MATHS 110C
CHAPITRE III : NOTIONS DE LIMITES

Nous allons dans ce chapitre reprendre ce qui a été vu au lycée sur les limites de suites et de fonctions. La seule vraie nouveauté sera la définition rigoureuse de la notion de limite (dite “définition avec des ε”).

1. Limites de fonctions

1.1. **Retour sur les définitions du lycée.** Nous allons dans ce paragraphe redéfinir les limites vues au lycée à l'aide des quantificateurs.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in \mathbb{R}$. Que signifie $\lim_{x \to a} f(x) = 0$? Intuitivement, cela signifie que $f(x)$ devient proche de 0 dès que x est suffisamment proche de a. Nous supposerons ici que la fonction f est définie au voisinage de a (c'est à dire sur un intervalle ouvert contenant a), sauf peut-être en a, et donc qu'il est possible de se “rapprocher” de a tout en restant dans le domaine de définition D_f de la fonction. Ainsi, si $f(x) = \ln x$, il serait curieux d'étudier $\lim_{x \to -1} f(x)$ puisque $f(x)$ n'existe pas pour des x arbitrairement proches de -1. D'un autre côté, si $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, f n'est pas définie en 0, mais au voisinage de 0. Nous verrons plus tard que la limite de f en 0 existe et vaut 1.

Dans le livre de 1re S de la collection Terracher (Hachette), il est écrit.
L'écriture $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *traduit le comportement suivant : un réel positif étant arbitrairement choisi, et ce aussi petit que l'on veut, alors toutes les valeurs* $|f(x)|$ *sont plus petites que ce réel, dès que* x *est assez proche de* a.
Nous pouvons réécrire cette phrase de la façon suivante : *Pour tout réel positif, si* x *est assez proche de* a*, alors* $|f(x)|$ *est plus petit que ce réel.*
En utilisant les quantificateurs vus au chapitre 1, nous pouvons formaliser cette définition. Ainsi, on dit que f tend vers 0 quand x tend vers a, ce que l'on écrit $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, (|x - a| \leq \eta) \Longrightarrow (|f(x)| \leq \varepsilon).$$

De même, on dit que f tend vers l quand x tend vers a, ce que l'on écrit $\lim_{x \to a} f(x) = l$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, (|x - a| \leq \eta) \Longrightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

Nous avons juste écrit que $\lim_{x \to a}(f(x) - l) = 0$ en utilisant la première définition. Il est important de voir que η dépend de ε et nous le noterons souvent $\eta(\varepsilon)$.

Exemple. Il est bien connu que, si $f(x) = x^2$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Retrouvons ce résultat à l'aide de la définition précédente. Soit $\varepsilon > 0$. Nous cherchons $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que $|x| \leq \eta(\varepsilon) \Longrightarrow (|f(x)| \leq \varepsilon)$. Or, ceci est vrai si $\eta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$. Nous voyons ici que η est bien une fonction de ε et que cete fonction tend vers 0 avec ε.

Remarque. Contrairement à ce que nous avons fait dans l'exemple précédent, nous n'utiliserons la définition de la limite “avec des ε” que dans des exercices théoriques. Dans les calculs pratiques de limite (voir la fin du paragraphe), nous utiliserons les limites connues et les règles sur les limites qui seront données dans la suite.

Montrons l'unicité (si elle existe) de la limite. Ceci parait évident intuitivement, mais se démontre facilement à partir de notre définition. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a} f(x) = l'$ avec $l \neq l'$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{4}|l - l'|$. Comme $l \neq l'$, $\varepsilon > 0$. Donc, d'après la définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(|x - a| \leq \eta) \Longrightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon)$ et il existe $\eta' > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(|x - a| \leq \eta') \Longrightarrow (|f(x) - l'| \leq \varepsilon)$. Choisissons $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|x_0 - a| \leq \eta$ et $|x_0 - a| \leq \eta'$. Alors, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|l - l'| \leq |l - f(x_0)| + |f(x_0) - l'| \leq \varepsilon + \varepsilon = \frac{|l - l'|}{2}.$$

Ce qui est absurde, donc $l = l'$.

Insistons sur le fait que la limite de f en a peut exister sans que a n'appartienne au domaine de définition de f. Ainsi, il a été vu au lycée que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Considérons maintenant une autre limite vue au lycée, à savoir $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Intuitivement, ceci signifie que $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut, dés que x est suffisamment proche de a. Dans un livre de lycée, ceci se formalise par :
Un réel étant arbitrairement choisi et ce, aussi grand que l'on veut, toutes les valeurs de $f(x)$ dépasse ce réel, dès que x est assez proche de a .
Ceci se traduit aussi par : *Pour tout réel positif A, si x est assez proche de a, $f(x)$ est supérieur à A.*

Utilisons maintenant des quantificateurs. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a, ce que l'on note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, (|x - a| \leq \eta) \Longrightarrow (f(x) \geq A).$$

De même, on dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a, ce que l'on note $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, si

$$\forall B < 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, (|x - a| \leq \eta) \Longrightarrow (f(x) \leq B).$$

Insistons sur le fait que dans les deux définitions, le η est une fonction de A et de B respectivement.

Attention, toute fonction f n'a pas toujours de limite (finie ou non) en a. Par exemple, la fonction $x \to \sin \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. Nous allons voir dans la suite (exemple 2 ci-dessous) un exemple de fonction définie en 1, mais qui n'a pas de limite (finie ou non) en 1.

Nous parlerons de limite à gauche (respectivement à droite), que l'on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ (respectivement $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$) en a, quand on considère $f_{|]-\infty,a]}$ (respectivement $f_{|[a,+\infty[}$), où $f_{|]-\infty,a]}$ désigne la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, a]$. Par exemple, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ signifie que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in D_f, (0 \leq x - a \leq \eta) \Longrightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

De même, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ signifie que

$$\forall A > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in D_f, (-\eta \leq x - a \leq 0) \Longrightarrow (f(x) \geq A).$$

En d'autres termes, pour la limite à droite (respectivement à gauche), nous faisons tendre x vers a en ne considérant que les x supérieurs à a (respectivement les x inférieurs à a). On note souvent $f^+(a)$ ou $f_d(a)$ (respectivement $f^-(a)$ ou $f_g(a)$) la limite à droite (respectivement à gauche) de f en a (si elle existe). Il est clair que f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à gauche et à droite en a et $f^+(a) = f^-(a)$ (et alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ est égale à cette valeur commune).

Exemple 1.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \text{ si } x < 1 \\ 4x - 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

Alors, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x + 1) = 3$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (4x - 1) = 3$. Donc, f a une limite en 1 et celle-ci vaut 3.

Exemple 2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 \text{ si } x < 1 \\ 3x^3 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

Alors, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - 3) = -2$ alors que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (3x^3) = 3$. Donc, f n'a pas de limite en 1 (et pourtant f est définie en 1 !).

Nous étudierons la limite à droite et à gauche quand nous aurons une limite de la forme $\frac{1}{0}$ (voir les exemples de calculs de limites à la fin du paragraphe).

Passons maintenant aux limites aux infinis. Nous supposerons ici que $f(x)$ est définie sur des intervalles de la forme $]x_0, +\infty[$ ou $]-\infty, x_0[$ suivant que l'on s'intéresse à $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ signifie que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l, dès que x est assez grand. On dit que f tend vers l quand x tend vers $+\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D_f, (x \geq A) \Longrightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

Le A est donc une fonction de ε.
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, dès que x est assez petit. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \exists B < 0, \forall x \in D_f, (x \leq B) \Longrightarrow (f(x) \geq A).$$

Donnons rapidement les définitions des limites restantes.

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f, (x \geq B) \Longrightarrow (f(x) \geq A).$$

On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A < 0, \exists B < 0, \forall x \in D_f, (x \leq B) \Longrightarrow (f(x) \leq A).$$

Insistons encore sur le fait que le B est une fonction de A (c'est à dire dépend de A).

1.2. **Opérations sur les limites.** Dans la suite, quand nous parlerons de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, nous supposerons toujours que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de x_0, c'est à dire sur un intervalle de la forme $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ $(\delta > 0)$ sauf peut-être en x_0 si x_0 est fini, sur un intervalle de la forme $I =]-\infty, B[$ si $x_0 = -\infty$, sur un intervalle de la forme $I =]A, +\infty[$ si $x_0 = +\infty$.

1.2.1. *Somme.* Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ (où x_0, l et l' sont finis ou non).
On a alors

	$l' \in \mathbb{R}$	$l' = +\infty$	$l' = -\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$l = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$l = -\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Dans ce tableau, " ?" signifie que l'on a une forme indéterminée. Attention, deux fonctions f et g peuvent ne pas avoir de limite en x_0, alors que $f + g$ en a une en x_0. On pourra, pour s'en convaincre, considérer le cas de $f(x) = \sin x$ et $g(x) = -\sin x$ en $x_0 = +\infty$. Nous verrons dans la suite des méthodes pour lever des indéterminations.

Montrons, à l'aide de la définition donnée dans la section précédente que si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ avec x_0, l, l' finis, alors $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = l+l'$. Rappelons les définitions de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \eta_f(\varepsilon) > 0, \forall x \in D_f, (|x - x_0| \leq \eta) \Longrightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \eta_g(\varepsilon) > 0, \forall x \in D_g, (|x - x_0| \leq \eta) \Longrightarrow (|g(x) - l'| \leq \varepsilon).$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Nous cherchons $\eta > 0$ tel que $(|x - x_0| \leq \eta) \Longrightarrow (|(f + g)(x) - l - l'| \leq \varepsilon)$. Prenons $\eta = \min\left(\eta_f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \eta_g\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$. Alors, si $|x - x_0| \leq \eta$, $|x - x_0| \leq \eta_f\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, donc $|f(x) - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, et $|x - x_0| \leq \eta_g\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, donc $|g(x) - l'| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Nous en déduisons que si $|x - x_0| \leq \eta$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|(f+g)(x) - l - l'| = |(f(x) - l) + (g(x) - l')| \leq |f(x) - l| + |g(x) - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui est ce que l'on cherchait. Donc, $\lim\limits_{x\to x_0} (f + g)(x) = l + l'$.

Toutes les propriétés sur les limites que nous verrons dans ce paragraphe peuvent se démontrer de cette façon. Nous n'avons pas le temps de le faire, nous le laissons donc au lecteur à titre d'exercice (pas toujours facile!!!!).

1.2.2. *Produit.* Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ (où x_0, l et l' sont finis ou non).
On a alors

	$l' > 0$	$l' = 0$	$l' < 0$	$l' = +\infty$	$l' = -\infty$
$l > 0$	ll'	0	ll'	$+\infty$	$-\infty$
$l = 0$	0	0	0	?	?
$l < 0$	ll'	0	ll'	$-\infty$	$+\infty$
$l = +\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$l = -\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Dans ce tableau, “ ?” signifie que l'on a une forme indéterminée. Attention, deux fonctions f et g peuvent ne pas avoir de limite en x_0, alors que fg en a une en x_0 (voir le cas traité dans la section suivante de $\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$). On verra dans la suite des méthodes pour lever des indéterminations.

1.2.3. *Inverse-Quotient.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ avec $l \neq 0$. Alors, $\dfrac{1}{f}$ est définie au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$ (avec la convention $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$). Dans le cas où $l = 0$, on étudie le signe de $f(x)$ au voisisnage de x_0 .

Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$. Si $x > 2$, $x^2 - 4 > 0$. Donc, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.
De ceci et des régles sur le produit, on déduit aisément les règles sur le quotient.

1.2.4. *Composition.* Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to l} g(x) = l'$ (où x_0, l et l' sont finis ou non). Alors, $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = l'$.

Exemple. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

1.2.5. *Théorème d'encadrement.* Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fonctions définies dans un voisinage I de x_0 et telles que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \le g(x) \le h(x).$$

Alors, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$. Comme précédemment, x_0 et l sont finis ou infinis. Notons que si $l = +\infty$ (respectivement $l = -\infty$), nous pouvons conclure seulement grâce à l'inégalité de gauche (respectivement de droite).

Exemples. (a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$. Pour cela, notons que pour $x > 0$,

$$\frac{-1}{\sqrt{x}} \le \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$. D'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0$.
(b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ est l'unique entier tel que $E(x) \le x < E(x) + 1$. Nous en déduisons que pour $x > 0$, $E(x) > x - 1$. D'où, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} E(x) = +\infty$. Voir le paragraphe sur la continuité pour plus de détails sur la fonction "partie entière".

1.3. **Calculs pratiques de limites.**

1.3.1. *Quelques limites à connaitre.* Commençons par rappeller une liste de limites classiques (en 0) vues au lycée.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2};\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Notons que, à part la deuxième, toutes ces limites sont des calculs de nombre dérivé en 0 (voir le chapitre sur la dérivation).

Rappelons maintenant les principales règles sur les puissances comparées.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$. De même, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ (en particulier, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ pout tout $\alpha \in \mathbb{R}$). En changeant x en $-x$, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = 0$.

Si α, β sont des réels strictement positifs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ et (en changeant x en $\dfrac{1}{x}$) $\lim\limits_{x\to0^+} x^\beta (\ln x)^\alpha = 0$.

1.3.2. *Exemples.* Calculons $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ dans les cas suivants.

(a) $x_0 = 0^+$ et $f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} - \sqrt{\dfrac{1}{x}}$.
En multipliant par la quantité conjuguée le numérateur et le dénominateur, nous obtenons, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}}.$$

D'où, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

(b) $x_0 = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{e^{2x} - x^2}{4\ln x + 5}$.
L'idée est de mettre en haut et en bas le facteur "le plus grand" au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{x^2}{e^{2x}}\right)}{4\ln x\left(1 + \frac{5}{4\ln x}\right)}.$$

En utilisant les règles de croissance comparée, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{4\ln x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{4\ln x} = 0.$$

D'où, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

(c) $x_0 = 0$ et $f(x) = \dfrac{(1-\cos 3x)(\sin 4x)}{x^3}$.
Commençons par voir que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{4x} = 1$. En effet, nous avons vu que $\lim\limits_{u\to0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$. En posant $u = 4x$ et en utilisant le théorème sur la composition, nous pouvons conclure. De même, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos 3x}{(3x)^2} = \dfrac{1}{2}$.

Afin d'utiliser ces remarques, écrivons

$$f(x) = \frac{1}{x^3}\left(\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\right)(3x)^2\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)(4x) = 36\left(\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\right)\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right).$$

Comme $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1$, il vient $\lim_{x \to x_0} f(x) = 18$.

1.4. **Asymptotes.** Nous allons dans ce paragraphe donner des interprétations graphiques de certaines limites. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $\lim_{x \to a} f(x) = +/-\infty$, nous dirons que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f. Ce qui donne graphiquement :

Nous dirons que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ (respectivement $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$). Ce qui donne graphiquement :

En particulier, si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ (respectivement $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$) avec $l \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Remarques.

1) La courbe représentative d'une fonction f n'a pas obligatoirement des asymptotes (verticales ou horizontales). Par exemple, considérer le cas de $f(x) = x^2$.

2) La courbe représentative d'une fonction f peut avoir des asymptotes différentes en $+\infty$ et $-\infty$. Par exemple, considérer le cas de $f(x) = |x|$. Les asymptotes au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ sont d'équation $y = x$ et $y = -x$ respectivement.

Exemple. Soit $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$. Le lecteur pourra vérifier que $\lim_{x \to +\infty} f(x)/x = 1$, puis que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -1$. Donc, la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$. En fait, pour tout $x \neq -1$,

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}.$$

Si $x > -1$, $f(x) - (x-1) = 4/(x+1) > 0$, donc le graphe de f est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$. Le lecteur pourra vérifier que la même droite est aussi asymptote au voisinage de $-\infty$, mais qu'elle est alors au dessus du graphe de f. Ce qui donne :

2. Convergence de suites

Nous allons dans ce paragraphe reprendre en partie ce que nous avons vu pour les fonctions. Nous verrons aussi comment la monotonie d'une suite peut entrainer sa convergence.

2.1. **Limites de suites.** L'observation-clé est que, pour une suite (u_n), la seule limite intéréssante est quand n tend vers $+\infty$. D'où, pour définir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $+\infty$ ou $-\infty$, nous devons nous inspirer des définitions données précédemment de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, $+\infty$ ou $-\infty$. Le seul léger changement est que comme la variable n prend des valeurs entières, nous allons remplacer le "$\exists A > 0$" par "$\exists N \in \mathbb{N}$". Ce qui nous obligera à prendre des valeurs entières (voir les exemples plus bas).

Appliquons ces idées. Nous dirons que la suite (u_n) tend vers l (ou encore converge vers l), ce que nous notons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Longrightarrow (|u_n - l| \leq \varepsilon).$$

Nous dirons dans ce cas que la suite (u_n) est convergente. Dans le cas contraire, nous dirons que la suite est divergente. Une telle suite peut soit tendre vers un des infinis, soit ne pas avoir de limite (considérer $u_n = (-1)^n$). Comme précédemment, l'entier N est une fonction de ε (que nous noterons souvent $N(\varepsilon)$).

Exemple. Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Observons que "u_n s'approche arbitrairement près de 0 quand n est suffisamment grand". Ce que vous avez traduit en terminale par $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Vérifions que ceci est cohérent avec notre définition et pour cela, notons que pour tout $\varepsilon > 0$, $u_n < \varepsilon$ dès que $n > 1/\varepsilon$. Donc, $N(\varepsilon) = E(1/\varepsilon) + 1$ convient (où $E(.)$ désigne la partie entière). Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que $N(\varepsilon) = E(1/\varepsilon) + 13$ ou $N(\varepsilon) = E(1/\varepsilon) + 211$ conviennent aussi.

Donnons quelques propriétés qui découlent de la définition. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ $(l \in \mathbb{R})$ alors cette limite est unique. De plus, la suite (u_n) est bornée.
Notons que si (u_n) converge vers l et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou tout au moins pour n assez grand), $A \leq u_n \leq B$, alors $A \leq l \leq B$. Attention, des inégalités strictes deviennent à la limite des inégalités larges. Reprenons l'exemple $u_n = 1/n$. Pour $n > 0$, $u_n > 0$. Pourtant, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Afin de manipuler la définition de la limite avec des ε, montrons que toute suite convergente est bornée. Pour cela, considérons une suite (u_n) qui tend vers l $(l \in \mathbb{R})$. Rappelons que ceci signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Longrightarrow (|u_n - l| \leq \varepsilon).$$

Choisissons arbitrairement $\varepsilon = 1$ (le lecteur pourra choisir $\varepsilon = \pi$ ou $\varepsilon = \sqrt{2}$, cela ne changera rien à notre argument. Le point-clé est de fixer de façon définitive la valeur de ε). D'après la définition de la convergence de la suite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| \leq 1$. D'après l'inégalité triangulaire, nous en déduisons que, si $n \geq N$,

$$(1)\ |u_n| \leq |u_n - l| + |l| \leq 1 + |l|.$$

Nous avons réussi à majorer tous les u_n, pour $n \geq N$, par $1 + |l|$. Les autres éléments de la suite, à savoir $u_0, \ldots, u_{N-1}$, sont en nombre fini. Donc, $M = \max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|)$ existe et pour tout $j = 0, 1, \ldots, N-1$,

$$(2)\ |u_j| \leq M.$$

Nous déduisons de (1) et (2) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \max(1 + |l|, M).$$

Donc, la suite (u_n) est bornée.
Attention ! La réciproque est fausse, c'est à dire une suite peut-être bornée sans être

convergente. Pensez à la suite $u_n = (-1)^n$ (Voir plus bas).

La suite (u_n) tend vers $+\infty$, ce que nous notons $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \exists N > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Longrightarrow (u_n \geq A).$$

Insistons sur la fait que le N dépend de A.
Exemple. Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Observons que "u_n devient arbitrairement grand quand n est suffisamment grand". Ce que vous avez traduit en terminale par $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Soit $A > 0$. Alors, $u_n = n^2 > A$ des que $n > \sqrt{A}$. Donc, $N(A) = E\left(\sqrt{A}\right) + 1$ convient.

Par analogie, nous dirons que la suite (u_n) tend vers $-\infty$, ce que nous notons $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, si

$$\forall B < 0, \exists N > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Longrightarrow (u_n \leq B).$$

Là encore, le N dépend de B.

2.2. **Croissances comparées.** Commençons par considérer la suite géométrique $u_n = a^n$ de raison $a \in \mathbb{R}$. A quelles conditions cette suite est-elle convergente ? Si $a = 1$, la suite (u_n) est constante et vaut 1. Elle converge donc vers 1. Si $a = -1$, la suite vaut alternativement $+1$ ou -1 suivant que n est pair ou impair. Dans ce cas, la suite (u_n) n'a pas de limite. Ceci reste vrai si $a < -1$. Dans le cas où $a > 1$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$. Enfin, si $|a| < 1$, la suite (u_n) converge vers 0.
Considérons maintenant la somme $S_n = 1 + a + ... + a^{n-1}$ des n premiers termes de la suite géométrique de raison a. Nous savons que

$$S_n = \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

Donc, si $|a| < 1$, d'après la discussion précédente, $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1/(1 - a)$. Avec ceci, le lecteur vérifiera que, si

$$T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n},$$

alors $\lim_{n \to +\infty} T_n = 1$. Ce que nous pouvons encore écrire :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} ...$$

Cette série apparait implicitement dans un des célèbres paradoxes de Zénon d'Elée (deuxième moitié du 5 ème siècle avant JC), à savoir le paradoxe d'Achille et la tortue. Ainsi, Achille fait une course avec la tortue. Comme il est beau joueur (et un peu chambreur), il laisse de l'avance à celle-ci. Quand Achille parcourt la distance qui le sépare du point de départ de la tortue, cette dernière a aussi avancé. Alors qu'Achille parcourt la nouvelle distance qui le sépare de son adversaire, la tortue a avancé et donc reste devant, etc. Donc, Achille ne peut pas rattraper la tortue!!!!! Une autre façon d'énoncer ce paradoxe est de dire qu'un mobile se déplacant le long d'une droite d'une distance d doit parcourir la moité de la distance, puis la moitié de cette moitié,... Zénon se rendait compte que ceci signifie que

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \cdots$$

Mais, le concept de limite à l'époque est flou et il ne comprend pas intuitivement ce que signifie cette somme. En particulier, ce qui gène Zénon et ses comtemporains, c'est que la somme d'une infinité de termes (de plus en plus petits) puisse être finie.

Les suites de termes générales $\ln n$ et n^α (où $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$) tendent vers $+\infty$. Les théorèmes sur les croissances comparées disent que, pour tout $\alpha > 0$ et $a > 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0 \ , \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

Exemples.
1) Soit (u_n) la suite de terme générale

$$u_n = \frac{4e^n - 2n}{7n^2 + 3\ln n}.$$

Mettons en facteur au numérateur et au dénominateur le terme dominant (suivant les règles de croissances comparées). Nous obtenons donc

$$u_n = \frac{4e^n \left(1 - \frac{2n}{4e^n}\right)}{7n^2 \left(1 + \frac{3\ln n}{7n^2}\right)}.$$

Or, d'après les règles précédentes,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{4e^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3\ln n}{7n^2} = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \frac{4e^n}{7n^2} = +\infty.$$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2) Soit (u_n) la suite de terme générale

$$u_n = \frac{2^n + 3n}{5e^n - 5\ln n}.$$

Le lecteur se souvient certainement que $2^n = e^{n.\ln 2}$. Mettons en facteur au numérateur et au dénominateur le terme dominant (suivant les règles de croissances comparées). Nous obtenons donc

$$u_n = \frac{2^n \left(1 + \frac{3n}{2^n}\right)}{5e^n \left(1 + \frac{-5\ln n}{5e^n}\right)}.$$

Or, d'après les règles précédentes,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n}{2^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-5\ln n}{5e^n} = 0.$$

De plus, comme $\ln 2 < 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{e^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{n.\ln 2}}{e^n} = \lim_{n \to +\infty} e^{n(\ln 2 - 1)} = 0.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2.3. **Théorèmes de comparaison.** Donnons quelques règles de comparaison qui se démontrent à partir des définitions.

Régle 1. Nous supposons ici que (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou pour n assez grand), $u_n \leq v_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$. De ceci, il découle que si $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou pour tout n assez grand), alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}^+$. Notons que réciproquement, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l > 0$ ou si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $u_n \geq 0$ pour n assez grand.

Régle 2. Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou pour n assez grand) et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$ (avec $l \in \mathbb{R}$), alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$. Ceci découle de la règle 1.

Supposons que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou pour n asssez grand). Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
Exemple. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + ... + \frac{n}{n^2+n}.$$

Notons que u_n est la somme de n termes, le plus petit est $\frac{n}{n^2+n}$, le plus grand est $\frac{n}{n^2+1}$. Nous en déduisons l'encadrement :

$$n.\frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq n.\frac{n}{n^2+1}.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$. Donc, d'après la règle 2, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2.4. **Opérations sur les limites.** Supposons que (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$ (avec l, l' finis ou non). Alors, la convergence de la somme $(u_n + v_n)$ est donnée par le tableau suivant

	$l' \in \mathbb{R}$	$l' = +\infty$	$l' = -\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$l = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$l = -\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

La convergence du produit $(u_n v_n)$ est donnée par le tableau suivant

	$l'>0$	$l'=0$	$l'<0$	$l'=+\infty$	$l'=-\infty$
$l>0$	ll'	0	ll'	$+\infty$	$-\infty$
$l=0$	0	0	0	?	?
$l<0$	ll'	0	ll'	$-\infty$	$+\infty$
$l=+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$l=-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Notons que si (u_n) est une suite tendant vers 0 et que (v_n) est une suite bornée (qui peut ne pas converger), alors le produit $(u_n v_n)$ tend vers 0. Par exemple, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Ceci découle de la régle 2 du paragraphe précédent.

Si (u_n) converge vers $l \neq 0$, alors la suite $(1/u_n)$ tend vers $1/l$. De même, si (u_n) tend vers $+/-\infty$, alors la suite $(1/u_n)$ tend vers 0. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et si (u_n) est une suite positive (respectivement négative), alors la suite $(1/u_n)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$). Pour les règles sur le quotient, il suffit d'utiliser celles sur le produit et celles sur l'inverse.

2.5. **Convergence et monotonie.** Nous allons maintenant donner une condition qui assure la convergence d'une suite.

Théorème 1. *Toute suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée) converge.*

Le côté surprenant de ce résultat est qu'il nous permet de démontrer que la suite converge, mais il ne donne pas la valeur de la limite ! Voyons sur un exemple comment la déterminer.

Exemple. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1/2$ et pour tout $n \in N$, par

$$(*)\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{2}.$$

Nous avons vu, dans le paragraphe sur les suites dans le chapitre 2, que cette suite est croissante et majorée. Donc, elle converge. Notons l sa limite. Nous allons essayer de déterminer l. Pour cela, notons que la suite (u_{n+1}) tend vers l et la suite $(1/2\ u_n^2 + 1/2)$ tend vers $(1/2)l^2 + (1/2)$. D'où, en passant à la limite dans la relation de récurrence $(*)$, nous obtenons que l est solution de l'équation

$$l = \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{2}.$$

Le lecteur vérifiera aisément que l'unique solution de cette équation est $l = 1$. Donc, (u_n) converge vers 1. Nous étudierons de façon plus systématique ce type de suite dans le chapitre sur la continuité.

La démonstration du théorème est omise, car trop difficile. Elle repose sur la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ qui est que tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Terminons par une application classique. Nous dirons que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si elles satisfont

(i) (u_n) est croissante alors que (v_n) est décroissante.
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Proposition 2. *Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.*

Démonstration. Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant (i), (ii) et (iii). Pour tout n, d'après (ii), $u_n \leq v_n$ et comme (v_n) est décroissante, $v_n \leq v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_0$. Donc, (u_n) est majorée par v_0. Comme (u_n) est croissante, il en résulte que (u_n) converge. Notons l sa limite. Le même argument montre que (v_n) est minorée par u_0 et donc converge (puique décroissante). Notons l' sa limite. Nous en déduisons que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = l - l'$. D'après (iii), il vient $l = l'$. $\square$

Exemple. Moyennes arithmétique et géométrique.
Soient $0 < a < b$ des réels. Nous pouvons vérifier que les suites (u_n) et (v_n) déterminées par

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$
$$v_0 = b \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

sont bien définies. Par hypothèse, $u_0 \leq v_0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2}{2}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
Etudions les variations des suites. Comme $v_n \geq u_n$, il vient

$$\frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{2v_n}{2}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$ et la suite (v_n) est décroissante. De même, comme $v_n \geq u_n$, $\sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n^2}$ et donc $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où, (u_n) est croissante.
Terminons par écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n + 2u_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2}.$$

Or, comme $u_n \leq v_n$, $2u_n - 2\sqrt{u_n v_n} \leq 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

Par récurrence, il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a - b).$$

D'où, par le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Elles convergent donc et ont même limite.

2.6. **Retour sur les modèles d'évolution de populations.** Rappelons que le modèle malthusien est donné par l'équation (Voir chapitre 2)

$$N_{n+1} = N_n F(N_n)$$

où $F(N_n) = R_0 S(N_n)$. Ici, S est le coefficient de survie et R_0 le nombre moyen de progénitures par individu. Posons $f(N_n) = N_n F(N_n)$. Alors, l'équation de Malthus devient $N_{n+1} = f(N_n)$. Une méthode pour classifier les différents modèles avec ou sans compétition est de regarder le comportement à l'infini de F (ou de f). Supposons par exemple que $F(N)$ se comporte comme c/N^b (où c est une constante positive) quand $N \to +\infty$. Le cas $b = 1$ correspond à un modèle avec compensation exacte (à l'infini), c'est à dire naissances et décés se compensent exactement à l'infini. On tend alors vers un équilibre (dans la mesure où $\lim_{n\to+\infty} N_n = c$). Les cas $0 < b < 1$ et $b > 1$ correspondent respectivement à des modèles avec sous-compensation et sur-compensation. Notons que dans ces cas, le nombre d'individus tend respectivement vers 0 et vers $+\infty$. Nous retrouvons ce genre de comportement dans l'équation d'Hassel

$$N_{n+1} = f(N_n) = \frac{R_0 N_n}{(1 + aN_n)^b}$$

où les paramètres sont $R_0 > 0$, $a > 0$ et $b \geq 0$. Ce modèle est relativement bien adapté pour étudier certaines populations d'insectes (dans la mesure où il est en accord avec les données expérimentales).

3. Un bref aperçu historique

Une des plus vastes tentatives, avant le dix-neuvième siècle, pour donner à l'analyse des bases rigoureuses est celle de Lagrange dans son livre "Théorie des fonctions analytiques" (1797). Il écrit ainsi, dans la préface, qu'un de ses buts est *"de débarrasser le calcul différentiel des considérations métaphysiques d'infiniments petits ou de quantités évanouissantes"* (voir le chapitre sur la dérivation).
Cependant, il ne pouvait pas se passer de la notion de limite, qui n'était pas rigoureuseument définie à cette époque. Il conclut d'ailleurs sa préface par cette phrase très pessimiste :*" (il) reste peu de moyens de faire de grands progrès avec l'analyse dans l'état actuel où elle se trouve".*
Comme nous allons le voir au cours de ce semestre, les mathématiciens du siècle suivant comme Cauchy ou Weierstrass vont démentir ces propos.

D'Alembert définissait la notion de limite de la façon suivante dans le tome 9 de l'Encyclopédie (1765) : "*On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près qu'une grandeur donnée, si petite qu'on puisse la supposer*". Notons que cette définition est proche de celle donnée au lycée. Une définition plus rigoureuse est donnée par Cauchy dans son "Cours d'analyse algébrique" (1821), on lui doit aussi la notation *lim*. Le formalisme moderne avec les ε viendra après les travaux de Weierstrass et de son école dans les années 1860-1880.

4. Quelques exercices sur les fonctions et les les limites

4.1. **Questions de cours.** Après avoir revu votre cours, répondre aux questions suivantes.

Retour sur les définitions

(1) La proposition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0 \text{ tel que pour tout } x \in D_f, |x - x_0| \leq \varepsilon \Rightarrow f(x) > A_\varepsilon$$

est-elle la traduction mathématique de $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$? Si la réponse est non, donner la proposition correcte.

(2) Reconnaitre la limite donnée par

$$\forall B < 0, \exists A_B > 0 \text{ tel que pour tout } x \in D_f, x > A_B \Rightarrow f(x) < B.$$

(3) Rappeler la définition de $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, puis de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$. En utilisant ces définitions, démontrer que $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ où $f(x) = x^2 - 1$, puis que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$ où $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Vrai ou faux ?

(1) Toute suite bornée converge.

(2) Toute suite tendant vers $+\infty$ est bornée.

(3) La suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{-n^2+1}$ diverge.

(4) Si la suite de terme général $|u_n|$ tend vers $+\infty$, alors la suite de terme général u_n tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

4.2. **Quelques exercices.**

Exercice 1. *1) Calculer les limites (si elles existent) en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions f suivantes :*

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-5}; \ f(x) = \frac{3x^2+5x+1}{-2x^2+3x+5}; \ f(x) = \frac{-x^2+5}{6x-4}.$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{3x^2}; \ f(x) = \frac{\mathbf{E}(x)}{x}; \ f(x) = \frac{\cos x + 2}{x}.$$

$$f(x)=\frac{e^{2x}+4x}{5x^3-6x};\ f(x)=\frac{4x+\cos x}{1-5x^2};\ f(x)=\frac{e^{-x}+6x^2}{5x-4}.$$

2) Calculer les limites (si elles existent) en $+\infty$ des fonctions f suivantes :

$$f(x)=\frac{\ln x+5x^2}{x+1};\ f(x)=\frac{4x+\ln x^2}{e^{5x}-6\ln x};\ f(x)=e^{\frac{\ln x}{4x}}.$$

3) Calculer les limites (si elles existent) en 0 des fonctions f suivantes :

$$f(x)=\frac{1-x}{x};\ f(x)=\frac{-x-1}{6x^2},\ f(x)=\frac{x^2-3x+5}{-x}.$$

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{4x};\ f(x)=\frac{\ln(1+2x^2)}{3x^2};\ f(x)=\frac{\cos x-1}{6x^2};\ f(x)=\frac{\ln(1+2x)\sin(3x)}{1-\cos x}.$$

$$f(x)=\frac{1}{\sin x};\ f(x)=\frac{1}{(\sin x)^2};\ f(x)=\frac{1}{\sin(x^2)}.$$

4) Calculer les limites (si elles existent) en 1 des fonctions f suivantes :

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-1};\ f(x)=\frac{3x-2}{x^2-1};\ f(x)=\frac{6x^3-3}{(x-1)^2};\ f(x)=\frac{3x+2}{(x-1)^3}.$$

5) Calculer les limites (si elles existent) en $\pi/2$ des fonctions f suivantes :

$$f(x)=(\tan x)^2;\ f(x)=\frac{1}{tan4x}.$$

Exercice 2. *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{1-x^7},\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4},\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}},\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1},\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\frac{1}{2}}{4\cos^2 x-3}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}},\ \lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3},\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3\frac{x}{2}}$$

Exercice 3. *Etudier la limite, lorsque x tend vers l'infini, de $x(\sqrt{x^2+m}-x)$, où m est un paramètre réel.*

Exercice 4. *Calculer $\lim_{x\to 0} x\mathbf{E}\left(\frac{1}{x}\right)$ et tracer le graphe de la fonction.*

Exercice 5. *Déterminer (si elles existent) les asymptotes des courbes des fonctions suivantes (et étudier les positions relatives si possible).*

$$f(x)=\frac{3x+2}{x};\quad f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x+1};\quad f(x)=\frac{x^3-x^2-4x+5}{x^2+x-2}.$$

Exercice 6. *Soit la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 4}{2x}.$$

1) Déterminer le domaine de définition D_f *de* f.
2) Déterminer des réels a, b *et* c *tels, pour tout* $x \in D_f$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x}.$$

En déduire que la courbe représentative de f *admet une asymptote aux voisinages des infinis. Etudier leur position relative et donner l'allure de la courbe.*
Remarque. L'écriture précédente de f *s'appelle la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle* f. *Elle nous sera très utile pour calculer des primitives dans le chapitre sur l'intégration.*
3) Reprendre les questions précédentes avec la fonction

$$f(x) = \frac{x(2x+3)}{2x-3}.$$

Exercice 7. *La courbe représentative* $\mathcal{C}$ *de la fonction* $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+d}$ *est*

1) Par lecture graphique, trouver une équation des asymptotes D_1 *et* D_2 *de* $\mathcal{C}$. *Que peut-on en déduire pour les coefficients* a, b, c *et* d *?*
2) En remarquant que le point $A(-1, -1)$ *est situé sur* $\mathcal{C}$, *déterminer la fonction* f.

Exercice 8. *On considére les fonctions*

$$f_1(x) = -x + \frac{1}{2} - \frac{2x}{x^2 - 4}.$$

$$f_2(x) = \frac{3x + 6}{x^2 - x - 2}.$$

$$f_3(x) = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 3}.$$

$$f_4(x) = \frac{x^2 + 4x + 7}{x^2 + x - 2}.$$

$$f_5(x) = \frac{-2x}{(x-1)(x+2)}.$$

$$f_6(x) = \frac{-x^2 - 3x + 5}{x^2 + x + 1}.$$

Attribuer à chacune des fonctions son graphe :

Exercice 9. *Pour exciter un tissu, nerf ou muscle, un courant électrique doit avoir une intensité au moins égale à un nombre i qui varie avec la durée t de passage du courant suivant la loi :*

$$i(t) = a + \frac{b}{t},$$

où a et b sont des constantes strictement positives dépendant du tissus étudié. On appelle rhéobase l'intensité minimale qu'il faut donner à un courant électrique pour être sur que le tissus soit excité pendant toute la durée du passage. Calculer la rhéobase.

Exercice 10. *Dans une certaine réaction chimique, la concentration d'un corps est la fonction du temps $\alpha : t \to \dfrac{\alpha(0)}{1+kt}$ où k est une constante strictement positive. On considère que la réaction est complète lorsque la concentration du corps considéré est assez faible pour qu'il soit indécelable. Pourquoi, dans le cas proposé, existe-t-il toujours un instant t_0 à partir duquel la réaction est complète ?*

Exercice 11. *Déterminer si les suites suivantes sont convergentes ou non.*

$$(1)\ u_n = \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right);\ u_n = \sqrt{1-e^{-n}};\ u_n = \cos\left(\frac{n^2\pi}{(n+1)^2}\right);\ u_n = e^{\frac{-n}{\ln(1+n)}}.$$

$$(2)\ u_n = 1 + \frac{\sin n}{\sqrt{n}};\ u_n = n^2 + (-1)^n;\ u_n = \frac{n+\sin n}{n-\cos n};\ u_n = \frac{\sqrt{n}+\sin n^3}{n}.$$

$$(3)\ u_n = \frac{2^n}{n^2+2^n};\ u_n = \frac{\ln(1+n)}{\sqrt{1+n}};\ u_n = \frac{e^{n^2}}{e^{2n}};\ u_n = \frac{2^n+n^2+\ln n}{3^n}.$$

$$(4)\ u_n = n^2 - \ln(1+n^2);\ u_n = \frac{e^n-1}{n^2+1};\ u_n = \frac{n\ln n}{e^{n+1}};\ u_n = \frac{e^n - 4\ln n^2}{2^n+4}.$$

$$(5)\ u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n;\ u_n = (1+n)^n;\ u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}};\ u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 12. *Calculer les limites des suites suivantes*

$$(1)\ u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{(n+1)^2}.$$

$$(2)\ u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2.n^2} + ... + \frac{1}{n^3}.$$

Exercice 13. *Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{7u_n+6}{u_n+6}$. En considérant la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n-3}$, pour $n \in \mathbb{N}$, étudier la convergence de (u_n).*

Exercice 14. *Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $u_0 < v_0$. On définit (u_n) et (v_n) par $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3}$. Montrer que ces deux suites convergent et ont la même limite.*

Exercice 15. *Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1/2)u_n + 4$.*
1) Etudier graphiquement la suite (u_n). Que peut-on conjecturer sur la convergence de la suite (u_n) (suivant les valeurs de u_0) ?
2) Démontrer les conjectures précédentes.
3) Trouver l tel que la suite définie par la relation de récurrence $v_n = u_n - l$ soit géométrique. Retrouver les résultats du 2).

Exercice 16. *Dans tout l'exercice, nous admettrons que si une suite positive (u_n) converge vers l, alors la suite $(\sqrt{u_n})$ converge vers $\sqrt{l}$.*
1) Considérons la suite définie par $u_0 \geq -4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{4+u_n} - 2$.
1a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
1b) Montrer que si la suite (u_n) a une limite, alors cette limite est 0.
1c) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \geq -2$.
1d) Montrer que, pour tout n, $u_n - u_{n+1}$ a le même signe que u_n.
1e) Supposons que $u_0 = 1$. Etablir que la suite (u_n) est monotone. A-t-elle une limite et si oui, laquelle ?
2) Soit la suite numérique définie par $u_0 \in [0,1]$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \text{ pour tout } n \in N.$$

2a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
2b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2c) En déduire que la suite (u_n) admet une limite que l'on calculera.
2d) On pose $u_0 = \cos\phi$ où $\phi \in [0, \pi/2]$. Montrer par récurrence que $u_n = \cos\left(\frac{\phi}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Retrouver les résultats du 2c).

Exercice 17. *Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3/4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$ où $g(x) = \dfrac{x}{2+x}$.*
1) Montrer que si $|x| \leq 3/4$, alors $|g(x)| \leq 3/4$. En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 3/4$.
2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq 4/5|u_n|$.
3) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1}| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{3}{4}.$$

4) Conclure.
Cette méthode sera développée comme une conséquence du théorème des accroissements finis.

Exercice 18. *On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 3/2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n}$. *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > \sqrt{2}$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$. *En déduire (par exemple par récurrence) que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}$.

4) Etudier la convergence de (u_n).

Exercice 19. *Soit* A *le nombre qui s'écrit*

$$A = 3,2\ 43\ 43\ 43\ 43, ...$$

dans le système décimal. Les pointillés indiquent que l'écriture se poursuit par le nombre 43 *écrit indéfiniment. On pose* $u_0 = 3,2$ *et pour tout* $n \geq 1$,

$$u_n = 3,2\underbrace{43\ 43 \cdots 43}_{n \text{ fois}}.$$

1) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{1}{10}\left(32 + \frac{43}{100} + ... + \frac{43}{100^n}\right).$$

2) Calculer la somme

$$\frac{43}{100} + ... + \frac{43}{100^n}.$$

3) En déduire la limite de la suite (u_n).
4) Montrer que A *est rationnel.*
5) Comment peut-on généraliser ?

Exercice 20. *Posons nous la question suivante :*
Peut-on trouver un domaine dont l'aire est inférieure à 2 *et dont la frontière est une ligne polygonale de longueur infiniment grande ?*
Le but de cet exercice est de répondre à cette question. Pour cela, commençons par considérer un triangle équilatéral, noté C_0, *dont la longueur du côté est* 1 *(voir fig. 1). Sur chaque côté, considérons les deux points qui partagent ce côté en trois parties de même longueur. Sur chaque côté, on obtient donc trois segments de même longueur. Sur le segment central, construisons vers l'extérieur un triangle équilatéral, et*

supprimons ce segment central. Notons C_1 *le polygone obtenu. Nous pouvons itérer ce processus indifiniment et nous obtenons une suite de polygones* (C_n).

Pour le polygone C_n, *notons* x_n *le nombre de côtés,* l_n *la longueur de chaque côté,* p_n *son périmètre et* A_n *son aire.*
1) Calculez x_1, l_1, p_1, A_1 *et* x_2, l_2, p_2, A_2.
2a) Exprimer x_{n+1} *en fonction de* x_n. *Déduisez-en l'expression de* x_n *explicitement en fonction de* n.
2b) Exprimer l_{n+1} *en fonction de* l_n. *Déduisez-en l'expression de* l_n *explicitement en fonction de* n.
2c) Exprimer p_n *explicitement en fonction de* n. *Quelle est la limite de la suite* (p_n) *?*
3a) Démontrer que

$$A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n .$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right).$$

3b) Quelle est la limite de la suite (A_n) *?*
4) Conclure.
Il existe une courbe "limite" des C_n, *elle s'appelle courbe de Von Koch, ou encore courbe en flocon de neige à cause de sa forme :*

La courbe de Von Koch est un exemple d'ensembles fractals. Ceux-ci, d'après leur précuseur, le mathématicien français Benoit Mandelbrot, devraient permettre de rendre compte de la géométrie de la nature. La dimension fractale (ou dimension de Hausdorff) de la courbe de Von Koch est $\dfrac{\ln 4}{\ln 3}$ *qui est un nombre non entier, strictement supérieur à* 1.

Exercice 21. *Application à la génétique.*

Chaque cellule du corps d'une souris contient un gène qui détermine la couleur de sa peau : grise ou blanche. Plus précisément, deux allèles interviennent pour la couleur de la peau que nous noterons G (pour gris) et b (pour blanc). Il y a donc trois paires d'alléles possibles : GG,bb,Gb. La paire GG donne la couleur grise, la paire bb donne la couleur blanche, la paire Gb donne aussi la couleur grise (on dit que l'allèle G est dominant, d'où la majuscule).

Exemple. Une souris mâle GG et une souris femelle Gb ne peuvent donner naissance qu'à une souris de type GG ou Gb, car leur accouplement donne 4 paires possibles : 2 paires de type GG et 2 paires de type Gb d'après le tableau

	G	b
G	GG	Gb
G	GG	Gb

La souris enfant ne pourra être que grise, puisqu'elle héritera d'une paire de type GG ou Gb.

Recherche d'une lignée pure de souris grises
On considère une population P_0 *de souris grises. On laisse cette population se reproduire, puis on isole les individus nés de cette reproduction en enlevant les souris blanches (c'est à dire celles qui sont de type bb). On obtient ainsi une nouvelle population* P_1 *de souris grises avec laquelle on réitère le processus, et ainsi de suite ...*
Le problème est : Est-il possible d'obtenir, après un certain nombre de reproductions, une lignée pure de souris grises, c'est à dire une population ne comprenant que des souris grises de type GG ? Une telle population, si elle existe, ne pourrait alors donner naissance qu'à des souris grises.

Hypothèse (contestable) : Dans la population P_0 *(et dans toutes les autres), il y a pour chaque type de souris, GG ou Gb, autant de souris mâles que de souris femelles.*
Notations : Dans la population P_0*, il y a* N *souris mâles dont* p *de types GG et* N *souris femelles dont* p *de type GG. Nous supposons que* $p \neq N$*, sinon le problème est résolu.*

1) Au cours d'une reproduction, trouvez
(i) Le nombre total de paires d'allèles pouvant être formées.

(ii) Le nombre de paires d'allèles de type GG pouvant être formées.

(iii) Le nombre de paires d'allèles de type Gb pouvant être formées.

(iv) Le nombre de paires d'allèles de type bb pouvant être formées.

2) Quel lien doit-il y avoir entre les quatre nombres trouvés précédemment ? Vérifiez-le.

3) Posons $u_0 = p/N$. Le nombre u_0 est donc la proportion de souris de type GG dans la population intiale.

3a) Trouvez la proportion u_1 de souris de type GG dans la population P_1.

3b) On note u_n la proportion de souris de type GG dans la population P_n. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{3 - u_n}.$$

3c) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 1$. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$. Démontrez que la suite de terme général $1/v_n$ est une suite arithmétique de raison $-1/2$. En déduire que la suite (u_n) converge. Interprétrez ce résultat du point de vue du biologiste.

4) Application numérique : On suppose que dans P_0, il y a autant de souris de type GG que de type Gb. A partir de quelle génération obtiendra-t-on par le procédé précédent une population de souris grises contenant au moins 90 pour 100 de souris de type GG ?