MATHS 110C
CHAPITRE I : FONDEMENTS
VERSION PRÉLIMINAIRE

Le but de ce premier chapitre est de faire quelques rappels, ou au moins de préciser certaines notions !

1. Les principales règles du jeu

- Faires des mathématiques, c'est manipuler des objets comme des points, des nombres, des fonctions, ... Ceux-ci sont souvent représentés par des lettres et des symboles. Il est important d'être très précis quand on décide de désigner un objet par une lettre ou un symbole.

Exemple. La lettre x est souvent utilisée pour désigner un réel, mais attention au contexte ! Ainsi, dans l'expression $x^2 + 3x + 2 = 0$, x désigne (si elle existe) une des solutions de l'équation donnée, alors que dans

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 + 3x + 2, \end{array}$$

x désigne un réel quelconque.

- Faire des mathématiques, c'est décrire les propriétés de ces objets à l'aide de propositions mettant en jeu ces objets, des symboles logiques ($\Longleftrightarrow$, $\forall$, $\exists$....), des opérations ($+$, $\times$,....) et des relations ($\leq$, $\geq$, "être paralléle", ...). Encore une fois, il est important d'être précis ! En particulier, attention à la syntaxe et à l'ordre.

Exemples. La proposition $x \geq \mathbb{Q}$ n'a aucun sens. La proposition $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ a un sens, mais est fausse (voir plus loin). La proposition $x \in \mathbb{R}$ a un sens (mathématique), mais est imprécise. Doit-on comprendre pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou pour un certain $x \in \mathbb{R}$? Enfin, la proposition $x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4$ est très différente de la proposition $x^2 > 4 \Longrightarrow x > 2$ (D'ailleurs, une des propositions est vraie, alors que l'autre est fausse. Laquelle est vraie ?). Comparons maintenant les deux propositions suivantes :
(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x < n$.
(ii) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x < n$.
Rappelons que (i) peut "s'écrire en français"
(i bis) Pour tout réel x, il existe un entier naturel n tel que x est inférieur à n.
La différence entre les propositions (i) et (ii) provient juste d'une intervertion entre $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\exists n \in \mathbb{N}$. Pourtant, elles sont loin d'exprimer la même chose ! Ainsi, (i) est vrai (prendre par exemple, pour x fixé, n égal à $E(x) + 1$ où $E(x)$ est la partie entière de x) alors que (ii) signifie que $\mathbb{R}$ est majoré (c'est à dire qu'il existe un réel plus grand que tout autre réel), ce qui est faux. Ecrivons maintenant les négations

de (i) et (ii) :
(non i) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x \geq n$.
(non ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, x \geq n$.
Nous expliquerons plus tard comment utiliser la négation de proposition pour faire des démonstrations.

Exercice. (i) Que peux-on dire d'un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$?
(ii) Même question avec la propriété $\exists n \in \mathbb{N}$, $x = 2n$.

- Faire des mathématiques, c'est trouver de nouvelles propriétés des objets mathématiques à partir des anciennes. L'un des buts d'un mathématicien est de démontrer des théorèmes. Nous allons maintenant décrire un des plus célèbres résultats des mathématiques, à savoir le grand théorème de Fermat.

Théorème 1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Alors, il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y, z tels que $x^n + y^n = z^n$.*

Ce théorème a des hypothèses, c'est à dire n est un entier supérieur à 3. Si ceci n'est pas vérifié, il se peut que le théorème soit faux. Par exemple, si $n = 2$, $x = 3$, $y = 4$ et $z = 5$ satisfont $x^2 + y^2 = z^2$. On dit que (3, 4, 5) est un triplet pythagoricien.

Ce théorème a des conclusions précises. Oublier le "non nuls" dans l'énoncé rend le théorème faux (Pour voir ceci, prendre, $x = 0$ et $y = z$ quelconque).

Ce théorème a une démonstration, et celle-ci est non trivialle ! ! ! ! ! ! ! ! ! Donnons un résumé de l'histoire de ce théorème. Dans la marge de sa traduction du livre "Arithmetica" du mathématicien grec Diophante, Fermat (publié par son fils à titre posthume en 1665) indique qu'il a remarqué que l'énoncé du théorème précédent semble être vrai, mais il ajoute que sa preuve est trop longue pour tenir dans la marge. Cependant, l'absence de preuve écrite fait que le théorème ne pouvait pas être considéré alors comme juste (voir plus bas). Le problème a été résolu en 1996 par Andrew Wiles (aidé par son étudiant Taylor) ! Certains cas particuliers de n vaient été résolus par Fermat ($n = 4$), Euler ($n = 3$, vers 1750), Dirichlet, Legendre ($n = 5$, vers 1820), Lamé ($n = 7$, vers 1835), Kümmer (n premier inférieur à 100, vers 1850). Plus de 300 ans pour résoudre le problème ! Des mathématiciens ont passé toute leur vie à essayer de le résoudre, et sans succés ! Alors, passer 5 minutes à sécher devant un exercice en TD, ce n'est pas finalement si terrible !

Remarque. Une proposition énoncée sans justification ne peut être considérée comme juste (cela sera le cas dans vos copies d'examen ......). Nous avons déja vu qu'avant la preuve de Wiles, le théorème de Fermat n'était pas censé être vrai, et donc utlisable par les mathématiciens. Donnons un autre exemple de problème célèbre qui est lui toujours ouvert. Dans une lettre au grand mathématicien suisse Euler, Christian Goldbach (1690-1764) conjecture que tout nombre pair supérieur à 2 peut être écrit comme somme de deux nombres premiers (c'est à dire des nombres divisibles seulement par 1 et par eux-mêmes, par exemple 17). Nous ne savons toujours pas si cet énoncé est vrai. Il porte donc le nom de conjecture de Goldbach, et non de théorème de Goldbach.

Pour plus de détails sur le Grand Théorème de Fermat et la conjecture de Goldbach, nous renvoyons au livre “Merveilleux Nombres Premiers” de J.P. Delahaye (Belin-Pour La Science), et pour des versions plus amusantes aux romans “Le théorème du Perroquet” de D. Guedj (Points-Seuil) et “Oncle Petros et la Conjecture de Goldbach” de A. Doxiadis (Points-Seuil) dont l'éditeur anglo-saxon offre une récompense d'un million de dollars à toute personne qui résoudra la conjecture de Goldbach !

Nous allons maintenant décrire des objets mathématiques que nous utiliserons trés souvent, à savoir les nombres.

2. Ensemble de nombres

Commençons par quelques rappels succincts de théorie des ensembles. Il y a (grosso modo) deux façons de définir un ensemble.

- En extension, quand on connait tous les éléments de l'ensemble. Par exemple, $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 3, 5, 7, ...\}$.
- En compréhension, quand on connait une propriété qui caractérise l'ensemble. Par exemple, $F = \{x \in \mathbb{N}; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = 2n + 1\}$ (L'ensemble F est le même qu'au dessus) et $G = \{x \in \mathbb{R}; x^2 = \sin x\}$.

Rappelons que $x \in \mathbb{N}$ signifie que x appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$.
Exercice. Montrer que

$$\{x \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{1}{n} \leq x \leq 1\} =]0, 1].$$

Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. On peut définir sur $\mathcal{P}(E)$ les opérations suivantes.

- Union : $A \cup B = \{x \in E; x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- Intersection : $A \cap B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- Complémentaire : $A^c = \{x \in E; x \notin A\}$.

Si A et B sont deux sous-ensembles de l'ensemble E, $A \subset B$ signifie que pour tout $x \in A$, $x \in B$. Ainsi, l'égalité $A = B$ est équivalente aux deux inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$. Utilisons cette remarque pour montrer que les ensembles $A = \{x \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{1}{n} \leq x \leq 1\}$ et $B =]0, 1]$ coincident (solution de l'exercice ci-dessus). Nous rappelerons plus tard que $]0, 1] = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x \leq 1\}$. Montrons la première inclusion et pour cela, considérons $x \in A$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$. Comme $\frac{1}{n} > 0$, on en déduit que $0 < x \leq 1$, donc $x \in B$. D'où, $A \subset B$. Montrons maintenant l'inclusion inverse. Soit $x \in B$. Alors, si on note n la partie entière de $\frac{1}{x}$, $n \leq \frac{1}{x} < n+1$. On en déduit $\frac{1}{n+1} \leq x \leq 1$. Donc, $x \in A$. D'où, $B \subset A$, puis $A = B$.

On note $\emptyset$ le sous-ensemble (appelé ensemble vide) de l'ensemble E ne contenant aucun élément. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.
Remarque. Attention à ne pas confondre $\in$ et $\subset$! Par exemple, si A est un sous-ensemble de l'ensemble E, alors $A \in \mathcal{P}(E)$ mais $A \subset E$.

Terminons ces rappels de théorie des ensembles par quelques propriétés des opérations (dont nous laissons la démonstration aux lecteurs comme exercice). Si A, B et C sont des sous-ensembles de l'ensemble E, alors

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c, \\ (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

Décrivons maintenant trés rapidement les ensembles de nombres.

Ensemble des entiers naturels (noté $\mathbb{N}$)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}.$$

En partculier, $\mathbb{N}$ contient les entiers pairs et impairs, ainsi que les nombres premiers (c'est à dire les entiers naturels divisibles seulement par 1 et par eux-mêmes).

Ensemble des entiers relatifs (noté $\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \{...., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Ensemble des rationnels (noté $\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Ensemble des réels (noté $\mathbb{R}$)

Qui est $\mathbb{R}$? L'ensemble de tous les nombres que l'on rencontre dans la nature ? Cette définition est beaucoup trop floue pour pouvoir être utilisée en mathématiques ! Une construction rigoureuse de $\mathbb{R}$ (comme celles proposées par Cantor, Heine, Méray ou Dedekind vers 1872) serait trop longue pour être présentée ici. Pour simplifier, disons que $\mathbb{R}$ complète $\mathbb{Q}$, au sens où $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ mais aussi les limites de suites dans $\mathbb{Q}$. Une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ est qu'il possède une relation d'ordre, c'est à dire que l'on peut comparer deux réels. Ainsi, si x et y sont deux réels, $x \geq y$ signifie que x et y sont égaux ou que x est plus grand que y. Nous ne rappelerons pas les principales propriétés de la relation $\geq$. Insistons plutot sur celle qui est une grande source d'erreur :
Soient x, $y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda \geq 0$, alors $\lambda.x \leq \lambda.y$.
Cepndant, si $\lambda < 0$ et si $x \leq y$, $\lambda.x \geq \lambda.y$ (c'est à dire l'ordre est inversé !).

Exercice. Soient x, $y \in \mathbb{R}$ avec

$$1 \leq x < 3 \text{ et } -1 < y \leq 1.$$

Donner des encadrements de $x+y$, xy, $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{y}$.

Soient a, $b \in \mathbb{R}$. On définit les intervalles (ouverts, fermés, semi-ouverts)

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}.$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}.$$
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}.$$
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}.$$

De même, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}.$$
$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x > a\}.$$
$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}.$$
$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}; x < a\}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit sa valeur absolue, notée $|x|$, par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En d'autres termes, $|x| = \max(x, -x)$, où $\max(x, -x)$ désigne le plus grand entre x et $-x$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$ et $|x| = |-x|$. Notons, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$. Nous pouvons définir la distance $d(x, y)$ entre deux réels x et y par $|x - y|$. Cette distance vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq |x| + |y|.$$

(que l'on peut aussi écrire $|x + y| \leq |x| + |y|$). Faites un dessin pour voir que $d(x, y)$ désigne bien la distance que vous imaginez sur la droite réelle et pour voir que l'inégalité triangulaire signifie que pour aller de x à y, il est certainement plus court d'aller directement de x à y plutot que de passer par 0.

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que M est un majorant de A (respectivement m est un minorant de A) si, pour tout $a \in A$, $a \leq M$ (respectivement $a \geq m$). Si A admet un majorant (respectivement un minorant), alors on dit que A est majoré (respectivement minoré). Si A est à la fois majoré et minoré, on dit que A est borné. Notons qu'en général un majorant (s'il existe) n'est pas unique et n'est pas obligatoirement dans l'ensemble. Par exemple, 1 et 2 sont des majorants de $A = [0, 1[$.
Le plus grand élément de A (respectivement le plus petit élément de A) est un majorant de A (respectivement un minorant de A) qui appartient à A. Le plus grand élément et le plus petit élément, s'ils existent, sont uniques. Attention, ils n'existent pas toujours ! Pour le voir, considérer le cas de $A =]0, 1[$.
La borne supérieur de A (respectivement la borne inférieure) est le plus petit des majorants de A (respectivement le plus grand des minorants). Une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ est que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est non vide et majoré (respectivement minoré) admet une borne supérieure (respectivement une borne inférieure). Par exemple, l'ensemble $A = [0, 1[$ est borné, sa borne inférieure est 0 et sa borne

supérieure est 1.

Terminons par une inégalité utile en pratique. Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq xy.$$

En effet, étudions le signe de la différence $\frac{1}{2}(x^2+y^2) - xy$ (ce qui est une méthode classique pour démontrer une inégalité).

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) - xy = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2-2xy\right) = \frac{1}{2}(x-y)^2 \geq 0.$$

D'où, le résultat annoncé.

Ensemble des nombres complexes (noté $\mathbb{C}$)

$$\mathbb{C} = \{z = x+iy; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

où i satisfait $i^2 = -1$. Soit le nombre complexe $z = x+iy$, alors x est la partie réelle de z (noté $\mathrm{Re}(z)$) et y est sa partie imaginaire (noté $\mathrm{Im}(z)$). En particulier, z appartient à $\mathbb{R}$ si et seulement sa partie imaginaire est nulle. Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé imaginaire pure. Par exemple, i est un imaginaire pur. Dans un repére orthonormé (O, i, j), le nombre complexe $z = x+iy$ est représenté par le point M de coordonnées (x, y) et on dit que z est l'affixe de M. Les points dont l'affixe est réel sont sur l'axe $0x$, ceux dont l'affixe est un imaginaire pur sont sur l'axe des Oy. Tout nombre complexe $z = x+iy$ (écriture algébrique) non nul peut aussi s'écrire $z = re^{i\theta}$ (écriture trigonométrique) où $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, et $e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Dans ce cas, r est le module de z (noté $|z|$) et θ est son argument (noté $\arg z$ et défini à 2π prés). Si M est le point d'affixe $z = re^{i\theta}$, r représente la distance OM et θ est l'angle que fait OM avec l'axe $0x$. On peut vérifier que le module de $z = x+iy$ est donné par $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Un nombre complexe de module 1 est de la forme $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$).
Exemples. 1 est de module 1 et d'argument 0, alors que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Considérons maintenant le nombre complexe $z = 2+2i$. Alors, $|z| = 2\sqrt{2}$. Donc,

$$z = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Comme $(re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$ et $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$, on a

$$|zz'| = |z||z'|, \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, \ \mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(z'), \ \mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \mathrm{Arg}(z)-\mathrm{Arg}(z').$$

Notons que si z est réel, le module de z est égal à sa valeur absolue. Nous pouvons définir la distance $d(z, z')$ entre deux nombres complexes z et z' par $d(z, z') = |z-z'|$ (qui est aussi la distance entre deux points du plan d'affixe z et z'). Cette distance satisfait l'inégalité triangulaire (qui traduit le vieil adage populaire "le plus court chemin pour aller d'un point à une autre est la ligne droite") :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, \forall z'' \in \mathbb{C}, d(z,z') \leq d(z,z'') + d(z'',z').$$

Cette formule découle de l'inégalité triangulaire pour le module :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, |z+z'| \leq |z| + |z'|.$$

En effet,

$$d(z,z') = |z-z'| = |(z-z'') + (z''-z')| \leq |z-z''| + |z''-z'| = d(z,z'') + d(z'',z').$$

Rappelons maintenant deux formules trés utiles en pratique. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\textit{Formule de Moivre :}\ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Cette formule peut aussi s'écrire $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, et c'est sous cette forme que nous l'utiliserons le plus souvent.

$$\textit{Formule d'Euler :}\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Cette formule découle des deux égalités (1) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et (2) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$. En effet, (1)+(2) donne $e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ et (1)−(2) donne $e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2\sin\theta$, d'où, les formules d'Euler.

Donnons deux applications.

(a) Linéarisons $\cos^3\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$). D'après la formule d'Euler, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$. D'où,

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left((e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta}) + 3(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\right).
\end{aligned}$$

En utilisant les formules d'Euler, on en déduit

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \frac{1}{8}(2\cos 3\theta + 6\cos\theta) \\
&= \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta.
\end{aligned}$$

Ce genre de linéarisation nous sera trés utile pour calculer des primitives (voir chapitre "Intégration").

(b) Exprimons $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$. D'après la formule de Moivre, $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$. D'où, $\cos 3\theta = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^3\right)$. Or,

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3(\cos\theta)^2(i\sin\theta) + 3(\cos\theta)(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3 \\
&= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta.
\end{aligned}$$

D'où, $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$.

Soit le nombre complexe $z = x + iy$. Son conjugué est le nombre complexe noté $\overline{z}$ donné par $\overline{z} = x - iy$. Géométriquement, le point d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe $0x$ du point d'affixe z. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que si $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z.\overline{z}$. Utilisons cette remarque pour écrire sous forme algébrique le nombre complexe $z = \dfrac{2+i}{1-i}$, en effet $z = \dfrac{(2+i)(1+i)}{2} = \dfrac{1+3i}{2}$.
Remarquons aussi que si $z \in \mathbb{C}$, $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$. Nous en déduisons que sont équivalentes les propositions suivantes (pour $z \in \mathbb{C}^*$).
(i) z est réel.
(ii) $z - \overline{z} = 0$.
(iii $\mathrm{Arg}(z) = k.\pi$, $k \in \{0, 1\}$.
Notons que $z \in \mathbb{R}^{+*}$ (respectivement $z \in \mathbb{R}^{-*}$) si et seulement si $\mathrm{Arg}(z) = 0$ (respectivement $\mathrm{Arg}(z) = \pi$). De même, sont équivalentes les propositions suivantes.
(i) z est imaginaire pur.
(ii) $z + \overline{z} = 0$.
(iii $\mathrm{Arg}(z) = (2k+1).\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \{0, 1\}$.
Enfin, notons que si $z = re^{i\theta}$, $\overline{z} = re^{-i\theta}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle racine n-ième de l'unité toute solution de l'équation $z^n = 1$. En fait, il existe n racines n-ièmes de l'unité et elles sont données par $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k = 0, .., n-1$. En effet, notons que si $z^n = 1$, alors $|z|^n = 1$, d'où $|z| = 1$. Cherchons donc les racines n-ièmes de l'unité sous la forme $z = e^{i\theta}$. Alors,

$$z^n = 1 \iff e^{in\theta} = 1 \iff n\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

D'où, les racines n-ièmes de l'unité sont de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Notons que pour $k = n$, nous obtenons le même résultat que pour $k = 0$, que pour $k = n+1$, nous obtenons le même résultat que pour $k = 1$, ... D'où le résultat annoncé. On en déduit que l'équation $z^n = c$ (où $c = r.e^{i\phi}$) admet n solutions qui sont de la forme $r^{\dfrac{1}{n}}.e^{\frac{\phi + 2ik\pi}{n}}$, $k = 0, ..., n-1$.

Exemple. Résolvons $z^3 = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$ dans $\mathbb{C}$. Comme $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 8e^{i\dfrac{\pi}{4}}$, les solutions sont de la forme

$$z = 8^{\frac{1}{3}} e^{i\dfrac{\pi}{12} + 2ik\dfrac{\pi}{3}} = 2e^{i\dfrac{\pi}{12} + 2ik\dfrac{\pi}{3}} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

D'où, les solution de notre équation sont

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{12}}, \ z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, \ z_2 = 2e^{i\frac{17\pi}{12}}.$$

Dans le cas particulier $n = 2$, nous n'avons pas besoin de mettre le second membre sous forme trigonométrique (ce qui n'est pas toujours facile !). Ainsi, on pourra vérifier que si $Z = a + ib$, résoudre l'équation $z^2 = Z$ (en posant $z = x + iy$) est équivalent à

résoudre le système
$$\begin{cases} (1)\ x^2 - y^2 = a, \\ (2)\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}, \\ (3)\ 2xy = b. \end{cases}$$
Les équations (1) et (3) viennent en identifiant les parties réelles et imaginaires de l'égalité $(x+iy)^2 = a+ib$, l'équation (2) vient de $|z|^2 = |Z|$. En pratique, (3) permet d'avoir le signe de y, une fois celui de x choisi.
Exemple. Soit $Z = -3+4i$. Cherchons tous les $z = x+iy$ tels que $z^2 = Z$. On doit donc résoudre le système
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ x^2 + y^2 = 5, \\ 2xy = 4. \end{cases}$$
Ce système est équivalent au système
$$\begin{cases} x^2 = 1, \\ y^2 = 4, \\ 2xy = 4. \end{cases}$$
Comme x et y doivent avoir le même signe d'après la dernière équation, on en déduit que les "racines carrées" de Z sont
$$z_1 = 1+2i \text{ et } z_2 = -1-2i.$$

Considérons maintenant l'équation (E) $az^2+bz+c=0$ où les coefficients a, b et c sont complexes. Comme dans le cas réel, le discriminant Δ de cette équation est le nombre (complexe) $\Delta = b^2-4ac$. Choisissons $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors, les solutions de (E) sont données par
$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}.$$
En effet, il suffit de remarquer que
$$az^2+bz+c = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = \left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right).$$
Remarques.
1) Si nous choisissons l'autre "racine carrée" de Δ, c'est à dire $-\delta$, nous pouvons constater que les solutions obtenues sont bien les mêmes.
2) Considérons le cas particulier où a, b et c sont réels (ce cas a été vu en Terminale). Dans ce cas, Δ est réel. Si $\Delta \geq 0$, alors $\delta = \sqrt{\Delta}$ convient et nous retrouvons les formules usuelles dans $\mathbb{R}$ pour la résolution d'une équation du second degré. Si $\Delta < 0$, alors $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ convient et les formules précédentes nous donnent les solutions (conjuguées l'une de l'autre) :
$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple. Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-3z+3-i=0$. Son discriminant est $\Delta=-3+4i$. Une racine carrée est, d'après l'exemple précédent, $\delta=1+2i$. Donc, les solutions de l'équation sont $1+i$ et $2-i$.

Terminons par un résultat trés important (mais hors programme pour nous).
Théorème Fondamental de l'Algèbre. Tout polynôme dans $\mathbb{C}$ de degré n admet exactement n racines (distinctes ou non).
La situation est trés différente dans $\mathbb{R}$, car un polynôme de degré dans $\mathbb{R}$ peut avoir deux racines (distinctes ou non) ou aucune racine.

3. Exemples de raisonnements mathématiques

La méthode directe consiste à partir d'une hypothèse et d'arriver à la conclusion par une suite de déductions (justifiées!!!!!).

Exemple. Montrons que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction croissante et si $\lambda>0$, alors la fonction $\lambda.f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est croissante (voir le chapitre 2 pour des rappels sur les fonctions). Soient x, $y\in\mathbb{R}$ tels que $x\leq y$. Comme f est croissante, $f(x)\leq f(y)$. De plus, puisque $\lambda>0$, on en déduit $\lambda.f(x)\leq\lambda.f(y)$. Comme ceci est vraie pour tout x, $y\in\mathbb{R}$ avec $x\leq y$, la fonction $\lambda.f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est croissante.

Un autre raisonnement classique est le raisonnement par l'absurde. On part du contraire de la conclusion et on arrive à une contradiction. D'où, la conclusion est vraie.

Exemple. Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Supposons donc que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est à dire $\sqrt{2}$ peut s'écrire comme une fraction irréductible. Ainsi, il existe $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}^*$ avec p et q premier entre eux (c'est à dire sans diviseur commun) tels que $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$. Alors, $p^2=2q$. Ceci implique que p^2, et donc p, est pair. D'où, il existe $r\in\mathbb{N}$ tel que $p=2r$. On en déduit que $4r^2=2q^2$, soit encore $2r^2=q^2$. Donc, q^2 et q sont pairs. Il en résulte que p et q ont un diviseur commun (à savoir 2). Ce qui est contraire à notre hypothèse de départ sur p et q. Donc, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Un autre raisonnement classique est le raisonnement par récurrence. On l'utilise quand on veut montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang). Le plan de la preuve est :
- On vérifie que $P(0)$ est vraie.
- On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$ et on montre que $P(n+1)$ est vraie.
- On en conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Ce plan de preuve se modifie aisément quand on veut montrer qu'une propriété est vraie seulement à partir d'une certain rang.

Exercice. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.

On peut aussi utiliser des négations de phrase. Par exemple, pour montrer que la proposition P est vraie (respectivement fausse), on démontre que la proposition non$P$ est fausse (respectivement vraie).

Exemple. La proposition (*) $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1 \Longleftarrow x^2 < 1$ est-elle vraie ? La négation de (*) est la proposition suivante

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x < 1 \text{ et } x^2 \geq 1.$$

Or cette proposition est vraie. En effet, $x = -2$ convient. Donc, (*) est fausse.

Un autre argument qui utilise la négation est le raisonnement par contraposée. Ici, pour montrer que la proposition P implique la proposition Q, on montre que non$Q$ implique non$P$.

Exemple. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrons que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.
(a) La négation de la dernière proposition est "n est non premier". Supposons donc n ne soit pas premier. Donc, il existe des entiers p et q différents de 1 et n, tels que $n = pq$. On a alors

$$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)(1 + 2^p .... + 2^{p(q-1)}).$$

La dernière égalité vient de (voir exercice 9 à la fin du chapitre)

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall a \neq 1,\ 1 + a + ... + a^m = \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a},$$

que l'on applique à $a = 2^p$ et $m = q - 1$.

Comme $p \neq 1$ et $p \neq n$, $2^p - 1$ est un diviseur de $2^n - 1$ différent de 1 et de $2^n - 1$. Donc, $2^n - 1$ n'est pas premier.
(b) Considérons maintenant un entier n supérieur à 2 tel que $2^n - 1$ soit premier. Il y a deux cas pour n : n est premier ou n n'est pas premier. Le deuxième cas est impossible d'après (a). Donc, n est premier.

Terminons par un raisonnement par disjonction des cas. Ici, pour montrer que $x \in A$ vérifie la propriété P, on considère toutes les possibilités pour x.
Exemple. Soient x et a deux réels. Montrons que si a est non nul et que (*) $|x-a| < |a|$, alors x est de même signe que a (voir l'exercice 11 donné à la fin du chapitre).
Notons que $x \neq 0$, car sinon, d'après (*), $|a| = |x - a| < |a|$, ce qui est absurde.
<u>Cas 1 : $a > 0$:</u> Alors, $|a| = a$. D'où,

$$|x - a| < |a| \Longleftrightarrow |x - a| < a \Longleftrightarrow -a < x - a < a \Longleftrightarrow 0 < x < 2a.$$

Donc, $x > 0$, c'est à dire x est du signe de a.
<u>Cas 2 : $a < 0$:</u> Alors, $|a| = -a$. D'où,

$$|x - a| < |a| \Longleftrightarrow |x - a| < -a \Longleftrightarrow a < x - a < -a \Longleftrightarrow 2a < x < 0.$$

Donc, $x < 0$, c'est à dire x est du signe de a.

Comme $x \neq 0$ vérifie $x > 0$ ou $x < 0$, on conclut que tout x qui vérifie (*) est du signe de a.

4. Quelques points d'histoire

Une des premières démonstrations par récurrence est donnée par Pascal en 1654, quand il prouve la formle du binôme (c'est à dire la formule donnant le développement $(a+b)^n$ en fonction des puissances de a et b).

L'utilisation de lettre pour désigner les inconnues (d'une équation par exemple) devient quelque peu systématique après les travaux de F. Viète (1540-1603). La logique symbolique que nous avons rencontré au début de ce chapitre a son origine dans les oeuvres du philosophe allemand E. Kant. D'un point de vue plus mathématique, elle a été surtout développée à partir des travaux de G. Boole vers 1847.

Les premières constructions satisfaisantes de $\mathbb{R}$ sont dus (de façon indépendante) à Cantor, Dedekind, Heine et Méray en 1872. Grâce à ces constructions, l'analyse a été mise sur la voie de la rigueur et des démontsrations indiscutables de "gros" théorèmes, connus depuis longtemps, comme le théorème des valeurs intermédiaires, ont ainsi pu être donnés.

Les nombres complexes apparaissent au XVIe siècle dans les travaux de mathématiciens italiens, alors que leurs contemporains ont du mal à accepter la notion de nombres négatifs ! J. Cardan, S. Del Ferro, R. Bombelli entre autres les utilisent comme objets abstraits intermédiaires pour résoudre des équations du troisième ou quatrième degré (mais à solutions réelles). Ils sont d'ailleurs appelés "nombres impossibles" par Bombelli qui, dès 1572, introduit un équivalent du nombre i. A la fin du XVIIIe siècle, l'usage des nombres complexes devient courant, mais il faut attendre le XIXe siècle et les travaux de Cauchy par exemple pour que les nombres complexes deviennent des objets mathématiques reconnus. La formule de Moivre est due à ... A. Moivre (1667-1754) et celle d'Euler à un des plus grands mathématiciens de l'époque, L. Euler à qui nous devons la notation i. L'idée de représenter un nombre complexe a été défendue en particulier par R. Arguand qui en 1806 introduit aussi la notion de module. K. Weierstrass introduira la notation $|z|$, alors que la notion d'argument est due à A. L. Cauchy en 1847.

5. Quelques exercices

Exercice 1. *Dans les expressions suivantes, on demande de :*
1. Vérifier qu'elles sont correctement écrites.
2. Dire s'il s'agit de terme ou de proposition.
3. S'il s'agit d'une proposition ne dépendant pas d'une variable, dire si elle est vraie

ou fausse.

$(2+3\sin =$	$\exists x \in \mathbb{N},\ x^2=4$	$x-x<(2>3)$
$1+\mathbb{R}=2$	$A\subset\emptyset$	$1+(x+(y^{1-x}+3)$
$f(x^2)=1-f$	$\exists x\in\mathbb{R},\ (1-x)^2=1-2x+x^2$	$\forall n\in\mathbb{N},\exists m\in\mathbb{N},\ n=2m$
$1+\sqrt{2+\sqrt{3+}}$	$\forall n\in\mathbb{N},\ n\leq p$	$1+(2+(3+(4+(5+\sqrt{2}))))$
$A\subset B=\emptyset$		

Exercice 2. *Ecrire les assertions suivantes et leurs négations avec des quantificateurs (on pourra noter M (resp. F)) l'ensemble des mathématiciens (resp. farceurs)).*

(1) *Les mathématiciens sont tous des farceurs.*

(2) *Les mathématiciens ne sont jamais des farceurs.*

(3) *Il y a des mathématiciens qui ne sont pas des farceurs.*

(4) *Il y a des farceurs qui ne sont pas des mathématiciens.*

(5) *Certains mathématiciens sont des farceurs.*

Exercice 3. *Ecrire les assertions suivantes et leurs négations avec des quantificateurs. Dans chaque cas, dire si l'assertion est vraie ou fausse et le justifier.*

(1) *Tout entier naturel, divisible par* 6, *est divisible par* 3.

(2) *Tout entier naturel, divisible par* 2 *et par* 3, *est divisible par* 6.

(3) *Tout entier naturel, divisible par* 2 *et par* 14, *est divisible par* 28.

Exercice 4. *Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune des propriétés suivantes, écrire sa négation et illustrer graphiquement la propriété et sa négation.*

(1) $\forall i\in\{1,2,3\},\exists a\in\mathbb{R}, f_i(a)=1$

(2) $\exists i\in\{1,2,3\}/\forall a\in\mathbb{R}, f_i(a)=1$

(3) $\exists a\in\mathbb{R}/\forall i\in\{1,2,3\}, f_i(a)=1$

(4) $\forall a\in\mathbb{R},\forall i\in\{1,2,3\}, f_i(a)=1$

Exercice 5. *Placer les symboles $\Leftarrow,\Rightarrow,\Longleftrightarrow$ qui conviennent entre les propositions et écrire les contraposées des implications.*

(1) *(a)* $x\leq 0$ *(b)* $x<0$

(2) *(a)* $|x-x_0|<\alpha$ *(b)*$x<x_0+\alpha$

(3) *(a)* $\forall x, x$ *vérifie la propriété* P *(b)*$\exists x, x$ *vérifie la propriété* P

(4) *(a)* $A\cap B=A$ *(b)* $A\subset B$

(5) *(a)* $A\cup B=A$ *(b)* $B\subset A$

Exercice 6. *Dire si (b) est une condition nécessaire, suffisante ou nécessaire et suffisante de (a).*
(a) $x^2\geq x$ *(b)* $x\geq 1$
(a) n *est impair* *(b)* n^2 *est impair*
(a) $\forall n\in\mathbb{N}, x\geq n$ *(b)* $x\geq 10^{10}$

Exercice 7. *Prendre la négation des phrases suivantes :*

(1) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < n+1$

(2) $\forall a \in A, \exists b \in B, a < b^2$ *et* $a \leq b^3 + 1$

(3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| < \alpha \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$

Traduire à l'aide de quantificateurs $\exists! x\ P(x)$ *qui signifie « il existe un et un seul* x *tel que* $P(x)$*».*

Exercice 8. *On considère l'équation suivante notée (E).*

$$(x^2 + 2x - 24)(2x^2 - 13x + 15) = 0$$

Soient $\mathcal{S}$ *l'ensemble des solutions de (E) et* A *et* B *les ensembles des solutions des équations* $x^2 + 2x - 24 = 0$ *et* $2x^2 - 13x + 15 = 0$*. Dire si les phrases mathématiques suivantes sont vraies ou fausses :*

$$\mathcal{S} = A \cap B, \qquad \mathcal{S} = A \cup B, \qquad \mathcal{S} \subset \mathbb{Z},$$
$$\mathcal{S} \subset \mathbb{Q}, \qquad \mathcal{S} \cap]0, 2[= \emptyset,$$

Exercice 9. *Montrer, par récurrence :*

$$\textit{Pour tout réel } q \neq 1, \quad 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1 \times 2) + (2 \times 3) + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 9 \textit{ divise } 10^n - 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^3 - n}{3} \in \mathbb{N}. \quad (\textit{ écrire } u_{n+1} - u_n)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leq n |\sin x|$$

Exercice 10. *1) Le nombre* $y = 3,21575757....$ *est-il rationnel ?*
2) Montrer qu'un nombre réel x *est rationnel si et seulement si son écriture décimale est périodique.*

Exercice 11. *Soient* a *et* x *des nombres réels. Supposons que* a *est non nul et que l'on a* $|x - a| < |a|$*. Montrer que* x *est non nul et que* x *est de même signe que* a*.*

Exercice 12. *1) Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes.*

(1) $3x^2 + 4x + 3 = 4x^2 - 3x + 4.$

(2) $\dfrac{3x + 4}{4x + 2} = x.$

(3) $\dfrac{2x + 1}{3x - 4} = \dfrac{x + 1}{x - 1}.$

(4) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{x-3}$.

(5) $x^3+4x^2-5x=0$.

(6) $(x-1)(x^2+2x+2)=x-1$.

2) Résoudre et discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation :

$$(m+2)x^2+2(2m+3)x+5m+6=0.$$

Exercice 13. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :*

(1) $2x^2-3x+4<4x^2+2x+9$.

(2) $\dfrac{2x+1}{3x+2}<0$.

(3) $2x^3-5x^2+3x\leq 0$.

(4) $(x+2)(x^2-3x+9)>x+2$.

(5) $\dfrac{1}{x}>x$.

(6) $\dfrac{1}{x^2-1}<\dfrac{1}{x}$.

(7) $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+1}\leq 4$.

(8) $||2x+3|-|x+5||\leq |x+1|$.

Exercice 14. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :*

(1) $\sqrt{x^2-2x+3}\leq x-1$

(2) $\sqrt{x-1}>2-\sqrt{x}$

(3) $|x-3|>|2x+1|$

Exercice 15. *1) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, tout $y\in\mathbb{R}$,*

$$xy\leq (1/2)(x^2+y^2).$$

2) Montrer que, pour tout réel $x>0$,

$$\frac{1}{1+x}\leq\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\leq\frac{1}{x}.$$

Exercice 16. *1) En 2002, une entreprise commercialise un nouveau produit, elle veut doubler en deux ans le chiffre des ventes de ce produit. Quel doit être le taux annuel moyen d'augmentation de ses ventes pour réaliser cet objectif ?*
2) Un cultivateur possède un terrain rectangulaire de $11000m^2$. Dans le cadre du remembrement, on le lui échange contre un terrain rectangulaire de même aire dont la longueur est plus petite de $15m$ et la largeur plus grande de $12m$. Déterminer les dimensions des deux terrains.

Exercice 17. *Une urne contient trois boules blanches et des boules noires. On tire successivement et au hasard deux boules de l'urne, sans remettre la première dans l'urne avant de tirer la seconde. On note p la probabilité de tirer deux boules blanches. Combien l'urne doit-elle contenir de boules noires pour que p soit inférieur ou égal à* $0,5$.

Exercice 18. *Représenter dans le plan l'ensemble des points dont les coordonnées* (x, y) *vérifient :*

$$|x-1| + |y-1| \leq 2$$

Rappel :
L'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) *satisfont une inégalité de la forme :* $ax+by+c \leq 0$ *où* $(a, b) \neq (0, 0)$ *est un des demi-plans limités par la droite* $ax+by+c = 0$.

Exercice 19. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{2x+5}{x+2}$ *est plus près de* $\sqrt{5}$ *que* x *ne l'est.*

Exercice 20. *Le prix de vente d'un article subit une baisse de 20 pour cent pendant les soldes. Les soldes terminés, il revient à son prix d'origine. Quel est le pourcentage de l'augmentation ?*

Exercice 21. *Un verger contient 100 pommiers. Chaque pommier produit environ 500 pommes. On constate expérimentalement que chaque pommier supplémentaire diminue en moyenne le rendement de chaque arbre du verger de* $1,25$ *pour cent. Déterminer le nombre de pommiers qu'il faut planter pour que le rendement du verger soit maximum.*

Exercice 22. *Un restaurant vend des coupes de crème glacée de deux sortes :*
- L'Ardéchoise avec une boule de glace à la vanille et deux boules de glace au marron.
- Le Mont-Blanc avec deux boules de glace à la vanille et une boule de glace au marron.
Pour sa soirée, ce restaurant a de quoi faire 16 boules de glace à la vanille et 14 boules de glace au marron. Le patron du restaurant se demande combien de coupes de chaque sorte il peut faire. Pouvez-vous l'aider ?

Exercice 23. *Un commerçant a l'intention d'acheter des lots de vêtements. Il a le choix entre des lots de type A contenant 1 manteau, 2 robes et 3 tailleurs, et des lots de type B comportant 2 manteaux, 2 robes et 1 tailleur. Le commerçant souhaite acquérir 40 manteaux, 60 robes et 60 tailleurs. Sachant qu'un lot de type A coute 2000 euros et qu'un lot de type B coute 1500 euros, aider grâce à une étude graphique le commerçant faire son choix.*

Exercice 24. *a) Montrer que le nombre* $(1+2i)(2-3i)(2+i)(3-2i)$ *est réel.*
b) On donne $z = 3 - 2i$. *Déterminer les parties réelles et imaginaires de l'inverse de* z.
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *les équations* $(1+2i)z-3+5i = 0$, $2z+3\overline{z} = 5$, $\overline{z}^2+2|z|^2-3 = 0$.

Exercice 25. *a) Calculer le module et l'argument de* $1 + i\sqrt{3}$, $2i(1+i)(1+i\sqrt{3})$, $\dfrac{-3\sqrt{3}-3i}{1+i}$.

b) Calculer $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{1995}$.

c) Calculer le module et l'argument de $z = (1+i\sqrt{3})/(\sqrt{3}+i)$. *En déduire* z^6.

d) Soit $z = (5+11i\sqrt{3})/(7-4i\sqrt{3})$. *Calculer le module et l'argument de* z.

e) Soit $z = \dfrac{1+2i}{3-i}$. *Calculer le module de* z, *de* $\overline{z}$ *et de* $3iz$.

f) Montrer que $|z| = 1$ *si et seulement si* $\overline{z} = 1/z$.

Exercice 26. *Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants*

$$ie^{i\theta} \quad 1+e^{i\theta} \quad e^{i\theta}+e^{i\phi} \quad (\theta, \phi \in [0, 2\pi]).$$

Exercice 27. *Montrer sans trop de calculs que* $(-1+i)^{11} = 32+32i$.

Exercice 28. *Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants*

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 3\}$$

$$A_2 = \{z \in \mathbb{C}; Arg(z) = \pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$A_3 = \{z \in \mathbb{C}; z - \overline{z} = 2\}$$

$$A_4 = \{z \in \mathbb{C}; \left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1\}$$

$$A_5 = \{z \in \mathbb{C}; z + \overline{z} = 2|z-1|\}.$$

Exercice 29. *a) Calculer les racines carrées de*

$$-7 \quad 8i \quad -2i \quad 1-i \quad -3+4i \quad 1+i\sqrt{3} \quad 5-12i.$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *les équations suivantes*

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 5 &= 0 \\ z^2 + (4-6i)z - 5 - 14i &= 0 \\ z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) &= 0 \\ z^{2n} - (2\cos\phi)z^n + 1 &= 0 \ (\phi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

c1) Montrer que l'équation

$$(E)\ 2z^3 - (7+2i)z^2 + (11+i)z - 4 = 0$$

admet une unique solution réelle, puis résoudre (E).

c2) Montrer que l'équation

$$(E)\ z^3 + (-2-3i)z^2 + 3(1+2i)z - 9i = 0$$

admet une unique solution imaginaire pure, puis résoudre (E).

c3) Montrer que l'équation

$$(E)\ z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = 0$$

admet une solution réelle et une solution imaginaire pure, puis résoudre (E). Montrer que les points dont les affixes sont les solutions de (E) sont alignés.

d) Soit l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *définie par* $f(z) = 13z^2 - 24z + 13$. *Résoudre* $f(z) = 0$, *puis en déduire une factorisation de* $f(z)$.

e) Quels sont les nombres complexes dont le carré est égal au conjugué.
f) Déterminer les nombres complexes (non nuls) z tels que z, $1/z$ et $1 - z$ aient le même module.

Exercice 30. *a) Soit* z *un nombre complexe. Notons* A, B *et* C *les points du plan d'affixes respectives* z, z^2, z^3. *Quel est l'ensemble des points* A *tels que le triangle* ABC *soit rectangle en* A.
b) Quel est l'ensemble des points M *d'affixe* z *tels que* M *soit aligné avec les points d'affixes* i *et* iz.

Exercice 31. *a) Exprimer en fonction de* $\sin\theta$ *et* $\cos\theta$

$$\cos 2\theta \qquad \sin 2\theta \qquad \cos 3\theta \qquad \sin 4\theta \qquad \sin 6\theta.$$

b) Linéariser

$$\cos^2\theta \qquad \sin^2\theta \qquad \cos^3\theta \qquad \sin^4\theta \qquad \sin^2\theta\cos^3\theta.$$

Exercice 32. *Soit* $z_1 = 1 + i$ *et* $z_2 = \sqrt{2} - i$.
a) Calculer les modules et arguments de z_1 *et* z_2.
b) Donner la forme algébrique et trigonométrique du produit $z_1.z_2$.
c) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ *et* $\sin(\pi/12)$.

Exercice 33. *Calculer les racines* 4^{iemes} *de* -1 *et les racines* 5^{iemes} *de* $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 34. *a) Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^5 - 1 = 0$ *et représenter les solutions.*
b) On pose $u = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. *Montrer que* $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$.
c) Vérifier que

$$\begin{aligned} u + u^4 &= 2\cos\frac{2\pi}{5} \\ u^2 + u^3 &= 2\cos\frac{4\pi}{5}. \end{aligned}$$

d) En déduire que $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ *est solution de l'équation* $4x^2 + 2x - 1 = 0$, *puis calculer* $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ *et* $\cos\dfrac{4\pi}{5}$.