe $\eta > 0$ tel que $|x - l| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(l)| \leq \varepsilon$. Il nous suffit donc de trouver un N tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \eta$. Ce qui est possible d'après (1) (prendre $N = N(\eta)$). □

Appliquons ce résultat à une suite définie par la relation de récurrence $(*)$ $u_{n+1} = f(u_n)$. Supposons que
(i) La suite (u_n) converge vers un réel noté l.
(ii) La suite (u_n) est contenue dans un intervalle I (ce qui implique d'après (i) que $l \in I$).
(iii) La fonction f est continue sur l'intervalle I.

Alors, d'après le théorème précédent, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(l)$. Donc, d'après la relation de récurrence (*), l est solution de l'équation $f(l) = l$ (c'est à dire l est un point fixe de f). D'où, si ce point fixe est unique, la suite (u_n) converge vers l.

Remarques. 1) La propriété (ii) ci-dessus est primordiale. Pour la démontrer, on peut vérifier que $u_0 \in I$ et que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$. Puis, on conclue par récurrence. Dans la plupart des exercices, on vous demandera explicitement de démontrer cette propriété.
2) Il se peut que la fonction f ait plusieurs points fixes sur $\mathbb{R}$ (alors que la suite (u_n) a une seule limite!). Dans ce cas, le fait que la limite de la suite est dans I permet en général de déterminer le point fixe qui convient.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n} - 2$. Cette suite est donc définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où la fonction f est de la forme $f(x) = \sqrt{4 + x} - 2$. Il est facile de voir que si $x \geq 0$, $\sqrt{4 + x} - 2 \geq \sqrt{4} - 2 = 0$, et donc $f(x) \geq 0$. Déduisons en par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. En effet, $u_0 = 1$ est bien positif. Supposons que $u_n \geq 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$ d'après la remarque précédente. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+1}$ a le même signe que u_n (Pour le voir, penser à utiliser la quantité conjuguée). Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+1} \geq 0$ (puisque $u_n \geq 0$), soit encore $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Donc, (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée, il en résulte que (u_n) converge. De plus, la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. Donc, d'après le théorème précédent, la limite de (u_n) est un point fixe de f, donc satisfait $f(l) = l$, soit encore

$$l = \sqrt{4 + l} - 2.$$

D'où, l est solution de l'équation $(l+2)^2 = 4+l$, que l'on peut encore écrire $l^2+3l = 0$. Nous espérons que le lecteur vérifiera assez facilement que les solutions de cette équation sont $l_1 = 0$ et $l_2 = -3$. Comme la suite convergente (u_n) est toujours positive, sa limite est 0 (c'est à dire nous pouvons éliminer l'autre limite éventuelle, à savoir -3).

3. Théorème des valeurs intermédiaires

Commençons par le résultat important suivant.

Théorème 2. *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b[$ (et définie en a et b). Si les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signe contraire, alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Attention, le théorème ne donne pas l'unicité du c vérifiant $f(c) = 0$. Nous verrons dans le prochain paragraphe que pour avoir cette unicité, nous avons besoin de la monotonie de la fonction.
Donnons un exemple d'application du théorème 2. Soit $f(x) = x^3 + x^2 - 1$. Alors, $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. Donc, d'après le théorème précédent, il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$f(c) = 0$. En fait, comme f est strictement croissante sur $[0,1]$, c est unique (voir la section suivante). Supposons maintenant que nous souhaitons avoir une valeur approchée de c à 10^{-2} près. Posons a_0=0 et $b_0 = 1$. Soit $m_0 = 1/2$ le milieu de a_0 et b_0. Alors, $f(1/2) = -5/8$. Donc, d'après le théorème 2, $c \in]1/2, 1[$. Posons $a_1 = 1/2$ et $b_1 = 1$. Soit $m_1 = 3/4$ le milieu de a_1 et de b_1. Alors, $f(3/4) < 0$. Donc, d'après le théorème 2, $c \in]3/4, 1[$. Posons $a_2 = 3/4$ et $b_2 = 1$. Soit $m_2 = 7/8$ le milieu de a_2 et de b_2. Calculons son image et ainsi de suite. Nous construisons donc des nombres an et b_n avec $a < a_n < b_n < b$, $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) > 0$. Notre solution c est dans $]a_n, b_n[$. Donc, nous devons nous arrêter quand $|a_n - b_n| \leq 10^{-2}$. A chaque étape, la longueur de l'intervalle est divisé par deux. Donc, $|a_n - b_n| \leq 1/2^n$. Nous nous arrêtons quand $1/2^n \leq 10^{-2}$. Alors, $n = 7$ convient et nous laissons le soin au lecteur de calculer a_7 et b_7. Cette méthode par dichotomie (sur laquelle nous reviendrons plus tard) va nous permettre de démontrer le théorème 2.

Démonstration. Supposons $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. L'idée de la preuve dans le cas général est de poser $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Soit $m_0 = \dfrac{a+b}{2}$ (m_0 est le milieu de a et b), alors

- si $f(m_0) < 0$, on pose $a_1 = m_0$ et $b_1 = b_0 = b$.
- si $f(m_0) > 0$, on pose $a_1 = a_0 = a$ et $b_1 = m_0$.
- si $f(m_0) = 0$, on a gagné et $c = m_0$ convient.

On construit ainsi par récurrence des suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante. Supposons que a_n et b_n ont été construits. Posons $m_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Alors,

- si $f(m_n) < 0$, on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
- si $f(m_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$.
- si $f(m_n) = 0$, on a gagné et $c = m_n$ convient.

Nous gardons ainsi à chaque étape les points dont les images sont de signe contraire. Si nous ne nous arrêtons pas dans cette algorithme (c'est à dire $f(m_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), nous construisons deux suites (a_n) et (b_n) telles que

- (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq a_n \leq b_n \leq b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

Des suites vérifiant ces propriétés sont adjacentes. D'où, elles convergent vers la même limite $c \in [a, b]$. Même si nous avons déja vu ce résultat, reprenons l'argument. La suite (a_n) est croissante, majorée par b, donc elle converge vers une limite notée l. De même, la suite (b_n) est décroissante, minorée par a, donc elle converge vers une limite notée l'. Passons à la limite dans l'inégalité $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Il vient $l' - l = 0$, soit $l' = l$. Notons c la valeur commune. A priori, $c \in [a, b]$, puisque, pout tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq a_n \leq b$. Comme f est continue sur $[a, b]$, il s'en suit, d'après le principal théorème du paragraphe précédent,

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(b_n).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leq 0$, donc $f(c) \leq 0$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(b_n) \geq 0$, donc $f(c) \geq 0$. D'où, $f(c) = 0$. Comme $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$, $c \in]a, b[$ (et non pas $c \in [a, b]$). Ce qui termine la démonstration du théorème 2. $\square$

Du théorème 2, nous allons déduire un des théorèmes importants du cours.

Théorème 3 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b[$ (et définie en a et b avec $f(a) \neq f(b)$)). Alors, pour tout k strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$.*

Ce théorème dit que, si vous êtes en montagne à 2000 mètres d'altitude, et que vous descendez jusque 1000 mètres d'altitude, vous allez passer par toutes les altitudes possibles entre 1000m et 2000m. Ceci est évidemment dû au fait que vous ne vous transmutez pas, c'est à dire que votre trajet est "continu". Graphiquement, la conclusion du théorème dit que, pour tout k strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite d'équation $y = k$ coupe le graphe de f entre a et b.

Démonstration. Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons par exemple que $f(a) < f(b)$. Fixons k strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est à dire $f(a) < k < f(b)$. Définissons une nouvelle fonction g en posant, pour $t \in [a, b]$, $g(t) = f(t) - k$. Alors, $g(a)$ et $g(b)$ sont non nuls et de signe contraire. En effet, $g(a) = f(a) - k < 0$ et $g(b) = f(b) - k > 0$. De plus, la fonction g est continue sur $]a, b[$. Donc, d'après le théorème 2, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$. D'où, $f(c) - k = 0$, puis $f(c) = k$. $\square$

4. Applications du théorème des valeurs intermédiaires

4.1. **Image d'un intervalle par une fonction continue.** Commençons par donner des conséquences non évidentes du théorème des valeurs intermédiaires. Les démonstrations, trop délicates, seront omises.

Théorème 4. *Soit I un intervalle (ouvert, fermé, semi-ouvert) et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Alors, $f(I)$ est un intervalle.*

Rappelons que $f(I) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in I, y = f(x)\}$. Nous ne donnerons pas la preuve de ce résultat. L'idée est qu'un intervalle I est caractérisé par la propriété suivante : Si $x < y$ appartiennent à I, alors tout $z \in [x, y]$ est dans I. Ceci et le thèorème 3 permettent de démontrer le théorème 4.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors, par des considérations élémentaires, nous pouvons voir que l'image par f de $]0, 1[$ est $]0, 1[$, l'image par f de $]-1, 1]$ est $[0, 1]$.

Le dernier exemple montre que I et $f(I)$ n'ont pas forcément même nature. Cependant, nous avons

Théorème 5. *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, la fonction f est bornée et atteint ses bornes.*

Attention, il est important que l'intervalle soit fermé et borné. Pour voir cela, prendre la fonction $f(x) = 1/x$ sur $]0, 1]$ ou $f(x) = x$ sur $[0, +\infty[$. Ces fonctions ne sont pas bornées sur les intervalles considérés.

Explicitons les conclusions du théorème 5 :
– Il existe des réels m et M tels que $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$;
– Il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) = m$ et $x_2 \in [a, b]$ tel que $f(x_2) = M$.
D'où, d'après le théorème 4, l'image de $[a, b]$ est $[m, M]$. Nous avons donc

Théorème 6. *L'image par une fonction continue d'un segment est un segment.*

Rappelons qu'un segment est un intervalle fermé, borné, c'est à dire de la forme $[a, b]$ où $a < b$. En particulier, si de plus f est croissante (respectivement décroissante), alors l'image de $[a, b]$ est $[f(a), f(b)]$ (respectivement $[f(b), f(a)]$.

Notons que les théorèmes de ce paragraphe ne s'utilisent que dans des exercices théoriques (à quelques exceptions près). Dans le cas de fonctions données explicitement, l'image d'un intervalle se calcule "à la main" (reprendre l'exemple de la fonction $f(x) = x^2$ vu au dessus).

Dans les deux prochains paragraphes, nous allons donner des applications qui mettent aussi en jeu la monotonie des fonctions. Nous verrons dans le prochain chapitre que les variations d'une fonction peuvent être étudiées grâce au signe de sa dérivée. Nous admettrons cette propriété à la fin de la liste d'exercices donnée à la fin de ce chapitre. Le lecteur trouvera aussi des exercices d'application des résultats ci-dessus dans le prochain chapitre.

4.2. **Méthode par dichotomie.** Le but de cette section est de présenter une méthode numérique qui permet de donner une valeur approchée des solutions d'équations du type $f(x) = 0$. Cette méthode est inspirée de la démontsration du théorème 2 de ce chapitre (voir aussi la discussion après l'énoncé de ce résultat).

Considérons donc l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a, b]$. Supposons que f soit continue sur $]a, b[$ et que $f(a)$ et $f(b)$ soient non nuls et de signes opposés. Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$. Supposons en outre que f soit (strictement) monotone sur $[a, b]$, alors la solution de l'équation $f(x) = 0$ est unique sur $[a, b]$. En effet, supposons que f soit (par exemple) strictement croissante sur $[a, b]$ et supposons qu'il existe deux solutions $c_1 \neq c_2$ de $f(x) = 0$ dans $[a, b]$. Sans perte de généralité, nous pouvons poser $c_1 < c_2$. Comme f est strictement monotone, il en résulte $f(c_1) < f(c_2)$. Ce qui contredit le fait que $f(c_1) = f(c_2) = 0$. Il y a donc unicité de la solution de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$. Nous avons donc le

Théorème 7. *Soient deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui satisfait*
(i) f est continue sur $]a, b[$;
(ii) f est strictement monotone sur $]a, b[$;
(iii) $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signe contraire.
Alors, il existe un unique $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Nous allons maintenant décrire une méthode qui permet de donner une valeur approchée de la solution c d'une telle équation. L'idée est de construire des suites adjacentes (a_n) et (b_n) comme dans la démonstration du théorème 2.

Considérons par exemple l'équation
$$\frac{1}{3}x^3 - x - 1 = 0.$$
Posons $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x - 1$. Alors, $f(2) = -1/3 < 0$ et $f(3) = 5 > 0$. De plus, f est continue sur $[2, 3]$ et strictement croissante (puisque $f'(x) = x^2 - 1 > 0$ sur $[2, 3]$. Pour la justification, voir le chapitre sur la dérivation). Il existe donc une unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[2, 3]$. Soit c cette solution. Posons $a_0 = 2$ et $b_0 = 3$. Le milieu du segment $[2, 3]$ est $2,5$. Comme $f(2,5) > 0$, c est dans l'intervalle $[2; 2,5]$. Posons donc $a_1 = 2$ et $b_1 = 2,5$. Le milieu du segment $[2; 2,5]$ est $2,25$. Comme $f(2,25) > 0$, c est dans l'intervalle $[2; 2,25]$. Posons donc $a_2 = 2$ et $b_2 = 2,25$. En itérant cette construction, le lecteur pourra voir que $c \in [2,0625; 2,125]$. Il pourra aussi essayer d'obtenir un encadrement de c à 10^{-3} près.

4.3. **Applications réciproques.**

4.3.1. *Bijections.* Soient E, F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Nous rappelons que ceci veut dire qu'à tout $x \in E$, nous associons un UNIQUE élément de F, noté $f(x)$. Le problème qui va nous intéresser dans cette section est de savoir ce qui se passe lorsque nous revenons en arrière, c'est à dire si nous prenons un y dans l'ensemble d'arrivée F, pouvons nous lui associer un UNIQUE x de E tel que $y = f(x)$? En d'autres termes, si nous partons de E vers F par f, est-ce que nous pouvons revenir en arrière ? Ceci n'est pas possible en général. Par exemple, prenons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, il existe des réels qui n'ont pas d'antécédents. C'est le cas pour tous les réels négatifs. En effet si $y \in \mathbb{R}$ avec $y < 0$, chercher un antécédent de y pour f, c'est chercher une solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $y = x^2$. Comme $y < 0$, cette équation n'a pas de solution. Changeons donc l'ensemble d'arrivée et considérons l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, tout élément de l'ensemble d'arrivée a un antécédent par g. On dit que g est une surjection (ou est surjective) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$. Cependant, cet antécédent n'est pas toujours unique. Par exemple, 4 a deux antécédents par g, puisque $g(2) = g(-2) = 4$, et ceci est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ (dans ce cas, les antécédents sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$). Pour avoir l'unicité de l'antécédent (et avoir une application injective ou injection), on doit restreindre l'ensemble de départ à $\mathbb{R}^+$. Ainsi, si nous considérons l'application $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $h(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $h(x) = y$. Nous notons d'habitude $x = \sqrt{y}$. La fonction h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, et la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ qui à y associe $\sqrt{y}$ est la fonction réciproque de h et se note h^{-1}.

On dit que l'application $f : E \to F$ est une bijection de E dans F si tout élément $y \in F$ admet un unique antécédent dans E. Nous pouvons alors associer à tout élément y de F son unique antécédent. Cette application s'appelle l'application réciproque de f, et se note f^{-1}. Ainsi, $f^{-1} : F \to E$ tel que, pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y) = x$ si et seulement si $y = f(x)$. De ceci, il découle

$$\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x;$$
$$\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y.$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est l'application dans $\mathbb{R}$ définie par $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$.

4.3.2. *Cas des fonctions monotones continues.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Nous avons vu que $f(I)$ est un intervalle. Rappelons que $f(I) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in I, y = f(x)\}$. Donc, tout élément de $f(I)$ a un antécédent. Si nous supposons de plus que f est strictement monotone sur I, alors pour tout $y \in f(I)$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Ceci se démontre par l'absurde (Voir la démonstration du théorème 7). Donc, f est une bijection de I dans $f(I)$. En fait, nous avons le résultat suivant.

Théorème 8. *Une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une bijection de I sur $f(I)$. Son application réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ (et à valeurs dans I) et est de même monotonie que f.*

Attention, ici, l'intervalle I est quelconque (voir les exemples ci-dessous).

Démonstration. Supposons que f soit strictement croissante. La première partie du théorème a été expliquée avant son énoncé. Montrons la monotonie de f^{-1}. Soient y_1, y_2 des éléments de $f(I)$ tels que $y_1 < y_2$. Alors, $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ où, x_1, x_2 sont dans I. Comme f est croissante, $x_1 < x_2$ (sinon, $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$).

Donc, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ (puisque $x_i = f^{-1}(y_i)$ pour $i = 1, 2$). La continuité de f^{-1} est plus délicate et sera admise. $\square$

Remarque. Soit f une bijection de I dans $f(I)$. Alors, $G_f = \{(x, f(x)); x \in I\}$ et $G_{f^{-1}} = \{(x, f^{-1}(x)); x \in f(I)\}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple 1 : Fonctions "racine" et "puisance"

Soit $m \in \mathbb{N}$. Vous pouvez, pour fixer les idées, reprendre ce que nous allons voir dans cette section dans le cas $m = 2$. Considérons la fonction $f(x) = x^m$. Cette fonction est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. D'où, $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$, puisque f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $f(0) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Comme f est aussi continue sur $[0, +\infty[$, nous pouvons appliquer le théorème 8 et conclure que f est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque définie, continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On note cette fonction réciproque $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{m}}$. Dans le cas $m = 2$, cette fonction est la fonction racine carrée.

Exemple 2 : Fonctions "logarithme" et "exponentielle"

Considérons la fonction "logarithme népérien" $f(x) = \ln x$. Alors, f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Donc, d'après le théorème 8, f est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, et elle admet une bijection réciproque f^{-1} qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs dans $]0, +\infty[$). Cette fonction est la fonction exponentielle et se note e^x. D'après les propriétés générales des applications réciproques vues précédemment,

$$\ln(e^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x, \forall x \in]0, +\infty[.$$

Voir le chapitre 2 pour d'autres propriétés des fonctions logarithme et exponentielle.

5. Un bref aperçu historique

Pour Euler, une fonction est dite continue sur un intervalle si elle est définie sur cet intervalle par une unique "expression analytique". Ainsi, la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x$ pour $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $f(x) = 1 - x$ pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ n'est pas continue au sens d'Euler, mais elle est continue au sens moderne !

Cauchy (1821) introduit le concept de fonctions continues de la façon suivante :
"$f(x)$ sera fonction continue, si .... les valeurs numériques de la différence $f(x+\alpha) - f(x)$ décroit indéfiniment avec celle de α ...."
Bolzano (1817) et surtout Weierstrass (1874) étaient plus précis :
" Ici, on dit qu'une quantité y est une fonction continue de x si, après avoir choisi une quantité ε, on peut montrer l'existence d'un δ tel que, pour toute valeur comprise

entre $x_0 - \delta ... x_0 + \delta$, la valeur correspondante de y reste entre $y_0 - \varepsilon .... y_0 + \varepsilon$".

Le théorème des valeurs intermédiaires a été utilisé par Euler et Gauss sans qu'une preuve rigoureuse de ce résultat ait été donnée, comme le dit Lagrange en 1807 *"Ce théorème est connu depuis longtemps"*. Une première preuve (presque) rigoureuse a été donnée par Bolzano (1817).

Le théorème "Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes" est appelé "Hauptlehrsatz" (Théorème principal) dans les lectures de Weierstrass de 1861 et a été publié par Cantor (1870).

6. Quelques exercices sur la continuité

6.1. **Questions de cours.** Après avoir revu votre cours, répondre aux questions suivantes.

Vrai ou faux ?

(1) La fonction f dont le graphe est de la forme

est continue en 0.

(2) La fonction "partie entière" est continue sur $\mathbb{R}$.

(3) Toute fonction continue sur $]-1, 2]$ est bornée sur $]-1, 2]$.

(4) Toute fonction bornée sur $[2, 3]$ est continue sur $[2, 3]$.

(5) Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(1/n) = 0$.

(6) La fonction $f : x \to x^2$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

(7) La fonction $f(x) = 3x + 1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{3}$.

Retour sur les théorèmes du cours
Les énoncés suivants sont-ils corrects ? Si la réponse est non, les corriger.

(1) Si f est définie et strictement croissante sur $[a, b]$ avec $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe un unique $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

(2) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

(3) Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est bornée sur I et atteint ses bornes.

(4) Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f est une bijection de I sur $f(I)$.

Exemple de raisonnement
Le raisonnement suivant est-il correct ?

Soit $f(x) = x^5 + 4x - 1$. Alors, la fonction f est continue sur $[0, 1]$, $f(0) = -1$ et $f(1) = 4$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = 2$.

6.2. **Quelques exercices.**

Exercice 1. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq |x|.$$

(1) *Interpréter graphiquement cette condition.*
(2) *Montrer que f est continue en* 0.
(3) *Donner un ou plusieurs exemples d'une telle fonction.*

Exercice 2. (1) *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x} - 1}{x} \ \textit{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 1} \ \textit{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en 0 *?*

(2) *Soit g la fonction définie par :*

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x - 1} \ \textit{si } 0 < x < 1 \\ 2 \ \textit{si } x = 1 \\ \dfrac{x + 1}{3x - 1} \ \textit{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La fonction g est-elle continue en 1 *?*

Exercice 3. *Les fonctions suivantes sont toutes définies sur* $]0,1[$. *Pour chacune d'elles, déterminer le prolongement par continuité en* 0 *et en* 1 *s'il existe :*

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \ ; \ g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$$

Exercice 4. *1) Soit* f *la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

Quel est son ensemble de définition ? Montrer que f *est prolongeable par continuité en* 0.
2) Même question avec $f(x) = x\sin(1/x)$.

Exercice 5. *Déterminer la valeur du réel* a *pour que la fonction* f *définie ci-dessous soit prolongeable par continuité en* 0.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} & si\ x < 0 \\ \dfrac{\ln(1+3x)}{2x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

Exercice 6. *Soit* f *la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{1-\cos(\sin x)}$$

Étudier son ensemble de définition, et les éventuels prolongements par continuité. Donner l'allure de la courbe représentative.

Exercice 7. *Etudier le prolongement par continuité en* 0 *de la fonction* f *définie sur* $]-1,0[\cup]0,1[$ *par* $f(x) = \dfrac{x^2 + \mid x \mid}{x^2 - \mid x \mid}$.

Exercice 8. *Montrer que les équations suivantes ont une solution dans l'intervalle* I.

(i) $x^7 - x^2 + 1 = 0$, $I = [-2,0]$.
(ii) $\sqrt{x^3+6x+1} - 2 = 0$ *et* $I = [0,+\infty[$.
(iii) $\cos 2x = 2\sin x - 2$ *et* $I = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 9.

(1) *Montrer que l'équation* $x^{17} = x^{11} + 1$ *admet au moins une solution dans* $\mathbb{R}^+$.

(2) *Montrer que, si* P *un polynôme réel de degré impair, il admet au moins une racine réelle.*

Exercice 10. *Soit* n *un entier naturel. Montrer que l'équation*

$$x^2(\cos x)^n + x\sin x + 1 = 0$$

admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11. *Nous dirons qu'une fonction f vérifie la condition (C) si f est continue sur $[0,2]$ avec $f(0)=2$, $f(1)=0$ et $f(2)=4$.*
1) Tracer des graphes de fonctions f qui satisfont la condition (C). Donner explicitement l'expression d'une fonction qui satisfait la condition (C).
2a) Soit une fonction f qui satisfait la condition (C). Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet au moins deux solutions.
2b) Tracer des graphes de fonctions f qui satisfont la condition (C) et pour lequelles l'équation $f(x)=1$ admet exactement deux solutions. Donner explicitement l'expression d'une fonction qui satisfait la condition (C) et pour laquelle l'équation $f(x)=1$ admet exactement deux solutions.
3) Pour une fonction f qui vérifie la condition (C), discuter, suivant les valeurs de $m\in\mathbb{R}$, du nombre minimal de solutions de l'équation $f(x)=m$.
4a) Une fonction f qui vérifie la condition (C) est-elle bijective sur $[0,2]$?
4b) Tracer des graphes de fonctions f qui satisfont la condition (C) et qui sont bijectives sur un intervalle $J\subset I$. Donner explicitement l'expression d'une fonction qui satisfait la condition (C) et qui est bijective sur un intervalle $J\subset I$.

Exercice 12. *Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$ et qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0,1]$. Montrer qu'il existe un réel α tel que $f(\alpha)=\alpha$. (Un tel réel est appelé* ***point fixe****). Indication : utiliser la fonction définie par :*

$$g(x)=f(x)-x$$

Exercice 13. *En une heure, un randonneur parcourt 6 km. On admet que la fonction f où $f(x)$ désigne le nombre de kilomètres parcourus en x heure ($x\in[0,1]$) est continue sur $[0,1]$. En considérant la fonction g définie sur $[0,\frac{1}{2}]$ par $g(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$, montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel le randonneur parcourt 3 km.*

Exercice 14. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, et admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 15.
(1) *Démontrer que la fonction réciproque d'une fonction impaire est impaire.*
(2) *Pourquoi ne peut-on pas parler de la fonction réciproque d'une fonction paire ?*

Exercice 16. *Soit f la fonction définie par $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$. Montrer que f est continue, bijective et déterminer sa réciproque f^{-1}.*

Exercice 17. *On appelle « logarithme décimal » une fonction, notée* $\log$, *proportionnelle à la fonction « logarithme népérien » (notée* $\ln$*) et telle que* $\log 10=1$.

(1) *Montrer que*

$$\forall x>0,\ \log x=\frac{\ln x}{\ln 10}$$

(2) *Soit $x>1$ trouver une relation entre le nombre de chiffres de x et la partie entière de $\log x$.*

(3) *Soit $x < 1$, trouver une relation entre le nombre des zéros initiaux de x et la partie entière de $\log x$.*

(4) *Déterminer, si elle existe, la fonction réciproque de* log.

Dans les exercices suivants, on pourra utiliser (si besoin est) le résultat suivant : Si la fonction f est dérivable sur l'intervalle I avec $f'(x) > 0$ (respectivement $f'(x) < 0$) pour tout $x \in I$ (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I. Voir le prochain chapitre pour une justification.

Exercice 18. *Déterminer $f(I)$ dans les cas suivants.*

$$f(x) = \sin x \text{ et } I = [-\pi/4; \pi/4];$$
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \text{ et } I =]-\infty, -1].$$

Exercice 19. *Démontrer que f est une bijection de l'intervalle I sur un intervalle à préciser dans les cas suivants.*

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 \text{ et } I = [0, 2];$$
$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 3x} \text{ et } I = [-2, -1].$$

Exercice 20. *Donner le nombre de solutions des équations suivantes et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune des racines.*

$$x^3 + 8x - 12 = 0;$$
$$x(2x+1)^2 = 5.$$

Exercice 21. *Déterminer le nombre de solutions de l'équation $\ln x = mx$ selon les valeurs du paramètre réel m.*

Exercice 22. *1) Démontrer que l'équation $x = e^{-x^2}$ admet une unique solution sur $[0, \infty[$. Cette équation a-t-elle des solutions sur $]-\infty, 0]$?*
2) Démontrer que l'équation $x \ln x = 1$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

Exercice 23. *1) Soit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ sur $I =]0, +\infty]$.*
1a) Représenter f.
1b) Donner l'image de I par f.
1c) Donner le nombre de solutions sur I de l'équation $f(x) = 1$. Donner un encadrement des solutions.
1d) Discuter suivant la valeur de paramètre m le nombre de solutions sur I de l'équation $f(x) = m$.
2) Mêmes questions avec $f(x) = f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$ et $I = [0, \pi/6[$.

Exercice 24. *Soit $f(x) = x^3 + x + 1$. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de cette solution d'amplitude 10^{-2} (par exemple, par dichotomie).*

Exercice 25. *Soit la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = 1$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 1$. *Etudier graphiquement la suite* (u_n). *Démontrer vos conjectures.*

Exercice 26. *Soit la suite* $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$ *et* $u_0 \in \mathbb{R}$. *Etudier graphiquement la convergence de* (u_n) *suivant les valeurs de* u_0, *puis retrouver ces résultats "par le raisonnement".*

Exercice 27. *On pose* $f(x) = \frac{1}{2}x(x^2 - 3x + 4)$. *Soit la suite* (u_n) *définie par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
1) Quelles sont les limites possibles de (u_n) *?*
2) Etudier graphiquement la suite (u_n).
3) Supposons que $1 < u_0 < 2$.
3a) Etudier les variations de (u_n) *(on pourra étudier le signe de* $f(x) - x$*).*
3b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 2[$.
3c) Conclure.
4) Etudier les autres cas (pour u_0*).*

Exercice 28. *Soit* (u_n) *la suite définie par* $0 < u_0 < 2\pi$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \sin u_n$. *Montrer que* $\lim_{n \to +\infty} u_n = \pi$.

Exercice 29. *Soit la suite* (u_n) *définie par* $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ *et* $u_0 \in \mathbb{R}$.
1) Faire une étude graphique de la suite (u_n).
2) Etudier la monotonie de la suite (u_n) *et trouver sa limite éventuelle.*
3) Montrer que si $-1 \leq u_0 \leq 0$, *tous les* u_n *sont encore compris entre* -1 *et* 0. *Conclure.*
4) Montrer que si $u_0 < -1$ *ou si* $u_0 > 0$, *tous les* u_n *sont strictement positifs à partir de* $n = 1$. *Conclure.*