MATHS 110C
CHAPITRE II : SUITES ET FONCTIONS

Nous allons dans ce chapitre présenter les principaux héros de la majeure partie du cours, à savoir les fonctions et les suites. Nous commencerons par présenter de manière unifiée ces notions grâce à la notion d'applications. Puis, nous verrons comment les suites permettent de modéliser les phénomènes d'évolution de population.

1. Applications

Soient A et B deux ensembles. Une application $f : A \to B$ est la donnée pour tout $x \in A$ d'un unique élément, noté $f(x)$, de B. Pour une telle application $f : A \to B$, A est l'ensemble d'arrivée, B celui de départ, $f(x)$ est l'image de x et x est l'antécédent de $f(x)$. On définit de plus, si $A' \subset A$,

$$f(A') = \{y \in B; \exists x \in A', y = f(x)\},$$

(c'est à dire $f(A')$ est l'ensemble de toutes les images des éléments de A) et si $B' \subset B$,

$$f^{-1}(B') = \{x \in A; f(x) \in B'\}$$

(c'est à dire $f^{-1}(B')$ est l'ensemble de tous les antécédents des éléments de B'). Attention, pour définir $f^{-1}(B')$, nous ne supposons pas que f est une bijection et donc que son application réciproque existe !

Exemples.
1) Soit A l'ensemble des français et soit $B = \mathbb{N}$. Supposons que tout français a un numéro de sécurité sociale et un numéro de téléphone (fixe ou portable). On peut alors définir une application $f : A \to B$ qui à tout français associe son numéro de sécurité sociale. Cependant, on ne peut pas définir une application $g : A \to B$ qui à tout français associe son numéro de téléphone, car certains français ont plusieurs numéros de téléphone. Il est impossible de définir une application $h : A \to B$ qui à tout français associe son adresse email, car certains français n'en ont pas.
2) Soit A l'ensemble des polynômes à coefficients réels (on le note habituellement $P[X]$) et soit $B = \mathbb{R}$. On peut alors définir une application $h : A \to B$ par $h(P) = P'(0)$ pour tout $P \in A$. Ainsi, l'image par h du polynôme défini par $P(x) = x^3 + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, est $h(P) = 0$.
3) Soit $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application qui, à tout $n \in \mathbb{N}$, associe $k(n) = 2n$. Alors, $k(\mathbb{N})$ est l'ensemble $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$, c'est à dire l'ensemble des entiers pairs. Si B' est l'ensemble des entiers impairs, alors $k^{-1}(B') = \emptyset$. En effet, aucun entier impair p n'a d'antécédent, puisqu'il s'écrit sous la forme $p = 2n + 1$, et non pas $p = 2n$.

Exercice.
1) On dit qu'une application $f : A \to B$ est injective si tout élément de B a 0 ou 1 antécédent.

1a) Dire si chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que $f : A \to B$ soit injective.
(i) $f^{-1}(B) = A$.
(ii) $\forall x \in A, \forall x' \in A, (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x')$.
1b) L'application k donnée dans l'exemple 3 ci-dessus est-elle injective ?
2) On dit qu'une application $f : A \to B$ est surjective si tout élément de B a 1 antécédent ou plus.
1a) Dire si chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que $f : A \to B$ soit surjective.
(i) $f^{-1}(B) \subset A$.
(ii) $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$.
1b) L'application k donnée dans l'exemple 3 ci-dessus est-elle surjective ?

2. Fonctions

Une fonction $f : A \to B$ est une application d'un sous-ensemble A' de A dans B. Si $A = B = \mathbb{R}$, on parle de fonction numérique. Dans le cas des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous savons que la fonction n'est pas toujours définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, c'est à dire que tout élément de $\mathbb{R}$ n'a pas d'image. Penser à la fonction donnée par $f(x) = 1/x$ qui n'est pas une application de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puisque 0 n'a pas d'image. Il est naturel de considérer $A' = D_f$ où D_f est le domaine de définition de la fonction f. Alors, $f : D_f \to \mathbb{R}$ est une application. Nous rappelons que D_f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'expression $f(x)$ existe. Ainsi, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application quand on la regarde avec comme ensemble de départ D_f. Nous verrons plus tard que le choix $A' = D_f$ n'est pas unique.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$. Alors, si on considère $A' = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f : A' \to B$ est une application. De même, nous laissons le soin au lecteur de vérifier que $A' = [-1, 0]$ convient aussi. Mais, f ne définit pas une application sur $\mathbb{R}$, car $x = 2$ n'a pas d'image.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Le graphe de f est le sous-ensemble du plan (que l'on suppose muni d'un repère orthonormé)

$$G_f = \{(x, y); x \in D_f, y \in \mathbb{R} \text{ et } y = f(x)\}.$$

On rappelle que si f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$, c'est à dire D_f est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$, alors G_f est symétrique par rapport à l'axe $0y$. Dans le cas où f est impaire ($f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$), alors G_f est symétrique par rapport à 0 (origine du repère).

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (c'est à dire $D_f = \mathbb{R}$). Notons G_f son graphe.
1) Que peut-on dire du nombre de points d'intersection de G_f avec la droite déquation $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) ?

2) Même question avec la droite d'équation $y = b$ ($b \in \mathbb{R}$).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit I un intervalle contenu dans D_f. On dit que f est croissante sur I si pour tout $x \in I$, tout $y \in I$,

$$x \geq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y).$$

On dira que f est strictement croissante si toutes les inégalités sont strictes. On dit que f est décroissante sur I si pour tout $x \in I$, tout $y \in I$,

$$x \geq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Attention, nous n'avons pas besoin de la dérivée pour définir la croissance ou la décroissance d'une fonction !

Soient deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$. On définit l'application composée $g \circ f : A \to C$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in A$. Attention, pour pouvoir définir $g \circ f$, il faut que l'ensemble de d'arrivée de f coincide avec l'ensemble de départ de g. Ainsi, dans le cas de fonctions numériques f et g, il faut que $f(D_f) \subset D_g$.
Exemple. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Alors, $h = g \circ f$ où $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Comme $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}^+$, il vient

$$D_h = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 1 \in \mathbb{R}^+\}.$$

D'où, $D_h =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Notons que lorsqu'on compose deux fonctions qui sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, la fonction composée est croissante (si elle existe !!!!). Si les deux fonctions n'ont pas la même monotonie, leur composée est décroissante.

Exemple. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = \dfrac{2}{x^2 + 3}$. Alors, $h = g \circ f$ où $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = \dfrac{2}{x}$. Il est clair que $D_h = \mathbb{R}$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}$, il vient que h est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $I \subset D_f$ un intervalle. On dit que f est majoré (respectivement minoré) sur I s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (respectivement $m \in \mathbb{R}$) tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$ (respectivement $f(x) \geq m$). Si f est majorée et minorée sur I, on dit que f est bornée sur I.
Exemple. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. En effet, on peut vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + 1} \leq 1.$$

Exercice : Un exemple de fonction bizarre.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f. Essayer de représenter la fonction f.
2) Existe-t-il un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel f est constante ?
3) La fonction f est-elle croissante sur $\mathbb{R}$? Décroissante sur $\mathbb{R}$? Existe-t-il un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction f est croissante (ou décroissante) ?
4) La fonction f est-elle majorée sur $\mathbb{R}$? minorée sur $\mathbb{R}$?
Cet exemple est très différent des fonctions rencontrées au lycée. Il faut noter qu'il a posé beaucoup de problèmes aux mathématiciens à la fin du XIX-ième siécle. Pour certains, ce type de fonction est "saugrenu" ou carrément pour d'autres "monstrueux" ! Contrairement à ce que nous ferons dans la suite, les théorèmes étaient énoncés à l'époque sans trop d'hypothèses (de continuité ou de dérivabilité). Or, les fonctions comme celle définie ci-dessus sont des contre-exemples à la plupart des théorèmes classiques d'analyse (par exemple théorème des valeurs intermédiaires et théorème des accroissements finis que nous rencontrerons plus tard). D'où, le problème rencontré par les mathématiciens du XIX ième siècle, ce qui les a amené vers plus de rigueur. Nous n'aurons pas le même genre de soucis, puique nous donnerons dans la suite les théorèmes AVEC LEURS HYPOTHÈSES, qu'il nous faudra vérifier à chaque fois que nous utilisons ces résultats.

La fonction sinus (ou cosinus) est 2π-périodique, c'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Il est alors naturel d'étudier cette fonction sur un intervalle période (par exemple sur $[0, 2\pi]$) et donc d'étudier la restriction de la fontion sinus à cet intervalle. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $A \subset D_f$, on définit la restriction de f à A, notée $f_{|A}$, comme étant l'application $f_{|A} : A \to \mathbb{R}$ définie par $f_{|A}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. Etant donné $B \supset D_f$, on appelle prolongement de f à B toute application $g : B \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
Exemples. La restriction de la fonction "valeur absolue" $x \to |x|$ à $\mathbb{R}^+$ est la fonction $x \to x$. On peut prolonger la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (qui n'est pas définie en 0) sur $\mathbb{R}$ en définissant

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici, nous avons choisi arbitrairement $g(0) = 1$. Nous verrons dans le paragraphe sur la continuité des prolongements plus naturels (appelés prolongements par continuité).

Terminons en rappelant quelques propriétés des principales fonctions vues au lycée.

Fonctions affines : $f(x) = ax+b$ où a et b sont des réels. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$. Pour cela, prenons des réels x et y tels que $x < y$. Puisque $a > 0$, il vient $ax < ay$. D'où, $ax+b < ay+b$, ce qui peut encore s'écrire $f(x) < f(y)$, c'est à dire ce que l'on voulait. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que si $a < 0$, f est strictement décroissante. Dans le cas particulier où $b = 0$, $f(x) = ax$ s'appelle une fonction linéaire. Le graphe d'une fonction affine est la droite d'équation $y = ax + b$. Dans le cas particulier d'une fonction linéaire, cette droite passe par l'origine.

Fonction logarithme népérien : $f(x) = \ln x$. Elle est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ où elle est strictement croissante. Rappelons que $\ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$. Le logarithme vérifie la propriété fondamentale suivante :
Pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
Nous en déduisons que si a et b sont des réels strictement positifs, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$. Par récurrence, nous pouvons aussi démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tout $a > 0$, $\ln(a^n) = n \ln a$. La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$. Nous pouvons facilement déduire les propriétés de la fonction log à partir de celles de la fonction ln. La fonction log est uilisée par exemple en chimie lors de calcul de pH.

Fonction exponentielle : $f(x) = e^x$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et satisfait $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $e^{\ln x} = x$. De plus, les graphes de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. Toutes ces propriétés viennent du fait que ces deux fonctions sont les bijections réciproques l'une de l'autre. La fonction exponentielle satisfait la propriété fondamentale suivante : Pour tout a et tout b dans $\mathbb{R}$, $e^{a+b} = e^a e^b$. Cette propriété se démontre à partir de la propriété fondamentale du logarithme donnée plus haut. Il en résulte que pour tous réels a et b, $e^{-a} = 1/e^a$ et

$e^{a-b} = e^a/e^b$. Enfin, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $(e^a)^n = e^{na}$.

La fonction exponentielle de base a (où $a > 0$) est la fonction $x \to a^x = e^{x \ln a}$. La fonction exponentielle est alors la fonction exponentielle de base e. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que, pour tous réels x et y, pour tous $a > 0$ et $b > 0$, $a^{x+y} = a^x a^y$, $(ab)^x = a^x b^x$.

Fonctions puissances : $f_\alpha(x) = x^\alpha$ où α est un réel. Supposons dans un premier temps que $\alpha = n$ est un entier. Nous écartons le cas $n = 0$, car dans ce cas, la fonction est constante (et vaut 1).
Cas 1. $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, la fonction $x \to x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est paire (respectivement impaire) si n est un entier pair (respectivement impair).

Cas 2. n est un entier négatif non nul. Alors, la fonction $x \to x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est paire (respectivement impaire) si n est un entier pair (respectivement impair).

En fait, les graphes des fonctions $x \to x^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$, sont d'une des formes suivantes

Dans le cas où α est réel mais n'est pas entier, la fonction f_α est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$f_\alpha(x) = e^{x \ln \alpha}.$$

Notons que cette fonction est à valeurs strictement positives. Si $\alpha > 0$, les graphes sont de la forme

Le cas où $\alpha < 0$ se déduit du cas précédent en remarquant que $x^{-\alpha} = 1/x^\alpha$. Nous reviendrons plus tard sur l'étude des variations et des limites de toutes ces fonctions.

3. Suites

Une suite est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (ou d'un sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou tout $n \in A$), l'image $u(n)$ de n par u se note traditionnelement u_n et s'appelle le n-ième terme de la suite. La suite u (qui est donc une application) se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n\in A}$).

Donnons quelques exemples élémentaires.

Exemple 1. $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$. Dans ce cas, $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exemple 2. $u_n = an + b$ où a et b sont des réels. Cette suite est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et elle s'appelle la suite arithmétique de raison a et de premier terme $u_0 = b$.

Exemple 3. $u_n = k.q^n$ où k et q sont des réels. Cette suite est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et elle s'appelle la suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = k$.

On peut aussi définir des suites par une relation de récurrence. Dans ce cas, il faut préciser les premiers termes.

Exemple 4. $u_{n+1} = \frac{2u_n^2+3}{u_n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$. Attention ! Ici, il faut faire un (petit) raisonnement par récurrence pour montrer que la suite est bien définie.

Exemple 5. $u_{n+1} = u_n + a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = b$ où a et b sont des réels.

Exemple 6. $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = k$.

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que les exemples 2 et 5 sont les mêmes, puis qu'il en est de même des exemples 3 et 6. Pratiquement, pour déterminer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il suffit de montrer que $u_{n+1} - u_n$ est constant (et cette valeur est alors la raison de la suite) et pour montrer qu'une suite non nulle (u_n) est géométrique, il suffit de montrer que le quotient u_{n+1}/u_n est constant (et cette valeur est la raison de la suite).

Mélangeons maintenant les suites arithmétiques et géométriques.

Exemple 7. $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont réels. Cette suite est une suite arithmetico-géométrique et elle peut s'exprimer par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a^n(u_0 + \frac{b}{a-1}) - \frac{b}{a-1}.$$

Il existe d'autres situations dans lesquelles on peut passer d'une définition "par récurrence" à une définition explicite.

Exercice. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par

$$u_1 = -1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} \text{ pour } n \geq 1,$$

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Déterminer la nature de (v_n), puis exprimer v_n en fonction de n. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Malheureusement, toute suite définie par récurrence ne peut pas toujours s'exprimer sous une forme explicite (voir l'exemple 4). Dans ce cas, il est souvent utile de représenter graphiquement les premiers termes afin d'avoir une idée du comportement de cette suite. Rappelons comment faire cela dans le cas d'une suite définie par u_0

donné et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction raisonnable (par exemple continue sur un intervalle contenant u_0). Supposons le plan equipé d'un repère orthonormé. Notons G_f le graphe et D_0 la droite d'équation $y = x$ (D_0 est la première bissectrice). Nous allons utiliser deux règles élémentaires :
Règle 1. Si nous nous déplaçons horizontalement, l'ordonnée reste constante.
Règle 2. si nous nous déplaçons verticalement, l'abscisse reste constante.
Partons du point de coordonnées $(u_0, 0)$. En nous deplaçant verticalement, nous allons rencontrer d'après la règle 2 le point de G_f d'abscisse u_0, donc le point de coordonnées $(u_0, f(u_0)$. Puis, si nous nous déplaçons horizontalement, nous allons rencontrer d'après la règle 1 le point de D_0 d'ordonnée $f(u_0)$ (c'est à dire u_1 d'après la relation de récurrence donnant la suite), donc le point de coordonnées (u_1, u_1). Puis, en nous déplaçant verticalement, nous allons couper l'axe Ox au point de coordonnées $(u_1, 0)$. Nous pouvons alors recommencer ce que nous avons fait à partir du point de coordonnés $(u_0, 0)$, et ainsi de suite (voir les exemples ci-dessous).

Rappelons aussi les formules donnant la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique. Commençons par définir le symbole Σ. Si (u_n) est une suite, alors la somme des n premiers termes est $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ et cette somme se note

$$u_0 + u_1 + \dots u_{n-1} = \Sigma_{k=0}^{n-1} u_k.$$

Nous avons vu dans le chapitre 1 comme exercice sur la récurrence que

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{1}$$

$$1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q},\ \forall q \neq 1. \tag{2}$$

Considérons maintenant une suite arithmétique (u_n) de raison a et de premier terme b (exemple 2). Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1}(ka+b)\\ &= a\sum_{k=0}^{n-1} k + nb\\ &= a\frac{n(n-1)}{2} + nb \text{ (d'après (1)).}\end{aligned}$$

Considérons une suite géométrique (u_n) de premier terme k et de raison q (voir exemple 3) avec $q \neq 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} u_k &= \sum_{j=0}^{n-1}(k.q^j)\\ &= k\sum_{j=0}^{n-1} q^j\\ &= k\frac{1-q^n}{1-q} \text{ (d'après (2))}\\ &= u_0\frac{1-q^n}{1-q}.\end{aligned}$$

Si $q = 1$ alors la suite est constante et donc la somme de ces n premiers termes est $n.u_0$.

Une suite (u_n) est croissante (respectivement décroissante) si $n \geq m \Longrightarrow u_n \geq u_m$ (respectivement $n \geq m \Longrightarrow u_n \leq u_m$). Si toutes les inégalités sont strictes, la suite (u_n) est strictement croissante (respectivement décroissante). On dit que la suite est croissante (respectivement décroissante) à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m \geq N \Longrightarrow u_n \geq u_m$ (respectivement $n \geq m \geq N \Longrightarrow u_n \leq u_m$). Comment etudier les variations d'une suite ? Le plus naturel est d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Reprenons l'exemple 2 (suite arithmétique de raison a et de premier terme b). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = a$. Nous en déduisons que la suite est constante si $a = 0$, (strictement) croissante si $a > 0$, et (strictement) décroissante si $a < 0$. Quand la suite est définie par récurrence, l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ peut se faire ...... par récurrence.

Exercice. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1/2u_n^2 + 1/2$. Montrer que (u_n) est croissante.

Quand la suite est de signe constant (et ne s'annule jamais), nous pouvons comparer le quotient u_{n+1}/u_n avec 1. En effet, supposons par exemple que $u_n > 0$ pour tout

$n \in \mathbb{N}$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Longrightarrow u_{n+1} \leq u_n,$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Longrightarrow u_{n+1} \geq u_n.$$

Reprenons l'exemple 4 (suite géométrique de raison q et de premier terme k). Si $q < 0$, la suite n'est ni croissante, ni décroissante. Si $q = 0$, alors pour tout $n \geq 1$, $u_n = 0$. Supposons donc maintenant que $q > 0$. Alors, u_n est du signe de u_0.
Cas 1. $u_0 > 0$. Comme $u_{n+1}/u_n = q$, nous avons

$$0 < q < 1 \Longrightarrow (u_n) \text{ décroissante et } q > 1 \Longrightarrow (u_n) \text{ croissante.}$$

Cas 2. $u_0 < 0$. Comme $u_{n+1}/u_n = q$, nous avons

$$0 < q < 1 \Longrightarrow (u_n) \text{ croissante et } q > 1 \Longrightarrow (u_n) \text{ décroissante.}$$

Si $q = 1$, la suite est constante.

Remarque. Soit f une fonction. Si la suite est définie par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors l'étude des variations de la suite (u_n) revient à l'étude des variations de la fonction f.

La suite (u_n) est majorée (respectivement minorée) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (respectivement $m \in \mathbb{R}$) tel que, pour tout n, $u_n \leq M$ (respectivement $m \leq u_n$). Nous dirons que la suite est bornée si elle est à la fois minorée et majorée. Notons qu'une suite est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée. Ceci vient du fait bien connu que pour $a \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$,

$$|a| \leq r \Longleftrightarrow -r \leq a \leq r.$$

Exercice.
1) Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que (u_n) est bornée.
2) Soit (u_n) définie par $u_0 = 1/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1/2u_n^2 + 1/2$. Montrer que (u_n) est bornée.

4. Exemples de modélisation à l'aide des suites

Soit N_n le nombre d'individus d'une population donnée au temps n. Nous allons décrire un certain nombre de modèles qui permettent d'étudier l'évolution de cette population. Soient d le taux moyen de mortalité et b le taux moyen de fertilité d'un individu. Alors, l'évolution de la population peut être modélisée par l'équation

$$N_{n+1} = (1 - d + b)N_n.$$

En posant $\lambda = 1 - d + b$, cette équation devient $N_{n+1} = \lambda N_n$. Un cas simple, mais pas très réaliste, est de supposer que λ ne dépend pas de n. Ainsi, si $\lambda > 1$, le nombre d'individus tend vers $+\infty$ très vite ! Dans le cas où λ ne dépend pas de n, nous dirons que le processus est stationnaire et la suite (N_n) est une suite géométrique de raison λ. Ce modèle a été proposé en 1798 par Thomas Malthus, qui s'était rendu compte de l'inadéquation de cette loi.

Dans une population d'insectes par exemple, le nombre moyen de progénitures est fixe (disons R_0), mais la fraction qui survit dépend de la population actuelle (par exemple $S(N_n)$). L'équation de Malthus devient alors

$$N_{n+1} = R_0 S(N_n) N_n.$$

La loi d'évolution de la population est alors de la forme $N_{n+1} = f(N_n)$ avec f une fonction plus compliquée qu'une fonction affine. Ce modèle est plus réaliste mais plus difficile à étudier. La fonction S peut dépendre de la compétition. S'il n'y a pas de compétition, alors S est la fonction toujours égale à 1. Si les ressources vitales pour la population sont limitées et doivent se partager entre chaque individu, alors nous pouvons imaginer qu'il existe un nombre critique d'individus N_c tel que si $N \leq N_c$, alors il n'y a pas de compétition, et donc $S(N) = 1$. Alors que si $N > N_c$, la fraction de survivants est de l'ordre de $S(N) = N/N_c$. Supposons maintenant que les ressources vitales soient partagées également par tous les individus. Alors, soit elles sont suffisantes et tout se passe bien, soit elles sont insuffisantes et la population disparait. Donc, il existe N_c tel que $N \leq N_c$ alors $S(N) = 1$ et si $N > N_c$, $S(N) = 0$. Ces modèles posent problème. Par exemple dans le dernier, la population devient nulle, ce qui arrive rarement dans la nature.
Exercice. Etudier graphiquement l'évolution d'une population dont l'évolution peut être décrite par un des deux modèles précédents.

Une version améliorée est l'équation de Hassel

$$N_{n+1} = \frac{R_0 N_n}{(1 + a N_n)^b}$$

où $R_0 > 0$ et $b \geq 0$. Nous discuterons plus longuement dans le chapitre 3 de ce modèle.

Exercice : Un exemple de dynamique des populations.
Supposons qu'une population évolue suivant l'équation non linéaire

$$x_{n+1} = \lambda \frac{x_n}{1 + x_n},$$

où le paramètre λ est strictement positif.
1) Existe-t-il un *point d'équilibre* (non trivial) pour ce système dynamique, c'est à dire une suite constante (non nulle) qui satisfait l'équation d'évolution précédente ? Nous noterons dans la suite N_0 la valeur de cette suite.
2) Etudier la *stabilité* de cette solution d'équilibre, c'est à dire cette solution est dite stable si, pour toute solution (u_n) telle que $|u_0 - N_0|$ est petit, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - N_0|$ reste petit.

Essayer en particulier de mettre en évidence des phénoménes de *bifurcation* (c'est à dire dépendance de la stabilité en fonction de λ).
3) Illuster graphiquement les observations de 2).
4) En faisant le changement de suites $y_n = 1/x_n$, puis en cherchant y_n sous la forme $y_n = ar^n + b$, trouver les solutions x_n, puis vérifier tous les résultats précédents.

Nous nous sommes inspirés pour ce paragraphe de "Essential Mathematical Biology" de N. F. Britton (Springer, 2003).
Nous verrons plus tard des exemples de modélisation d'évolution de population à l'aide de suites doublement récurrentes (dont l'exemple le plus simple est la suite de Fibonacci), ainsi qu'avec des fonctions.

5. A propos de l'histoire de l'enseignement des fonctions

La notion de fonction tient une place importante dans les programmes actuels du lycée. Mais, est-ce que cela a toujours été le cas ? Nous allons présenter l'évolution de l'enseignement de la notion de fonction au lycée en France durant le XXe siècle. En suivant Michèle Artigue dans *"Les sciences au Lycée"* (Vuibert, 1996), nous présenterons trois tournants, c'est à dire la reforme de 1902, celles des années 1960 et 1970 liées au "Maths modernes", enfin la contre-réforme des années 1980.

5.1. **La réforme de 1902.** Les enjeux de cette réforme dépassent les seuls enseignements mathématiques, le principal but étant d'adapter au monde moderne un enseignement jugé dépassé. En particulier, il s'agit d'abolir la suprématie des "humanités classiques" en développant des "humanités scientifiques". Les mathématiques y sont vues comme une science déductive, mais surtout non coupées des autres sciences. Les concepteurs du programme ont ainsi le soucis de développer une mathématique expérimentale, liée à la réalité. Ils mettent en avant l'intuition, mais ne veulent pas que soit négligé la rigueur, qui est, comme nous le verrons dans ce cours, toute récente. La principale innovation est l'introduction du calcul différentiel et intégral, en particulier de la notion de dérivée et de ses applications (sens de variation, recherche d'extrema, ...). Cependant, l'enseignement du calcul différentiel et intégral ne fait l'objet que d'un paragraphe à part dans l'enseignement d'algèbre qui ne tient lui-même que sur une page sur les huit du programme. Les autres rubriques sont l'arithmétique, la trigonométrie, la géométrie, la cinématique, la statique, la dynamique, la géométrie descriptive, la cosmographie, le desssin géométrique et les compléments de géométrie ! Il est impotant de noter que cette réforme est guidée par des universitaires comme G. Darboux, P. Appell, J. Tannery, qui vont écrire des manuels qui seront de bons points de repère pour les enseignants. Insistons sur le fait que cette réforme se veut un bon compromis entre rigueur et intuition, celle-ci devant être développée à partir de l'étude du monde physique. Le point de départ doit être la réalité concrète, et l'abstraction empirique à partir de cette réalité doit être organisée de façon progressive. Cependant, comme l'écrit E. Beke, "Nous ne voulons pas d'un calcul infinitésimal superficiel, dépourvu de toute précision et indigne de la science".

5.2. **La réforme des années 1960.** Dès les années 1930, l'enseignement du calcul différentiel et intégral à l'université apparait obsolète, et d'ailleurs conduira à la création du groupe Bourbaki. Ce sentiment s'étendra au secondaire dès les années 1950. La réforme des années est une charnière entre celle de 1902 et celles des années 1970, d'inspiration plus ou moins bourbachiste. Tout d'abord, l'enseignement d'analyse s'étoffe dans les programmes des classes scientifiques. Il prend même du galon, puisque, dans le programme de la classe de seconde, il n'apparait plus dans le paragraphe "Algèbre", mais dans la rubrique "Algèbre et notions d'analyse". Les programmes tendent vers plus d'abstraction. Ainsi, les fonctions sont définies comme applications entre ensembles. En Terminale, les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont abordés, mais pas démontrés. Il est demandé de ne pas insister sur les notions ensemblistes et sur le symbolisme. Par exemple, la notion de limite est donnée de manière formelle (avec des ε), mais dans certains manuels, cette définition doit coexister avec des versions plus intuitives. Ces hésitations vont être balayées par la célèbre réforme des maths modernes!

5.3. **La réforme des "maths modernes" des années 1970.** Les réformes de 1902 et des années 1970 ont pas mal de points communs. Elles ont toutes les deux pour but la modernisation d'un enseignement jugé desuet et elle sont menées par des universitaires de renom (pour celles des années 1970, citons G. Choquet, J. Dieudonné et A. Lichnerowitz). De plus, comme la réforme de 1902 s'appuyait sur le courant dominant de pensée de l'époque (le positivisme), celle des années 1970 est inspirée du structuralisme. Sont mis au premier plan les problèmes de fondements, d'axiomatique, et la notion de structure, en particulier les structures topologiques et algébriques qui sont pour les mathématiciens de l'époque des révélations. Nous ne parlerons pas des polémiques autour de cette réforme. L'enseignement de l'analyse n'est pas l'endroit où ce structuralisme est le plus mis en exergue. Cependant, il devient plus autonome. Ainsi, en classe de 1ere, l'analyse apparait dans ce programme dans la rubrique "Fonctions numériques d'une variable réelle". Les pricipales innovations sont l'introduction de la dérivée via "la fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée" (censée, d'après le programme, se rapprocher de l'usage des physiciens) et la définiton des fonctions trigonométriques à partir des matrices de rotations! Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont sacrifiés. L'enseignement de l'analyse n'échappe pas à la formalisation, mais dans ce domaine, il ne se pose pas les problèmes aigus qui se posent en algèbre et géométrie.

5.4. **La contre-réforme des années 1980.** Contrairement aux précédentes, cette réforme est issue "du terrain", comme l'écrit M. Artigue. En particulier, des enseignants de l'APMEP (Association des Enseignants en Mathématiques de l'Enseignemant Public) et des IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, crées à la suite de la réforme des années 1970).

Pour les fonctions, cette réforme prend le contre-pied de la précédente, au sens où le point de départ de leur étude redevient la modélisation. De manière plus générale, l'accent n'est plus mis sur les mathématiques en tant qu'univers de structures ou comme language universel de la science. Il est plutôt mis en valeur le fait que les mathématiques servent non seulement à résoudre des problèmes internes à cette discipline, mais aussi des problèmes suscités par les autres sciences. Les programmes insistent sur la mise en place d'activités qui permettent d'introduire les notions de base à partir de problématique venant des mathématiques elle-même ou d'autres sciences. L'idée est maintenant de partir de l'étude d'exemples simples, typiques qui serviront d'exemples de référence, puis d'introduire une étude plus générale. Il s'agit d'équilibrer les aspects numériques, algébriques et graphiques (en particulier, grâce à l'utilisation des moyens modernes de calcul commes les calculatrices) plutôt que de donner la préeminence au seul travail algébrique. Ce refus de l'algébrisation à outrance va evidemment profiter à l'analyse. Ainsi, dans les programmes des classes de 1ere scientifique, 2,5 pages sur 6 sont consacrés à l'analyse!

Concernant les fonctions, il est demandé en classe de seconde d'insister sur la modélisation de phénomèmes divers. On demande aussi de respecter un juste équilibre entre les diverses modes de représentations des fonctions : tableaux de valeurs, formules, représentations graphiques.

Tout formalisme disparait, mais sont introduits les bases de l'analyse du lycée : étude locale d'une fonction (essentiellmenet par des techniques d'approximation par des fonctions simples), majoration-minoration de fonction, recherche d'extrema (avec des applications à des problèmes d'optimisation), étude des variatons (avec des applications à la resolution numérique d'équations). En classe de 1ere, la définition de la limite avec des ε n'est donnée qu'en 0, mais les commentaires dans le programme demandent que cette définition soit très bien motivée avant son introduction. En Terminale, sont introduits le calcul de dérivées partielles (pour les applications en physiques), les développements limités (qui sont déja introduits, pour ceux de degré 1, en classe de 1ere pour remplacer la notion d'application linéaire tangente de la réforme des années 1970), l'inégalité des accroissements finis (avec le retour des théorèmes de Rolle et des accroissements finis). Cette dernière inégalité permet d'obtenir des majorants et cela illustre l'accent qui est mis sur l'approximation et le calcul numérique.

Le cours de MATH110C est un “modeste héritier” de cette tradition française. Ainsi, le lecteur-étudiant va découvrir au cours de l'année la définition de la limite avec des ε, les théoreème de Rolle et des accroissements finis, les matrices,... toutes ces notions qui apparaissent au dessus et qui sont peut-être des inconnues pour lui.

6. Quelques exercices

Exercice 1. *Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \ln(x^2 - 1);\ f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1);\ f(x) = 1/\ln(x+1)$$

$$f(x) = \ln(2x^2 - 2x + 1);\ f(x) = \ln(-2x^2 - x + 1)$$

$$f(x) = \ln(\ln x);\ f(x) = \ln|\ln x|;\ f(x) = (5-x)^\pi$$

$$f(x) = (-x^2 + x)^{\sqrt{2}};\ f(x) = (x^2 - 2x + 3)^{-5};\ f(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^e.$$

Exercice 2. *Résoudre les équations et inéquations suivantes :*

$$(a)\ \ln(x+1) = \ln(2x+5); (b)\ \ln(x+2) = 1; (c)\ \ln(x+4) + \ln(x-2) = \ln(5x-4)$$

$$(d)\ 2\ln x - \ln(x+1) = \ln 2; (e)\ (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$$

$$(f)\ \ln x > \ln(2x-1); (g)\ 2\ln x - \ln(5x-6) \leq 0$$

$$(h)\ \ln(2-x) + \ln(x+4) > \ln(3x+2); (i)\ \ln(x^2 - 2e^2) = 1 + \ln x.$$

Exercice 3. *Résoudre les systèmes suivants :*

$$\begin{cases} x + y = 55 \\ \ln x + \ln y = \ln 700 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \ln(xy) = 4 \\ \ln x . \ln y = -12 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \ln(x-2) + 3\ln(y-1) = 9 \\ 2\ln(x-2) - \ln(y-1) = 4 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} e^x . e^{2y-1} = 1 \\ e^{x+2} . e^y = e \end{cases} \tag{6}$$

Exercice 4. *Résoudre les équations et inéquations suivantes :*

$$(a)\ e^{3x} = 1; (b)\ e^{2x} - 4e^x + 3 = 0; (c)\ e^x + e^{-x} = 2$$

$$(d)\ e^{2x} > 3; (e)\ e^{1+\ln x} < 2; (f)\ e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x > 0.$$

Exercice 5. *On évalue l'acidité (ou la basicité) d'une solution en mesurant son pH (potentiel d'hydrogène), donc en évaluant sa concentration en ions H_3O^+ ; le pH d'une solution est en effet défini par : $pH = -\log[H_3O^+]$ (où $[H_3O^+]$ est le nombre d'ions H_3O^+ par litre de solutions.). On admet qu'à 25 degré : $[H_3O^+][OH^-] = 10^{-14}$ (produit ionique de l'eau). Dans la suite, on suppose que les mesures sont faites à cette température.*

1) Une solution de soude contient 10^{-2} moles d'ions OH^- par litre. Quel est son pH ?

2) Dans l'eau pure, on trouve le même nombre de moles d'ions OH^- que d'ions H_3O^+ par litre. Quel est son pH ?

3) Une solution est acide si elle contient plus de moles d'ions H_3O^+ que d'ions OH^-, et basique dans le cas contraire. Indiquer les inégalités que vérifient le pH d'une solution acide et le pH d'une solution basique.

Exercice 6. *L'impression sonore varie comme le logarithme de l'intensité sonore. De ce fait, on définit le niveau sonore par :* $N = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$*, où* I *est l'intensité sonore et* I_0 *l'intensité sonore de référence.*
1) On admet que l'intensité sonore I *est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la pression acoustique* P*. Démontrer que si* P_0 *est la pression acoustique correspondant à l'intensité sonore de référence,* $N = 20\log\left(\dfrac{P}{P_0}\right)$.
2) Si P *et* P_0 *sont exprimés en Pascal (Pa),* N *est exprimé en décibels (dB). Sachant que* $P_0 = 20.10^{-6}$ *Pa, calculer les niveaux sonores respectifs correspondant aux pressions acoustiques* $P = 12.10^{-3}$ *Pa (niveau moyen de la voix) et* $P = 30.10^{-2}$ *Pa (bruit insupportable).*

Exercice 7. *L'injection d'insuline provoque une variation du taux de glucose dans le plasma. La variation* T *de ce taux est de la forme* $T = a^{-mt} + be^{-nt}$ *où* t *est le temps écoulé depuis l'injection,* a*,* b*,* m *et* n *étant des contantes positives dépendant des conditions de l'expérimentation. On se place dans le cas où* $a = 1$*,* $b = 0,1$*,* $m = 1$ *et* $n = 0,1$.
1) Représenter sur un même graphique les fonctions $T_1 : t \to e^{-t}$ *et* $T : t \to 0,1e^{-0,1t}$ *(5cm par unité en abscisse, 20cm par unité en ordonnées).*
2) Résoudre pour $t > 0$*,* $T_1(t) = T_2(t)$*. Donner alors la valeur commune.*
3) Quelles sont les erreurs absolue et relative commises en remplaçant $T(t)$ *par* $T_1(t)$ *lorsque* $0 \leq t \leq 1$ *?*
4) Quelles sont les incertitudes maximales (en erreur relative et erreur absolue) lorsque'on remplace $T(t)$ *par* $T_2(t)$ *pour* $t \geq 4$ *?*
5) Donner une représentation graphique approchée de la fonction $t \to \ln(T(t))$ *en utilisant les questions précédentes.*

Exercice 8. *Construire des suites* (u_n) *et* (v_n) *telles que*

$$u_1 = 1 \text{ et } u_5 = 100;$$

$$v_3 = 5 \text{ et } v_7 = -5.$$

Dans chaque cas, on essayera de construire des suites arithmétiques, géométriques et arithmetico-géométriques.

Exercice 9. *Etudier la monotonie des suites définies par*
1)

$$u_n = n^2 - ln\ (n)\ ;\ u_n = \frac{\sqrt{n!}}{2^n}\ ;\ u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

2)

$$u_0 = -3 \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3)

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = u_n + n^2 - 10n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

4)

$$u_n = -3\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

Exercice 10. *1a) Soit* (u_n) *la suite définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $u_n = \dfrac{4n+3}{n+5}$*. Montrer que* (u_n) *est minorée par* 0 *et majorée par* 4*.*
1b) La suite (u_n) *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $u_n = \dfrac{n-6}{2n+1}$ *est-elle majorée ou minorée ?*

2a) Montrer que la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 0$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_{n+1} = e^{u_n} - u_n - 1$ *est minorée par* 0 *et majorée par* 1*.*
2b) La suite (u_n) *définie par* $u_0 = 5$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$ *est-elle majorée ?*

Exercice 11. *1) La suite* (u_n) *est définie par* $u_0 = -3$ *et* $u_{n+1} = u_n + 3/2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
1a) Exprimer u_n *en fonction de* n*.*
1b) Représenter graphiquement la suite (u_n)*.*
1c) Calculer $u_0 + u_1 + ... + u_{20}$ *(Ecrire aussi cette somme avec un* Σ*).*

2) Les suites suivantes sont-elles arithmétiques :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 3u_n - 45, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$u_0 = -1 \text{ et } u_{n+1} = -u_n + 2n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3) Trouver une suite arithmétique (u_n) *telle que* $u_3 = 5$ *et* $u_0 + u_1 + u_2 = 9$*. Cette suite est-elle unique ? Calculer la somme de ses* 10 *premiers termes.*

4) Montrer que toute suite (u_n) *vérifiant la relation de récurrence* $u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *est arithmétique.*

5) Trouver trois termes consécutifs d'une suite arithmétique connaissant leur somme 108 et leur produit 43407.

Exercice 12. *Considérons les suites* (u_n) *et* (v_n) *définies par, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$u_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} \text{ et } v_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2}.$$

Aprés avoir étudié les suites de terme général $u_n + v_n$ *et* $u_n - v_n$*, calculer* $\Sigma_{k=0}^n u_k$ *et* $\Sigma_{k=0}^n v_k$*.*

Exercice 13. *1) La suite* (u_n) *est définie par* $u_0 = -4$ *et* $u_{n+1} = (3/2)u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
1a) Exprimer u_n *en fonction de* n*.*
1b) Représenter graphiquement la suite (u_n)*.*

1c) Calculer $u_0 + u_1 + ... + u_{10}$ *(Ecrire aussi cette somme avec un* Σ*).*

2) Les suites suivantes sont-elles géométriques :

$$u_n = 5/(3^{-n}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = (1/2)u_n + n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3) Trouver une suite géométrique (u_n) *telle que* $u_0u_1u_2 = 27$ *et* $u_0u_2u_4 = -216$. *Cette suite est-elle unique ? Calculer la somme de ses* 10 *premiers termes.*

Exercice 14. *1) Soit la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n}$. *cette suite est-elle bien définie ?*
1a) Représenter graphiquement (au moins) les 5 *premiers termes de la suite. Que pouvez-vous conjecturer sur la monotonie et la majoration/minoration de la suite* (u_n) *?*
1b) Essayez de démontrer ou d'infirmer vos conjectures.

2) Mêmes questions avec les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ *où*
2a) $u_0 = -2$ *et* $f(x) = (-1/2)x + 6$.
2b) $u_0 = -3$ *et* $f(x) = (2/3)x + (3/2)$.

3) Montrer que la suite définie par $u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = 2u_n - 3$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *est constante.*

Exercice 15. *Voila un exercice que l'on trouvait dans les livres de maths des années 1980. Depuis, les francs ont disparu et les taux de la Caisse d'Epargne ont bien diminué !*
On place 1000F à la Caisse d'Epargne (taux : 4,5 pour cent par an, intêtets composés). On note C_n *le capital obtenu au bout de n années (en ne touchant pas au livret pendant ces n années).*
1) Calculer C_1, C_2.
2) Montrer que (C_n) *est une suite géométrique dont on déterminera la raison.*
3) Au bout de combien d'années, C_n *aura-t-il dépassé 10000F ?*
4) Désignons par S $(S > 1000)$ *une certaine somme en francs. Exprimer en fonction de S le nombre d'années au bout duquel* C_n *aura dépassé S.*

Exercice 16. *On admet que le taux de croissance annuel de la population mondiale est actuellement de 2,4 pour cent.*
1) Soit P_n *la population de la Terre dans n années. En supposant que le taux de croissance soit constant, dans combien d'années la population de la terre aura doublé ?*
2) Le monde est (à peu près) peuplé de 6 millions d'habitants. Quelle sera la population dans 90 ans ?
3) Les terres émergées ayant une superficie d'environ 130 millions de km^2*, à quelle date n'y aura-t-il plus qu'un mètre carré par habitants ?*
L'hypothèse faite à la question 1) est-elle réaliste ?

Exercice 17. *1) Le nombre de bactéries contenues dans un bouillon de culture est multiplié par 1,7 toutes les heures. Au bout de combien d'heures la population des bactéries aura-t-elle été multipliée par* 17 *?*
2) En une seconde, un échantillon de Radium perd $1,37 \times 10^{-9}$ *pour cent de sa masse. Au bout de combien de temps aura-t-il perdu la motié de sa masse ? les trois quarts de sa masse ?*
3) Une lame de verre d'un type donné absorbe 4 *pour cent de la lumière qui la traverse. Quelle est la proportion de lumière incidente qui traverse un empilement de vingt de ces lames ? Combien faut-il superposer de lames pour absorber* 50 *pour cent de la lumière ?*

Exercice 18. *Etant donnés deux nombres complexes a et b tels que $a \neq 0$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$, on définit la suite (z_n) par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = az_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans un plan orthonormé, on notera M_n le point d'affixe z_n.*
1) Montrer par récurrence que, pour $n \geq 1$, on a :

$$z_n = \frac{b(1-a^n)}{1-a}.$$

2) p étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose dans cette question $a = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$. Montrer qu'alors la suite (z_n) est périodique de période p.
3) α étant un réel donné tel que $\alpha \neq k\pi$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, on pose dans cette question $a = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$ et $b = 2\sin\alpha$.
Quelle est la nature de l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = az + b$? En déduire que l'ensemble des points M_n est inclus dans un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
Faire un dessin dans le cas $\alpha = \frac{\pi}{6}$.