COURS DE MAITRISE
ESPACES FONCTIONNELS ET OPÉRATEURS
CHAPITRE II : OPÉRATEURS
VERSION PRÉLIMINAIRE

1. Spectre

1.1. **Opérateurs dans les espaces de Banach.** On fixe dans toute cette section un espace de Banach E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous souhaitons étudier l'algèbre de Banach des applications linéaires continues de E dans lui-même, que l'on notera $\mathcal{L}(E)$. On désignera par I l'application identité sur E, et on notera $||.||$ aussi bien la norme sur E et sur $\mathcal{L}(E)$. On rappelle que si $T \in \mathcal{L}(E)$, alors $||T|| = \sup\{||T(x)||; x \in E \text{ et } ||x|| \leq 1\}$.

Commençons par quelques rappels sur les éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$. On dit que $T \in \mathcal{L}(E)$ est inversible s'il existe $S \in \mathcal{L}(E)$ tel que $TS = ST = I$. L'opérateur S est alors l'inverse de T. Si $T \in \mathcal{L}(E)$ est inversible, il est bijectif et son inverse est son application réciproque T^{-1}. Réciproquement, si $T \in \mathcal{L}(E)$ est bijectif, alors T^{-1} est continue (ceci découle du théorème de l'application ouverte) et donc T est inversible. Précisons ceci . Soient X et Y deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire, continu et surjectif de X dans Y. Le théorème de l'application ouverte dit qu'alors il existe $C > 0$ telle que $T(B_X(0,1)) \supset B_Y(0,C)$ (où $B_X(0,1) = \{x \in X, ||x|| < 1\}$ et $B_Y(0,C) = \{y \in Y; ||y|| < C\}$). Ainsi, si $||Tx|| < C$, alors $||x|| \leq 1$. On en déduit que, si T est inversible, $||T^{-1}(y)|| \leq C^{-1}||y||$ pour tout $y \in Y$. En effet, si $y = 0$, cette estimation est évidente. Si $y \neq 0$, alors on applique ce qui précède à $y' = \dfrac{Cy}{T(y)}$.

On rappelle enfin que l'ensemble $\mathcal{I}$ des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. Pour voir cela, on pourra montrer que si $T_0 \in \mathcal{I}$ et si $T \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $||T - T_0|| \leq ||T_0^{-1}||^{-1}$, alors $T \in \mathcal{I}$ et

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(I - T_0^{-1}T)^n T_0^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T_0^{-1}(I - TT_0^{-1})^n.$$

Ceci montre que $T \to T^{-1}$ est continue dans $\mathcal{L}(E)$. En effet,

$$\begin{aligned}
||T^{-1} - T_0^{-1}|| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} ||I - T_0^{-1}T||^n ||T_0||^{-1} \\
&\leq ||T_0^{-1}|| \frac{||I - T_0^{-1}T||}{1 - ||I - T_0^{-1}T||} \\
&\leq ||T_0^{-1}||^2 \frac{||T - T_0||}{1 - ||T - T_0|| ||T_0^{-1}||}.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant donner la terminologie qui nous sera utile dans toute cette section. Fixons donc $T \in \mathcal{L}(E)$. On appelle valeur spectrale de T tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda I - T$ ne soit pas inversible. Le spectre de T (que lon notera $\sigma(T)$) est l'ensemble des valeurs spectrales de T. Un élément dans $\mathbb{K}$ qui n'est pas valeur spectrale de T est appelée valeur résolvante, et l'ensemble des valeurs résolvantes de T (que l'on notera $\rho(T)$) s'appelle l'ensemble résolvant de T. On a bien évidemment $\rho(T) = \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$.
On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de T si $\lambda I - T$ n'est pas injectif (c'est à dire $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \neq \emptyset$). Il est clair que toute valeur propre est valeur spectrale, mais la réciproque est en général fausse (sauf si E est de dimension finie par exemple) ! On note $vp(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T et si $\lambda \in vt(T)$, alors l'espace $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ est l'espace propre associé à λ.

Exemple. Soient E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$. On définit $T \in \mathcal{L}(E)$ par $T(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où, pour tout $x \in [0, 1]$, $T(f)(x) = \int_0^x f(t)ft$. Montrer que $vp(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \emptyset$.

Proposition 1. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors, la limite $\lim_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$ existe et $\lim_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$. On note $r(T)$ cette valeur commune. De plus, le spectre $\sigma(T)$ est compact dans $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in \sigma(T)$, $|\lambda| \leq r(T)$.*

Notons que la première partie de la proposition implique $r(T) \leq ||T||$ puis que, d'après la deuxième partie, pour toute valeur spectrale λ de T, $|\lambda| \leq ||T||$.

Démonstration. 1. On note $m = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$. Fixons $\varepsilon > 0$ et soit $n_\varepsilon > 0$ tel que $||T^{n_\varepsilon}||^{\frac{1}{n_\varepsilon}} \leq m + \varepsilon$. Considérons $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_\varepsilon$ et faisons la division euclidienne de n par n_ε :

$$n = p(n)n_\varepsilon + q(n) \text{ avec } 0 \leq q(n) < n_\varepsilon.$$

On a alors

$$||T^n|| \leq ||T^{n_\varepsilon}||^{p(n)}||T||^{q(n)}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q(n)}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p(n)}{n} = \dfrac{1}{n_\varepsilon}$, on en déduit

$$\limsup_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq m + \varepsilon.$$

Ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$.

2. On a vu que l'ensemble $\mathcal{I}$ des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ st un ouvert. Comme l'application $\lambda \to \lambda I - T$ est continue, on en déduit que $\rho(T)$ est un ouvert (puisque image réciproque d'un ouvert par une application continue) et donc $\sigma(T)$ est fermé.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| > r(T)$ et soit $r \in]r(T), |\lambda|[$. Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > n_0$, $||T^n|| \leq r^n$. La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n-1}T^n$ est donc normalement

convergente et on a

$$(\lambda I - T)\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n-1}T^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n-1}T^n(\lambda I - T) = I.$$

Donc, $\lambda \in \rho(T)$. Ce qui finit la preuve de la proposition.

□

Si $T \in \mathcal{L}(E)$ et si $\lambda \in \rho(T)$, on note $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ (appelée résolvante de T).

Proposition 2. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors, pour tout λ, $\mu \in \rho(T)$, on a l'équation résolvante suivante.*

$$\begin{aligned} R(\lambda, T) - R(\mu, T) &= (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T) \\ &= (\mu - \lambda)R(\mu, T)R(\lambda, T). \end{aligned}$$

De plus, l'application $\lambda \to R(\lambda, T)$ (de l'ouvert $\rho(T)$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathcal{L}(E)$) est dérivable et pour tout $\lambda \in \rho(T)$,

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda, T) = -(R(\lambda, T))^2.$$

Démonstration. L'équation résolvante résulte du calcul élémentaire suivant.

$$\begin{aligned} R(\lambda, T) - R(\mu, T) &= R(\lambda, T)((\mu I - T) - (\lambda I - T))R(\mu, T) \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T) \end{aligned}$$

On en déduit que si $\lambda \in \rho(T)$ et si $h \in \mathbb{K}^*$ tel que $\lambda + h \in \rho(T)$, alors

$$\frac{1}{h}\left(R(\lambda + h, T) - R(\lambda, T)\right) = -R(\lambda, T)R(\lambda + h, T). \tag{1}$$

Or, comme l'application $S \to S^{-1}$ est continue dans $\mathcal{L}(E)$, il en de même de $\lambda \to R(\lambda, T)$. On conclue alors aisément en passant à la limite dans (1). □

Si E est de dimension finie et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le théorème de D'Alembert implique que le spectre de $T \in \mathcal{L}(E)$ n'est pas vide. On va voir que ceci reste vrai en dimension quelconque.

Proposition 3. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors le spectre de T n'est pas vide et de plus,*

$$r(T) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Le réel $r(T)$ s'appelle le rayon spectrale de T. On avait déja vu que, dans le cas général, pour tout $\lambda \in \sigma(T)$, $|\lambda| \leq r(T)$. Pour une démonstration du résultat précédent, voir [HL].
ATTENTION ! MEME SI $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, T PEUT NE PAS AVOIR DE VALEURS PROPRES ! Voir l'exemple précédent.

Terminons par un résultat sur l'image du spectre par un polynôme.

Théorème 4 (Image spectrale)**.** *Si $T \in \mathcal{L}(E)$ et si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(\sigma(T)) \subset \sigma(P(T))$, avec égalité si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On peut alors écrire $P - P(\lambda) = (X - \lambda)Q_\lambda$ avec $Q_\lambda \in \mathbb{K}[X]$. Donc,

$$P(T) - P(\lambda)I = (T - \lambda I)Q_\lambda(T) = Q_\lambda(T)(T - \lambda I).$$

Supposons que $P(\lambda) \notin \sigma(P(T))$ et soit $S = (P(T) - P(\lambda)I)^{-1}$. Alors,

$$(\lambda I - T)Q_\lambda(T)S = SQ_\lambda(T)(\lambda I - T) = I.$$

Donc, $\lambda I - T$ est inversible et $\lambda \notin \sigma(T)$. On a ainsi montré

$$\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow P(\lambda) \in \sigma(P(T)).$$

Considérons maintenant le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Supposons que $P \in \mathbb{C}[X]$ soit de degré supérieur ou égal à 1 (sinon le résultat est évident). Soit $\mu \in \sigma(P(T))$. Alors, $P - \mu$ est scindé, c'est à dire on peut l'écrire

$$P - \mu = C(X - \lambda_1)...(X - \lambda_n)$$

avec $C \neq 0$ et tous les λ_i dans $\mathbb{C}$. Alors,

$$P(T) - \mu I = C(T - \lambda_1 I)...(T - \lambda_n I)$$

Comme $P(T) - \mu I$ n'est pas inversible, l'un des facteurs $T - \lambda_i I$ ne l'est pas non plus. Mais, alors, pour cette valeur i, $\lambda_i \in \sigma(T)$ et comme $P(\lambda_i) = \mu$, $\mu \in P(\sigma(T))$. □

1.2. **Opérateurs dans les espaces d'Hilbert.** On va préciser quelque peu ce que l'on a vu dans la section précédente, dans le cas où E est un espace d'Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se traite de la même façon et nous laissons le soin au lecteur de le faire). On notera $< .,. >$ le produit scalaire de E. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle que son adjoint T^* est l'unique opérateur dans $\mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $< Tx, y >=< x, T^*y >$. On commence par rappeller quelques propriétés élémentaires de l'adjoint. Pour cela, notons $A^\perp$ l'orthogonal de $A \subset E$.

Proposition 5. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors,*

(i) $||T|| = ||T^*||$.
(ii) $||TT^*|| = ||T^*T|| = ||T||^2$.
(iii) $KerT = (ImT^*)^\perp$.
(iv) $\overline{ImT} = (KerT^*)^\perp$
(v) T est inversible si et seulement si T^* l'est, et dans ce cas, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Démonstration. (i) La construction de T^* implique que $||T^*|| \leq ||T||$. En effet, pour $y \in E$, on définit la forme linéaire ϕ_y par $\phi_y(x) =< x, y >$ pour tout $x \in E$. Considérons la forme linéaire $\phi_y \circ T : x \to< Tx, y >$. Alors, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément de E, noté T^*y, tel que $\phi_y \circ T = \phi_{T^*y}$ (c'est à dire $< Tx, y >=< x, T^*y >$ pour tout $x \in E$) et $||T^*y|| = ||\phi_y \circ T||$. On définit alors l'application de E dans E $T^* : y \to T^*y$. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que $T^* \in \mathcal{L}(E)$ et que $||T^*|| \leq ||T||$. De plus, pour tout $x \in E$,

$$||T(x)||^2 =< Tx, Tx >=< x, T^*Tx >\leq ||x||||T^*||||Tx||.$$

Donc, $||Tx|| \leq ||x|| ||T^*||$, puis $||T|| \leq ||T^*||$. Pour conclure, on aurait pu aussi montrer que $T^{**} = T$.
(ii) D'après (i), il est clair que $||TT^*|| \leq ||T|| ||T^*|| \leq ||T||^2$. De plus, pour tout $x \in E$,

$$||T(x)||^2 = < Tx, Tx > = < x, T^*Tx > \leq ||x||^2 ||T^*T||.$$

Donc, $||T||^2 \leq ||T^*T||$. D'où, $||T||^2 = ||T^*T||$ et en appliquant ce résultat à T^*, on obtient $||T||^2 = ||TT^*||$.
(iii) Si $x \in E$, $x \in \mathrm{Ker}T$ si et seulement si $< Tx, y > = < x, T^*y > = 0$ pour tout $y \in E$. D'où, le résultat.
(iv) Découle de ce précéde en utilisant que $\overline{F} = F^{\perp\perp}$ et $T^{**} = T$.
(v) Est evident (utiliser $(ST)^* = T^*S^*$). □

On déduit du résultat précédent (et du fait que si $F \subset E$ est fermé, $E = F \oplus F^{\perp}$) le

Corollaire 6. *Si $T \in \mathcal{L}(E)$, alors*

$$\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda}, \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Si $\lambda \in \rho(T)$, alors $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$ et $R(\overline{\lambda}, T^*) = (R(\lambda, T))^*$.

On rappelle qu'un opérateur T est dit hermitien si $T = T^*$.

Proposition 7. *Si $T \in \mathcal{L}(E)$ est hermitien, $r(T) = ||T||$.*

En particulier, ceci implique que si $T \in \mathcal{L}(E)$, alors $||T|| = \sqrt{r(TT^*)} = \sqrt{r(T^*T)}$ (d'après le (ii) de la proposition 5).

Démonstration. Ainsi, si T est hermitien, $||T||^2 = ||T^2||$ (proposition 5 (ii)). D'où, par récurrence, $||T^{2n}|| = ||T||^{2n}$. On conclue alors aisément. □

Proposition 8. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur hermitien. Alors,*
(i) Les valeurs propres de T sont réelles.
(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\overline{Im(\lambda I - T)} = (Ker(\overline{\lambda} I - T))^{\perp}$.
(iii) Les espaces propres de T associées à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de T et soit $x \in E$ un vecteur propre associé. Alors,

$$\lambda ||x||^2 = < \lambda x, x > = < Tx, x > .$$

Comme T est hermitien, $< Tx, x > \in \mathbb{R}$ (puisque $< Tx, x > = < x, Tx > = \overline{< Tx, x >}$), donc $\lambda \in \mathbb{R}$. La partie (ii) est une conséquence immédiate de la proposition 5 (iv). Enfin, si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de T et si x et y sont des vecteurs propres de λ et μ respectivement,

$$\lambda < x, y > = < Tx, y > = < x, Ty > = \mu < x, y > .$$

Donc, puisque $\lambda \neq \mu$, $< x, y > = 0$. Ce qui prouve (iii). □

On peut montrer que le spectre de T est aussi inclus dans $\mathbb{R}$. En fait, si on pose

$$m = \inf\{< Tx, x >; x \in E \text{ et } ||x|| = 1\},$$

$$M = \sup\{< Tx, x >; x \in E \text{ et } ||x|| = 1\},$$

Alors, $\sigma(T) \subset [m, M]$ (et de plus, m, $M \in \sigma(T)$). On en verra une démonstration plus loin (dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On en déduit le résultat important suivant : Un opérateur hermitien T sur E est positif si et seulement si son spectre $\sigma(T)$ est contenu dans $\mathbb{R}^+$. En effet, pour un opérateur hermitien T, $||T|| = \max(|m|, |M|)$ et il est positif si $m \geq 0$. On rappelle que l'opérateur hermitien T est positif si, pour tout $x \in E$, $< Tx, x >\in \mathbb{R}^+$. Pour plus de détails, voir [HL].

2. Opérateurs compacts

2.1. **Définitions et propriétés générales.** Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ est laissé au lecteur). On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. On désignera par $||.||$ à la fois la norme dans E, dans F et dans $\mathcal{L}(E, F)$.

On dit que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est un opérateur compact si l'image de la boule unité fermée (notée $\overline{B}_E$) de E par T est une partie relativement compact de F. On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F et $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini si $\dim\mathrm{Im}(T) < \infty$. Tout opérateur de rang fini est compact. En effet, l'image de la boule unité fermée de E par T est une partie bornée de $\mathrm{Im}(T)$ qui est de dimension finie, et donc est relativement compact dans $\mathrm{Im}(T)$ (et donc dans F).

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et que $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$. Le dernier point découle du fait général suivant. Soient $R \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur compact, E_1 et E_2 deux espaces vectoriels, $T \in \mathcal{L}(E_1, E)$ et $S \in \mathcal{L}(F, F_1)$. Alors, SRT est un opérateur compact de E_1 dans F_1 (Indication : montrer que $SRT(\overline{B}_{E_1}) \subset ||T||S(\overline{R(\overline{B}_E)})$).

Nous supposons à partir de maintenant que E et F sont deux espaces de Banach.

Théorème 9. *L'espace vectoriel $\mathcal{K}(E, F)$ est un fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Avant de démontrer ce résultat, donnons en une application immédiate (qui est utile pour demontrer qu'un opérateur est compact. Voir par exemple, le cas des opérateurs à noyau dans [HL]).

Corollaire 10. *Soit (T_n) une suite d'opérateurs de rang fini de E dans F et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} ||T - T_n|| = 0$. Alors, $T \in \mathcal{K}(E, F)$.*

Démonstration. Soient $(T_n) \in \mathcal{K}(E,F)$ et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tels que $\lim_{n\to+\infty} ||T - T_n|| = 0$. Pour montrer que $T(\overline{B}_E)$ est relativement compact, comme F est complet, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $T(\overline{B}_E)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules $B(f_i, \varepsilon)$ dans F (c'est à dire que $T(\overline{B}_E)$ est précompact). Pour cela, considérons $n \in \mathbb{N}$ tel que $||T - T_n|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Or, comme $T_n(\overline{B}_E)$ est relativement compact dans l'espace complet F, il existe une famille finie (f_i) dans F telle que $T_n(\overline{B}_E) \subset \cup_i B\left(f_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. D'où, $T(\overline{B}_E) \subset \cup_i B(f_i, \varepsilon)$. □

On termine cette revue des propriétés élémentaires des opérateurs compacts par le théorème de Schauder, qui dit que l'adjoint d'un opérateur compact est compact. Avant de l'énoncer, faisons quelques rappels. Supposons tout d'abord que E est un espace d'Hilbert. Pour tout $y \in E$, posons $\phi_y(x) =< x, y >$ où $< .,. >$ désigne le produit scalaire sur E. Alors, le théorème de représentation de Riesz dit que l'application $y \to \phi_y$ est une isométrie (bijective) entre E et son dual E', que l'on peut ainsi identifier. Nous avons vu dans la section 1 que si $T \in \mathcal{L}(E)$, alors son adjoint T^* est donné par $\phi_y \circ T = \phi_{T^*y}$ pour tout $y \in E$. En utilisant l'identification entre E et E', c'est à dire en identifiant tout forme linéraire ϕ de E' à l'élément y de E tel que $\phi = \phi_y$, on peut voir l'adjoint T^* comme un élément de $\mathcal{L}(E')$ vérifiant $T^*\phi = \phi \circ T$ pour tout $\phi \in E'$. Par analogie, on définit l'adjoint de $T \in \mathcal{L}(E,F)$ comme l'application $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$ definie par $T^*(\phi) = \phi \circ T$ pour tout $\phi \in F'$. Rappelons que si M est un sous-espace vectoriel de l'espace de Banach E, alors

$$M^\perp = \{\phi \in E'; \phi(x) = 0 \ , \forall x \in M\}.$$

De même, si N est un sous-espace vectoriel de E',

$$N^\perp = \{x \in E; \phi(x) = 0 \ , \forall \phi \in N\}.$$

Alors, si $T \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Ker}T = (\mathrm{Im}T^*)^\perp$. En effet,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}T &\iff \forall \phi \in E', \phi(Tx) = 0 \\ &\iff \forall \phi \in E', (T^*\phi)(x) = 0 \\ &\iff x \in (\mathrm{Im}T^*)^\perp. \end{aligned}$$

De plus, si M est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{M} = M^{\perp\perp}$. En effet, Il est clair que $M \subset M^{\perp\perp}$. Comme $M^{\perp\perp}$ est fermé, on en déduit $\overline{M} \subset M^{\perp\perp}$. Supposons que $\overline{M} \subsetneqq M^{\perp\perp}$. Alors, il existe $x_0 \in M^{\perp\perp}$ avec $x_0 \notin \overline{M}$. Alors, d'après le théorème de Hahn-Banach géométrique (voir [Bre]), il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement les espaces convexes disjoints non vides $\{x_0\}$ (qui est en plus compact) et $\overline{M}$ (qui est fermé) : il existe $\phi \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in M$, $(*)$ $f(x) < \alpha < f(x_0)$. Comme M est un espace vectoriel, $f(x) = 0$ (pour voir cela, prendre λ assez grand et calculer $\phi(\lambda x)$). Donc, $\phi \in M^\perp$. D'où, $\phi(x_0) = 0$, ce qui contredit (*), et donc $\overline{M} = M^{\perp\perp}$. On en déduit que $\overline{(\mathrm{Im}T^*)} = (\mathrm{Ker}T)^\perp$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les détails de ces preuves (par exemple, que $M^\perp$ est fermé et que $E^\perp = \{0\}$).

Théorème 11. *Si $T \in \mathcal{K}(E,F)$, alors $T^* \in \mathcal{K}(F', E')$.*

Démonstration. Soit (v_n) une suite de $\overline{B}_{F'}$. Montrons que l'on peut en extraire une sous-suite $(v_{\sigma(n)})$ telle que $(T^*(v_\sigma))$ converge. Pour cela, on va utiliser le théorème d'Ascoli que l'on rappelle.

Théorème 12 (Théorème d'Ascoli)**.** *Soit K un espace métrique compact et soit $\mathcal{H}$ un sous-espace borné de $C(K)$. On suppose que $\mathcal{H}$ est uniformément equicontinue :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } d(x,y) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{H}.$$

Alors, $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $C(K)$.

Considérons maintenant le compact $K = \overline{T(\overline{B}_E)}$ et la famille dans $C(K)$ donnée par

$$\mathcal{H} = \{\phi_n; n = 1, 2, ...\}$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n(x) = v_n(x)$ pour tout $x \in K$. Alors, on peut appliquer le théorème d'Ascoli à $\mathcal{H}$ (pour voir cela, utiliser le fait que (v_n) est une suite de $\overline{B_{F'}}$) et donc il existe une sous-suite $(\phi_{\sigma n})$ qui converge dans $C(K)$ vers $\phi \in C(K)$. On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{u\in\overline{B}_E} |v_{\sigma(n)}(Tu) - \phi(Tu)| = 0,$$

puis

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{u\in\overline{B}_E} |v_{\sigma(n)}(Tu) - v_n(Tu)| = 0.$$

D'où $\lim\limits_{k,j\to+\infty} ||T^*(v_{\sigma(k)}) - T^*(v_{\sigma(j)})||_{E'} = 0$, et par conséquent, $(T^*(v_{\sigma(n)}))$ converge dans E'. □

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que si $T^* \in \mathcal{K}(E')$, alors $T \in \mathcal{K}(E)$.

2.1.1. *Alternative de Fredholm.* Soit E un espace vectoriel normé. On va s'intéresser dans cette section à la résolution de l'équation $u - Tu = f$ où f est donnée.

On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 13 (Lemme de Riesz)**.** *Soit F un sous-espace fermé de E (différent de E). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in E$ tel que $||u|| = 1$ et $d(u,F) \geq 1 - \varepsilon$.*

Démonstration. Comme $F \neq E$, il existe $v \in E$ avec $v \notin F$. Comme F est fermé, $d(v,F) > 0$. Soit $v_0 \in F$ tel que

$$d(v,F) \leq ||v - v_0|| \leq \frac{d(v,F)}{1-\varepsilon}.$$

Alors, on peut vérifier aisément que $u = \dfrac{v - v_0}{||v - v_0||}$ convient. En effet, il est clair que $||u|| = 1$. De plus, si $x \in F$ (et donc $v_0 + ||v - v_0||x \in F$), on a

$$||u - x|| = \left|\left|\frac{v - v_0}{||v - v_0||} - x\right|\right| = \frac{||v - v_0 - ||v - v_0||x||}{||v - v_0||} \geq \frac{d(v,F)}{||v - v_0||} \geq 1 - \varepsilon.$$

□

Théorème 14. *Soit T un opérateur compact de E dans E.*

(i) Le sous-espace Ker$(I-T)$ *est de dimension finie.*
(ii) Le sous-espace Im$(I-T)$ *est fermé, et plus précisément Im*$(I-T) = ($*Ker*$(I-T^*))^{\perp}$.
(iii) Ker$(I-T)=\{0\} \Longleftrightarrow$ *Im*$(I-T)=E$.
(iv) dim Ker $(I-T) =$ *dim Im* $(I-T^*)$.

Remarquons que la propriété (iii) est évidente si T est un endomorphisme d'un espace vectoriel fini. Dans le cas où T est compact, (iii) donne une propriété remarquable de $I-T$, semblable au cas de la dimension finie.

Le théorème dit donc que
- ou bien $\mathrm{Ker}(I-T)=\{0\}$. Alors, pour tout $f \in E$, l'équation $u - Tu = f$ admet une unique solution d'après (iii).
- ou bien $\mathrm{Ker}(I-T) \neq \{0\}$. Dans ce cas, l'équation homogène $u - Tu$ admet n solution linéairement indépendantes (d'après (i), ici $n = \dim(\mathrm{Ker}(I-T))$ et, pour $f \in E$, l'équation $u - Tu = f$ admet une solution si et seulement si f est orthogonal à ces n vecteurs (d'après (ii)). En d'autres termes, l'équation $u-Tu = f$ admet une solution si et seulement si f vérife n conditions d'orthogonalité (c'est à dire, si (e_i) est une base de $\mathrm{Ker}(I-T)$ et si note (e_i^*) la base duale associée, f doit vérifier $e_i^*(f) = 0$ pour tout $i = 1,..,n$).

Démonstration. (i) L'idée est d'utiliser le théorème de Riesz qui dit que tout espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement sa boule unité fermée est compacte. Soit $E_1 = \mathrm{Ker}(I-T)$ et soit $x \in \overline{B}_{E_1}$. Alors, $||T(x)|| = ||x|| \leq 1$. Donc, $x \in T(\overline{B}_E)$. Donc, $\overline{B}_{E_1} \subset T(\overline{B}_E)$ et donc est compact. D'où, E_1 est de dimension finie.
(ii) Notons tout d'abord que la deuxième partie de (ii) découle de la première partie et de la proposition 5 adapté, comme on a vu précédemment, au cas des espaces de Banach.
Montrons la première partie et pour cela, considérons $y \in \overline{\mathrm{Im}(I-T)}$ Soit (x_n) une suite de E telle que $\lim_{n\to+\infty}(x_n - T(x_n)) = y$. On souhaite montrer que $y \in \mathrm{Im}(I-T)$.
Cas 1. La suite (x_n) est bornée. Alors, puisque T est compact, la suite $(T(x_n)$ est contenu dans un compact, donc elle admet une sous-suite convergente (que l'on note aussi $(T(x_n))$). Notons z la limite de $(T(x_n))$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} x_n = y+z$, puis, puisque T est continu, $z = T(y+z)$. Donc, $y = (y+z) - T(y+z) \in \mathrm{Im}(I-T)$.
Cas 2. La suite (x_n) n'est pas bornée. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = d(x_n, \mathrm{Ker}(I-T))$. Alors, il existe $z_n \in \mathrm{Ker}(I-T)$ tel que $d_n = ||z_n - x_n||$. Ceci vient du fait que $\overline{B}(x_n, ||x_n||) \cap \mathrm{Ker}(I-T)$ est un compact non vide (puisqu'il contient 0) de $\mathrm{Ker}(I-T)$ qui est de dimension finie (d'après (i)).
Si la suite (d_n) est bornée, posons $y_n = x_n - z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, (y_n) est bornée et $\lim_{n\to+\infty}(I-T)(y_n) = \lim_{n\to+\infty}(I-T)(x_n) = y$. On est donc ramené au premier cas.
Supposons maintenant que (d_n) n'est pas bornée. Donc, quitte à extraire une sous-suite, (d_n) tend vers $+\infty$. On va montrer que ceci est impossible, ce qui terminera la preuve. Pour cela, posons $a_n = d_n^{-1}(x_n - z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, (a_n) est

bornée (par 1) et donc, puisque T est compact, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $(T(a_n))$ converge vers $u \in E$. On en déduit

$$\begin{aligned} u &= u + \lim_{n\to+\infty}(d_n^{-1}y) \\ &= \lim_{n\to+\infty} T(a_n) + \lim_{n\to+\infty} d_n^{-1}((I-T)(x_n - z_n)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} a_n. \end{aligned}$$

D'où, puisque T est continu, $T(u) = u$, c'est à dire $u \in \mathrm{Ker}(I-T)$. Or, pour n assez grand, $||a_n - u|| < 1$ (puisque $\lim_{n\to+\infty} a_n = u$), donc

$$||x_n - z_n - d_n u|| < d_n.$$

Ce qui contredit la définiton de d_n (car $z_n - d_n u \in \mathrm{Ker}(I-T)$). Donc, (d_n) est bornée.
(iii) Supposons $\mathrm{Ker}(I-T) = \emptyset$ et montrons, par l'absurde, que $\mathrm{Im}(I-T) = E$. Pour cela, supposons que $E_1 = \mathrm{Im}(I-T) \neq E$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathrm{Im}(I-T)^n$ (et $E_0 = E$). Nous allons montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (a) E_n est fermé, (b) $E_n \supset E_{n+1}$, et (c) $E_n \neq E_{n+1}$. On appliquera ensuite le lemme de Riesz. Par hypothèse, cette propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie pour n et montrons la pour $n+1$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que (b) est vrai. Pour prouver (c), il suffit de voir que, puisque $E_n \neq E_{n+1}$ et que, par hypothèse, $I-T$ est injectif, on a $E_{n+1} = (T-I)(E_n) \neq (T-I)(E_{n+1}) = E_{n+2}$. Pour démontrer (a), on va utiliser (ii). En effet, $T(E_n) \subset E_n$, donc T induit un opérateur, noté T_n, sur E_n. De plus, $E_{n+1} = (T_n + I_n)(E_n)$ (où I_n est l'identité de E_n). Pour conclure, d'après (ii), il nous suffit de montrer que T_n est un opérateur compact de E_n. Or, $T_n(\overline{B}_{E_n})$ est inclus dans $\overline{T(\overline{B}_E)} \cap E_n$ qui est compact (car E_n est fermé). Donc, $T_n(\overline{B}_{E_n})$ est relativement compact. Ce qui termine la preuve de (a), (b) et (c).

On applique maintenant le lemme de Riesz (avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$) à chaque E_n. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in E_n$ tel que $||u_n|| = 1$ et $d(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. Or,

$$T(u_n) - T(u_m) = -(u_n - T(u_n)) + (u_m - T(u_m)) + (u_n - u_m).$$

De plus, si $n > m$, $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$ et donc $-(u_n - T(u_n)) + (u_m - T(u_m)) - u_n \in E_{m+1}$. On en déduit $||T(u_n) - T(u_m)|| \geq \frac{1}{2}$. On a donc construit une suite (u_n) dans la boule unité de E telle que toute suite extraite de $(T(u_n))$ n'est pas de Cauchy. Ceci contredit le fait que $T(\overline{B}_E)$ est relativement compact.

Montrons maintenant la réciproque et supposons que $\mathrm{Im}(I-T) = E$. Alors, $\mathrm{Ker}(I - T^*) = (\mathrm{Im}(I-T))^\perp = \{0\}$. Alors, en appliquant ce qui précède à T^*, on obtient $\mathrm{Im}(I - T^*) = E'$. D'où, $\mathrm{Ker}(I-T) = \mathrm{Im}(I-T^*)^\perp = \{0\}$.
(iv) Voir [Bre]. $\square$

2.2. **Propriétés spectrales des opérateurs compacts.** On va préciser dans le cas des opérateurs compacts ce que l'on a vu dans la section 1. L'espace E est toujours supposé être de Banach. On suppose en outre qu'il est de dimension infinie.

Théorème 15. *Soit* $T \in \mathcal{K}(E)$. *Alors, (a)* $0 \in \sigma(T)$ *et (b)* $\sigma(T) \setminus \{0\} = vp(T) \setminus \{0\}$. *(c) De plus, on a l'une des situations suivantes.*
(i) $\sigma(T) = \{0\}$ *;*
(ii) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est fini ;*
(iii) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est une suite qui tend vers* 0.

Démonstration. (a) Supposons que $0 \notin \sigma(T)$. Alors, T est une bijection, et d'après la remarque avant le théorème 9, $I = T \circ T^{-1}$ est compact. Donc, la boule unité fermée de E est compact. D'où, d'après le théorème de Riesz, E est de dimension finie. Ce qui contredit notre hypothèse sur E. Donc, $0 \in \sigma(T)$.
(b) Soit $a \in \sigma(T)$, $a \neq 0$. Supposons que $a \notin vp(T)$. Alors, $\mathrm{Ker}(T - aI) = \{0\}$. Donc, d'après l'alternative de Fredholm, $E = \mathrm{Im}(T - aI)$. Donc, $a \in \rho(T)$. Ce qui est absurde, donc $a \in vp(T)$.
(c) Pour cette démonstration, on aura besoin du résultat suivant.

Lemme 16. *Soit* (a_n) *une suite de réels (tous distincts) telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. *Alors,* $a = 0$ *(c'est à dire, tous les points de* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *sont isolés).*

Démonstration. Soit $a_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Alors, d'après (b), $a_n \in vp(T)$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir un $e_n \in E \setminus \{0\}$ tel que $(T - a_n I)(e_n) = 0$. On note E_n l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_1, \ldots.e_n)$. On va montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les $e_1, \ldots.e_n$ sont indépendants et donc $E_n \subsetneqq E_{n+1}$. Supposons donc que les $e_1, \ldots.e_n$ sont indépendants et que $e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ pour des $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Alors,

$$T(e_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{n+1} e_i.$$

D'où, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\alpha_i(a_1 - a_{n+1}) = 0$. Comme les (a_i) sont distincts, il vient $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, .., n$. Ce qui est absurde. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les $e_1, \ldots.e_n$ sont indépendants et $E_n \subsetneqq E_{n+1}$.
En appliquant le lemme de Riesz, on peut construire une suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in E_n$, $||u_n|| = 1$, et $d(u_n, E_{n-1}) \geq \dfrac{1}{2}$. Considérons maintenant $2 \leq m < n$. Alors, $E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n$ et $(T - a_n I)E_n \subset E_{n-1}$,$(T - a_m I)E_m \subset E_{m-1}$. D'où,

$$(*) \quad \begin{aligned} \left|\left|\frac{T(u_n)}{a_n} - \frac{T(u_m)}{a_m}\right|\right| &= \left|\left|\frac{T(u_n - a_n u_n)}{a_n} - \frac{T(u_m - a_m u_m)}{a_m} + u_n - u_m\right|\right| \\ &\geq d(u_n, E_{n-1}) \\ &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Or, comme T est compact, $(T(u_n))$ admet une sous-suite convergente. Ainsi, si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$, le passage à la limite dans (*) donnerait une contradiction. $\square$

Montrons maintenant (c). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\sigma(T) \cap \{a \in \mathbb{R}, |a| \geq \frac{1}{n}\}$ est vide ou fini. En effet, s'il était infini, puisque $\sigma(T)$ est compact, il y aurait un point d'accumulation, ce qui contredirait le lemme précédent. Lorsque $\sigma(T)$ contient une infinité de points (distincts), on peut alors les ranger en une suite qui tends vers 0. $\square$

2.3. **Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts.** Dans toute cette section, E est un espace de Hilbert. On note $< .,. >$ le produit scalaire associé.On rappelle que $T \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si et seulement si $T = T^*$. Pour $T \in \mathcal{L}(E)$, on pose

$$m(T) = \inf\{< Tu, u >; u \in E, ||u|| = 1\} \text{ et } M(T) = \sup\{< Tu, u >; u \in E, ||u|| = 1\}.$$

Proposition 17. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur autoadjoint.*
(i) $\sigma(T) \subset [m(T), M(T)]$, $m(T) \in \sigma(T)$, $M(T) \in \sigma(T)$.
(ii) Si $\sigma(T) = \{0\}$, alors $T = 0$.

Démonstration. (i) Soit $\lambda < M(T)$ et montrons que $\lambda \in \rho(T)$. Or, pour tout $u \in E$, on a $< Tu, u > \leq M||u||^2$. D'où, pour tout $u \in E$, $< \lambda u - T, u > \geq (\lambda - M)||u||^2 = \alpha||u||^2$ avec $\alpha > 0$. Donc, la forme β définie par $\beta(u, v) = (\lambda u - T(u), v)$ pour u, $v \in E$, est coercive. On conclue que $\lambda I - T$ est bijectif en utilisant le théorème de Lax-Milgram et le théorème de représentation de Riesz.

Théorème 18 (Théorème de Lax-Milgram)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors, pour tout $\phi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, $a(u, v) = \phi(v)$.*

Montrons que $M \in \sigma(T)$. Pour cela, posons pour tout u, $v \in E$, $\beta(u, v) = (Mu - T(u), v)$. Alors, β est une forme bilinéaire, symétrique, positive. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la forme β, on obtient, pour tout u, $v \in E$,

$$| < Mu - T(u), v > | \leq < Mu - T(u), u >^{\frac{1}{2}} < Mv - T(v), v >^{\frac{1}{2}} .$$

Ce qui implique qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in E$,

$$(*) \ |Mu - T(u)| \leq C < Mu - T(u), u >^{\frac{1}{2}} .$$

Soit (u_n) une suite de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||u_n|| = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} < T(u_n), u_n >= M$. Alors, d'après (*), $\lim_{n \to +\infty} |Mu_n - T(u_n)| = 0$. Ce qui implique que $M \in \sigma(T)$, car sinon $MI - T$ est inversible et alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} ((MI - T)^{-1}(Mu_n - T(u_n))) = 0$, ce qui contredit que $||u_n|| = 1 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les propriétés sur m s'obtiennent en remplaçant T par $-T$.

(ii) Pour tout u, $v \in E$,

$$2 < Tu, v >=< T(u + v), u + v > - < Tu, u > - < Tv, v > .$$

Or, d'après (i), $< T(u + v), u + v >=< Tu, u >=< Tv, v >= 0$. Donc, pour tout u, $v \in E$, $< Tu, v >= 0$. D'où, $T = 0$. $\square$

On sait qu'en dimension finie, tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable. Le résultat suivant dit que ceci reste le cas en dimension infinie pour les opérateurs compacts !

Théorème 19. *On suppose que E est séparable. Soit T un opérateur autoadjoint compact. Alors, H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Démonstration. Posons $\lambda_0 = 0$ et considérons $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres distinctes de T (excepté 0). Cette suite "existe" d'après le théorème 15. On pose $E_k = \mathrm{Ker}(T - \lambda_k I)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Remarquons que, d'après l'alternative de Fredholm, les E_k, $k \neq 0$ sont de dimension finie (et non nulle).
Montrons que E est somme hilbertienne des $(E_n)_{n\geq 0}$. On a déja vu que les (E_n) sont deux à deux orthogonaux. Considérons l'espace vectoriel F engendré par les (E_n). Alors, $T(F) \subset F$, d'où $T(F^\perp) \subset F^\perp$ (car si $u \in F^\perp$, $v \in F$, $< Tu, v >=< u, Tv >= 0$). Comme $F^\perp$ est fermé, il en résulte que l'opérateur $T_0 = T_{|F^\perp}$ (restriction de T à $F^\perp$) est autoadjoint compact. Supposons qu'il existe $\lambda \in \sigma(T_0)\backslash\{0\}$. Alors, $\lambda \in vp(T_0)$ et donc il existe $u \in F^\perp$ non nul tel que $T_0 u = \lambda u$. Alors, λ est une des valeurs propres λ_n de T et $u \in E_n \cap F^\perp$. Ceci implique $u = 0$, ce qui est absurde. Donc, $\sigma(T_0) = \{0\}$ et, d'après la proposition 17 (i), $T_0 = 0$. On en déduit que $F^\perp \subset \mathrm{Ker}T \subset F$ et donc $F^\perp = \{0\}$. D'où, F est dense dans E (puisque $E = \overline{F} + F^\perp$).
En choisissant une base hilbertienne B_n dans chaque E_n (ce qui est possible car tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne), la base hilbertienne de E cherchée est obtenue comme réunion des bases hilbertiennes B_n. □

Ce théorème implique que tout opérateur autoadjoint T dans un espace de Hilbert séparable E est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini. En effet, tout $u \in E$ s'écrit sous la forme $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in E_n$. Ainsi, $T(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda_n u_n$. D'où, si on définit, pour $k \neq 0$ l'opérateur T_k par $T_k(u) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j$, les T_k sont de rang fini (car les E_k sont de dimension finie) et $||T_k - T|| = \sup_{n\geq k+1} |\lambda_n| \to 0$ quand $k \to +\infty$. En fait, ce résultat subsiste dans tout espace de Hilbert et pour tout opérateur compact (non nécessairement compact). Voir [Bre].

Références

[Bre] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod.

[HL] F. Hirsch, G. Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle*, Dunod (1999).