Prépa CAPES
Mathématiques
Université de Cergy-Pontoise

COURS D'ANALYSE

Suites
Fonctions d'une variable réelle
Séries numériques
Suites et séries de fonctions
Séries entières
Séries de Fourier
Equations différentielles
Espaces vectoriels normés

Ceci est juste une compilation d'exercices correspondant à une partie du programme d'analyse du CAPES externe. Ont été particulièrement "pillés" :

E. Leichtnam et X. Schauer, Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours de Polytecnique et des Ecoles Normales Supérieures, Tomes 3 et 4, Ellipses

F. Liret et D. Martinais, Cours de mathématiques DEUG MIAS, MASS et SM, Analyse, 2 tomes, Dunod

J. L. Monier, Cours d'analyse 1ere année MPSI-PCSI-PTSI, 2 tomes, Dunod

J. M. Monier, Cours de mathématiques 2e année MP-PSI-PCI-PT, Tomes 3 et 4, Dunod

J. M. Monier, Exercices corrigés d'analyse 2e année MP, Dunod.

E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, Analyse exercices avec solutions, Tomes 1 et 2, Masson

et pour la partie historique

A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer, Une histoire des mathématiques "Routes et dédales", Collection Points Sciences, Seuil

E. Hairer et G. Wanner, L'analyse au fil de l'histoire, Bibliothèque SCOPOS, Springer

et aussi "Les Mathématiciens" dossier hors-série (janvier 1994) de Pour La Science (réédité chez Belin).

Pour des raisons techniques, les figures ne sont pas dans ce fichier. Merci de me signaler toutes les erreurs et imprécisions (qui ne doivent pas manquer !).

Table des matières

1. Suites de nombres réels et complexes. Fonctions d'une variable réelle

Quelques rappels

- **Théorème 1 :** Toute partie majorée (respectivement minorée) et non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (respectivement une borne inférieure).

- Soit (a_n) une suite croissante (respectivement décroissante) de nombres réels. Pour qu'elle converge, il faut et il suffit qu'elle soit majorée (respectivement minorée).

- Soient (a_n) et (b_n) des suites de nombres réels. On dit que ces suites sont adjacentes si et seulement si :
(i) (a_n) est une suite croissante, (b_n) une suite décroissante ;
(ii) $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
(iii) $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.
On a alors : deux suites adjacentes convergent et ont même limite.
Remarque : on peut supprimer (ii) qui est impliqué par (i) et (iii).

- Une suite (a_n) de nombres réels ou complexes est une suite de Cauchy si et seulement si :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, tout $p > N$, $|a_n - a_p| < \varepsilon$.
Théorème 2 : Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes converge (c'est à dire $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets).

- **Théorème 3 :** De toute suite bornée de nombres réels ou complexes, on peut extraire une sous-suite convergente.

- Soient f, g deux fonctions réelles et $a \in \mathbb{R}$.
(i) $f = O(g)$ au voisinage de a s'il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ et un voisinage V de a tels que $|f(t)| \leq M|g(t)|$ pour tout $t \in V$ (Relation de domination).
(ii) $f = o(g)$ au voisinage de a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que $|f(t)| \leq \varepsilon|g(t)|$ pour tout $t \in V$ (Relation de prépondérance) .
(iii) $f \sim g$ au voisinage de a s'il existe une fonction ε avec $\lim_{t\to a}\varepsilon(t) = 0$, telle que $f(t) = g(t)(1 + \varepsilon(t))$ (Relation d'équivalence).
(Les notations de (i) et (ii) sont appelés notations de Landau)

- Soit I un intervalle (fermé) de $\mathbb{R}$ et soit $K \in \mathbb{R}^{+*}$. Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est K-lipschitzienne si pour tout $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. On dit que f est contractante si de plus $K < 1$.
Théorème 4 : Toute application contractante d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ dans lui-même admet un unique point fixe.

- **Théorème 5 :** Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que k est un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors, il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$ (Théorème des valeurs intermédiaires).
On en déduit : soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, $f(I)$ est un intervalle.

- **Théorème 6 :** Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, $f([a, b])$ est un segment.

- **Théorème 7 :** Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors,
(i) $f(I)$ est un intervalle et l'application f définit une bijection de I sur $f(I)$;
(ii) La bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ de f est continue, strictement monotone et de même sens de variation que f.

Notes historiques

- Une définition rigoureuse de la notion de convergence d'une suite est essentiellement due à D'Alembert (1765) et surtout à Cauchy dans son cours d'analyse algébrique (1821) (à qui on doit aussi la notation "Lim"). La notion de "suite de Cauchy" a été introduite par ..... Cauchy à qui on attribue le théorème 2. Cependant, sa preuve reste intuitive et ne devient rigoureuse qu'après la construction de $\mathbb{R}$ à partir des rationnels par (indépendamment) Cantor, Heine, Meray et Dedekind (1872).

- Le théorème 1 a été qualifié de "Théorème de la plus grande importance" par Bolzano en 1817. La preuve classique de ce résultat (par dichotomie ou par "bisection") lui est dû (en s'inspirant des idées d'Euclide, Les éléments, Livre X). Le théorème 3 (que l'on peut aussi formuler par "Toute suite bornée de $\mathbb{R}$ a au moins un point d'accumulation") est appelé Théorème de Bolzano-Weierstrass et semble apparaitre pour la première fois dans des lectures données par Weierstrass en 1874.

- Le nom "functio" (fonction) a été proposé par Leibnitz et J. Bernoulli (1718). La notation "f(x)" a été introduite par Euler (1734). La définition moderne de la notion de fonction est due à Dirichlet (1837) :
Si pour tout x, il existe un unique, fini y .... alors y est appelé une fonction de x ....".
Cauchy (1821) introduit le concept de fonctions continues de la façon suivante :
"$f(x)$ sera fonction continue, si .... les valeurs numériques de la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroit indéfiniment avec celle de α ...."
Bolzano (1817) et surtout Weierstrass (1874) étaient plus précis :
" Ici, on dit qu'une quantité y est une fonction continue de x si, après avoir choisi une quantité ε, on peut montrer l'existence d'un δ tel que, pour toute valeur comprise entre $x_0-\delta ... x_0+\delta$, la valeur correspondante de y reste entre $y_0-\varepsilon .... y_0+\varepsilon$".

- Le théorème des valeurs intermédiaires a été utilisée par Euler et Gauss sans qu'une preuve rigoureuse de ce résultat ait été donnée, comme le dit Lagrange en 1807 *"Ce théorème est connu depuis longtemps"*. Ce manque a été comblé par Bolzano (1817).

- Le théorème 6 est appelé "Hauptlehrsatz" (Théorème principal) dans les lectures de Weierstrass de 1861 et a été publié par Cantor (1870).

Suites de nombres réels et complexes

"On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on puisse la supposer."
(D'Alembert 1765, Encyclopédie, Tome neuvieme).

Toutes les suites sont réelles sauf mention du contraire.

Bornes inférieures et supérieures

Exercice 1 : Soit $A=\left\{\dfrac{n}{mn+1}; m\in\mathbb{N}^*, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ et $B=\left\{\dfrac{1}{n}+(-1)^n\right\}$. Déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures de A et B. Sont elles atteintes ?

Exercice 2 : Soit X une partie bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que a est la borne supérieure de X si et seulement si a est un majorant de X et pour tout $\varepsilon>0$, il existe $x\in X$, $a-\varepsilon<x\leq a$.

Exercice 3 :
a) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x\in A$, tout $y\in B$, $x<y$. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A\leq\inf B$.

b) Montrer, que pour toutes parties bornées A et B de $\mathbb{R}$, on a $\sup A + \inf B \leq \sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$ après avoir montré que $A+B$ est borné. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sup_{x\in A}(x+a) = \sup A + a$.

Exercice 4 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ borné. Montrer que $\sup_{x,y\in A}|x-y|$ existe. On note $d(A)$ ce nombre que l'on appelle le diamètre de A. Montrer que $d(A) \leq \sup A - \inf A$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ et $y \in A$ tels que $|x-y| \geq \sup A - \inf A - 2\varepsilon$. En déduire que $d(A) = \sup A - \inf A$.

Généralités sur les suites

Exercice 5 : Vrai ou Faux ?

a) Toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

b) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \geq U_n > 0$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$ est convergente.

c) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n < V_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.

d) Si $\lim_{n\to+\infty} U_n^2 = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

e) Toute suite convergente est bornée.

f) Toute suite croissante et non bornée tend vers $+\infty$.

Exercice 6 : Soit a un réel ($a \neq 0$ modulo π). On pose $p_n = \sin \dfrac{a}{2^n} \Pi_{i=1}^n \cos \dfrac{a}{2^i}$. Préciser la nature de (p_n) et exprimer simplement p_n en fonction de n.

Exercice 7 : Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{7u_n+6}{u_n+6}$. En considérant la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n-3}$, pour $n \in \mathbb{N}$, étudier la convergence de (u_n).

Exercice 8 : a) Soit $U_n = \sum_{k=0}^n \dfrac{1}{C_n^k}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

c) Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{E(nx)}{n}$ (où E désigne la partie entière).

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{kn}$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

e) Soit $u_n = \cos\dfrac{1}{2} \times \ldots\ldots \times \cos\dfrac{1}{2^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la convergence de la suite (u_n), puis déterminer sa limite.

Exercice 9 : Soit (U_n) définie par $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n^2 + \dfrac{1}{2}$ et $U_0 = \dfrac{1}{2}$. Etudier la convergence de cette suite.

Exercice 10 : Soient U_0 et V_0 deux réels tels que $U_0 < V_0$. On définit (U_n) et (V_n) par $U_{n+1} = \dfrac{U_n+V_n}{2}$ et $V_{n+1} = \dfrac{U_n+2V_n}{3}$. Montrer que ces deux suites convergent et ont la même limite.

Exercice 11 :
a) Soit la suite $U_{n+1} = 1 - e^{-U_n}$ et $U_0 \in \mathbb{R}$. Etudier graphiquement la convergence de (U_n) suivant les valeurs de U_0, puis retrouver ces résultats “par le raisonnement”.
b) On définit (U_n) par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n}$. Etudier la convergence de (U_n).

Exercice 12 : Soient a et b deux réels donnés tels que $0 < a < b$. On définit les suites :
- $U_0 = a$ et $U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$;
- $V_0 = b$ et $V_{n+1} = \sqrt{U_{n+1} V_n}$.
Montrer que ces deux suites ont la même limite, puis calculer cette limite en posant $\cos \alpha = \frac{a}{b}$.

Exercice 13 :
a) Déterminer un équivalent simple de $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ (lorsque a et b sont des réels quelconques).
b) Déterminer $lim_{n \to +\infty} u_n$ à l'aide d'équivalents dans les cas suivants :
$u_n = \left(\frac{n}{n-a}\right)^n$ $(a \notin \mathbb{N})$, $u_n = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n$ (a et b réels positifs distincts).

Exercice 14 : Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}}$.
a) Prouver que (u_n) est convergente.
b) Pour n non nul, on pose $w_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n-1}^2}$. Déterminer w_n, en déduire $\lim_{n \to +\infty} n u_n^2$, puis un équivalent de u_n.

Exercice 15 : Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 \leq u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1}$ et $2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1$. En déduire que (u_n) est divergente.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - \frac{1}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n^2} \leq 1 - \frac{1}{u_n^2}$. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 16 : Soit (U_n) une suite telle que (U_{2n}), (U_{2n+1}) et (U_{3n}) convergent. Montrer que (U_n) converge.

Exercice 17 (Moyenne de Cesaro) : Soit (U_n) une suite convergeant vers une limite l. On considère la suite (V_n) définie par

$$V_n = \frac{1}{n}(U_1 + ... + U_n).$$

Montrer que (V_n) est convergente de limite l.

Application : Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{3u_n + 1}$.
a) Montrer que (u_n) converge.
b) Soit $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} v_n$.
c) En utilisant le théorème de Cesaro, donner un équivalent simple de u_n.

Exercice 18 : Déterminer les valeurs d'adhérence de $U_n = (-1)^n + (1 + (-1)^n)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 19 : Soit $U_n = \cos(\alpha S_n)$ où $\alpha \in]0, \pi[$ et $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de U_n est $[-1, 1]$.

Exercice 20 : Soit (U_n) définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. On suppose que cette suite admet une unique valeur d'adhérence a. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} U_n = a$.
Exercice 21 : Soit (U_n) définie par $U_0 \in \mathbb{R}$ et $U_{n+1} = U_n e^{-U_n}$. Etudier la convergence de (U_n) suivant la valeur de U_0. En particulier, donner un équivalent de U_n quand $U_0 > 0$.

Exercice 22 : Soit $\Phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection telle que la suite $U_n = \left(\frac{\Phi(n)}{n}\right)$ converge. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$.

Exercice 23 : Soit la suite

$$U_n = \left(\frac{1^{\frac{p}{n}} + 2^{\frac{p}{n}} + ... + p^{\frac{p}{n}}}{p}\right)^n \, (n > 0, p > 0).$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} U_n = p!$.

Exercice 24 : Soient (U_n) une suite de nombres réels positifs et (V_n) la suite définie par la relation :

$$V_n = \sqrt{U_1 + \sqrt{U_2 + ... + \sqrt{U_n}}}.$$

a) Montrer que la suite (V_n) est croissante.
b) Montrer que si (U_n) est une suite constante, la suite (V_n) est convergente et calculer sa limite.
c) Soient a et b des nombres réels strictement positifs. Montrer que si, pour tout entier naturel non nul n, $U_n = ab^{(2n)}$, la suite (V_n) est convergente et calculer sa limite.
d) On suppose que, pour tout entier naturel non nul n, $U_n > 0$. Montrer que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la suite $(2^{-n}\text{Ln}U_n)$ est majorée.

Exercice 25 : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et soit $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ une suite de rationnels qui converge vers x ($p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$.

Exercice 26 : Soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on associe les rationnels $x_n = p^{-n}E(p^n x)$ et $y_n = x_n + p^{-n}$ (valeurs approchées de x à p^{-n} près, respectivement par défaut et par excès). Montrer que ces deux suites convergent vers x.

Exercice 27 : Soit (x_n) une suite de réels. Montrer que la suite (e^{ix_n}) converge si et seulement si il existe une suite d'entiers (p_n) telle que la suite réelle $(x_n - 2\pi p_n)$ converge.
Application : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence de la suite $(e^{in^2\alpha})$.

Exercice 28 (Lemme des prisonniers) : Soit (U_n) une suite bornée de nombres complexes. On note T l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite. On suppose que T est inclus dans un ensemble $\{a_1, ..., a_p\}$ à p éléments. Soit β un nombre réel positif et strictement inférieur à $\inf_{i\neq j} |a_i - a_j|$. Montrer que si $|U_{n+1} - U_n| \leq \beta$ à partir d'un certain rang, alors la suite (U_n) converge.

Exercice 29 : Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$et $L = \{n\alpha + 2k\pi; n, k \in \mathbb{Z}\}$.
a) Montrer que L est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
b) Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Montrer que soit il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $G = m\mathbb{Z}$, soit que G est dense dans $\mathbb{R}$ (on pourra étudier $\inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$).
c) Montrer que L est dense dans $\mathbb{R}$.
d) Montrer que $\inf_{\alpha \in]0,\pi[}\{\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\sin n\alpha|\} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 30 :
a) Soient a et b deux entiers naturels supérieurs à 2 et premiers entre eux. Montrer que le nombre $\dfrac{\mathrm{Ln} a}{\mathrm{Ln} b}$ est irrationnel.
b) Soient un nombre réel non nul et (U_n) la suite de nombres complexes définis par $U_n = e^{i\alpha \mathrm{Ln} n}$. Montrer que cette suite est divergente.

Exercice 31 :
1) Soit p un réel positif. On pose $U_n = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{j^p}$. Montrer que cette suite converge si et seulement si $p > 1$. Dans le cas $p = 4$, quel terme de la suite (U_n) suffit-il de calculer pour être certain d'avoir une valeur approchée de la limite à 10^{-5} ?
2) On considère dans cette partie le cas $p = 2$.
Soit a un réel positif ; on suppose que la fonction $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.
a) Montrer que la suite $I_j = \displaystyle\int_0^a f(t)\sin(jt)dt$ converge vers 0.
b) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(t-\pi)\cos(2jt)dt$.
c) Vérifier que $2\sin t \sum_{i=1}^{n} \cos(2it) = \sin((2n+1)t) - \sin t$.
d) Montrer que la fonction $\dfrac{t}{\sin t}$ est de classe C^1 sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.
e) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 32 :
a) Soit (U_n) une suite de nombres complexes telle que

$$(*)|U_{n+1} - U_n| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Montrer que (U_n) converge.
b) Montrer que de toute suite de Cauchy de $\mathbb{C}$, on peut extraire une sous-suite vérifiant (*).

Accélération de la convergence d'une suite

Voir le livre de T. Lambre, L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques (analyse), Ellipse.

Exercice 33 : Soit (U_n) une suite réelle qui converge vers l. On pose $e_n = |U_n - l|$ et $\lambda_n = \dfrac{e_{n+1}}{e_n}$. Supposons que la suite (λ_n) converge vers λ. Montrer que $0 \leq \lambda \leq 1$ (λ s'appelle le coefficient de convergence de la suite (U_n)). On conserve ces notations dans les exercices 30 et 31.

Exercice 34 (Méthode de Romberg) : Soit $U_n = l + a\lambda^n + O(\mu^n)$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $0 < |\mu| < |\lambda| < 1$. On pose $V_n = \dfrac{U_{n+1} - \lambda U_n}{1-\lambda}$. Montrer que $V_n - l = O(\mu^n)$.
Application : $U_n = 2^n \sin \dfrac{\pi}{2^n}$ (Approximation de π par la méthode d'Archimede).

Exercice 35 (Méthode d'Aitken) : Soit (U_n) comme dans l'exercice 30. On pose $y_{n+1} = U_n - \dfrac{(U_{n+1}-U_n)^2}{U_{n+2} - 2U_{n+1} + U_n}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} y_n = l$, puis que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{y_n - l}{U_{n+k} - l} = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Application : $U_n = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p^2}$ (voir exercice 21). Vérifier que $y_n = U_n + \dfrac{(n+2)^2}{(2n+3)(n+1)^2}$.
Calculer y_{10}, y_{100}, y_{1000} et comparer avec les termes de même rang de la suite (U_n). Calculer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{y_n - y_{n-1}}$

Exercice 36 (Constante d'Euler) : Soit la suite (U_n) définie par

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{n} - \mathrm{Ln} n.$$

1) Montrer que cette suite converge. On note U sa limite.
2) Rapidité de la convergence

On note r_i et s_i les aires respectives des rectangles $\mathcal{R}_i$ et des triangles $\mathcal{S}_i$ de la figure ci-dessus.
a) Vérifier que $U_n = 1 - \sum_2^n s_i$; en déduire que la suite $\sum_{i=2}^n s_i$ est convergente, puis que $U = 1 - \sum_{i\geq 2} s_i$.
b) On pose $e_n = U_n - U$. Montrer que $e_n \leq \dfrac{1}{2n}$.
c) Vérifier que pour $i \geq 2$, on a $s_i \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}\right)$. En déduire $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq e_n$, puis

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq U_n - U \leq \frac{1}{2n}.$$

d) Que dire de la rapidité de convergence de (U_n) ? Combien faut-il calculer de termes de la suite (U_n) pour avoir une valeur approchée de U à 10^{-5} près ?
3) Accélération de la convergence
a) A partir de l'encadrement de $U_n - U$ donné en 2c), montrer que l'on a $0 \leq U - \left(U_n - \dfrac{1}{2n}\right) \leq \frac{1}{2n^2}$; en déduire $U - \left(U_n - \dfrac{1}{2n}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
b) Justifier l'introduction de la suite $V_n = 2U_{2n} - U_n$. Calculer V_{10}, V_{100} et V_{1000} ; comparer avec les termes de même rang de (U_n).

4) Développement asymptotique

a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n(U_n - U) = \dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n^2(U_n - U - \frac{1}{2n}) = -\frac{1}{12}$.

c) En déduire qu'il existe une suite (ε_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et

$$U_n = U + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$

Exercice 37 : Soit $a \in]1, +\infty[$. On considère les suites définies $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$ et $x_0 > a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + a}{x_n + 1}$.

1) Etudier la convergence de ces deux suites.

2) Dans le cas où $a = \sqrt{3}$, comparer la vitesse de convergence de ces deux suites.

3) En déterminant un équivalent de $u_n - \sqrt{a}$ et $x_n - \sqrt{a}$, comparer les vitesses de convergence des suites (u_n) et (x_n).

Exercice 38 : Etudier les vitesses de convergence des suites définies par :

- $u_0 = a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $v_0 = b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Applications aux équations

Voir le livre de J. P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, Presses Universitaires de Grenoble.

Exercice 39 (Méthode de Bernoulli, 1728) : On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$.

a) Montrer que P possède trois racines réelles $x_1 < x_2 < x_3$. Encadrer chacune de ces racines par deux entiers consécutifs. Quelle est la plus grande racine en valeur absolue ? Soit E l'ensemble des suites réelles (U_n) vérifiant $U_{n+3} = 2U_{n+2} + U_{n+1} - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que toute suite de E est déterminée par la donnée de ces trois premiers termes U_0, U_1 et U_2.

c) Montrer que E contient exactement trois suites géométriques de premier terme 1 et dont on précisera la raison.

d) Vérifier que les suites de la forme $U_n = ax_1^n + bx_2^n + cx_3^n$ (où a, b et c sont réels) appartiennent à E, puis que toute suite de E est de cette forme.

e) Soit (U_n) la suite de E définie par $U_0 = U_1 = 0$ et $U_2 = 1$. Montrer que (U_n) est de la forme précédente avec $a \neq 0$. En déduire la limite du quotient $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ quand n tend vers l'infini. Calculer les premiers termes de la suite (U_n) et donner une valeur approchée de x_1 à 10^{-3} près.

f) Ecrire le polynôme Q dont les trois racines sont $x_1 - 1$, $x_2 - 1$ et $x_3 - 1$. Montrer que $x_3 - 1$ est, en valeur absolue, la plus grande des trois racines. En déduire une méthode de calcul de x_3.

g) Donner une méthode similaire pour x_2.

Exercice 40 (Méthode de Lagrange, 1769) Soit $P(x) = 7119x^3 - 41349x^2 + 75347x - 49345$.

a) Vérifier que ce polynôme admet une unique racine réelle α.

b) Calculer $P(3)$ puis $P(4)$, en déduire qu'il existe $y > 1$ tel que $\alpha = 3 + \dfrac{1}{y}$.

c) En développant $P\left(3+\frac{1}{y}\right)$, montrer qu'il existe un polynôme Q de degré 3, à coefficients entiers, de coefficient dominant positif tel que $Q(y)=0$.
d) Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)<0$ et $Q(n+1)>0$. En déduire qu'il existe $z>1$ tel que $y=7+\frac{1}{z}$, puis un polynôme R de degré 3, à coefficients entiers, de coefficient dominant positif tel que $R(z)=0$.
e) Vérifier qu'il existe un unique entier n tel que $R(n)=0$; en déduire la valeur exacte de la racine rélle du polynôme P.

Exercice 41 : Utiliser la méthode d'ajustement linéaire sur les exemples suivants.
a) $f(x)=x^3-3x+1$;
b) $f(x)=e^{3x}-x-30$.

Exercice 42 (Méthode de Newton) : Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $I=[a,b]$. On suppose que $f(a)<0$, $f(b)>0$ et $f''>0$ sur I. Vérifier que ces hypothèses assurent l'existence et l'unicité d'un solution α de l'équation $f(x)=0$. sur I.
a) Montrer $a-\frac{f(a)}{f'(b)} \leq \alpha \leq b-\frac{f(b)}{f'(b)}$.
b) Donner une interprétation graphique de ces inégalités.
On pose $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$, $x_0=b$, $y_0=a$, $x_{n+1}=g(x_n)$ et $y_{n+1}=y_n+\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$. Soit C la tangente au graphe de f au point d'abscisse b et on désigne par B_n le point de C d'abscisse x_n et A_n celui d'abscisse y_n.
c) Donner une construction géométrique des points A_n et B_n.
d) Vérifier que la suite (x_n) est décroissante, minorée par α tandis que la suite (y_n) est croissante, majorée par α.
e) Etablir $0 \leq x_n-y_n \leq (x_0-y_0)\left(1-\frac{f'(a)}{f'(b)}\right)^n$ et retrouver la convergence des suites (x_n) et (y_n).
f) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|}=0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2}=\frac{f^{(2)}(\alpha)}{2f'(\alpha)}$.
Application : $I=[1,2]$, $f(x)=x-\frac{3}{x^2}$.

Exercice 43 (Méthode de la fausse position) : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, de dérivées première et seconde positives sur $[a,b]$. On suppose que $f(a)<0$ et $f(b)>0$. Soit C la courbe représentative de f et soient A et B les points de C d'abscisses respectives a et b.
a) Montrer qu'il existe une unique solution α à l'équation $f(x)=0$ dans $[a,b]$.
On construit une suite de points de la manière suivante : on pose $A_0=A$ et on construit A_{n+1} en traçant la droite A_nB. Celle-ci rencontre l'axe Ox en un point dont on note l'abscisse x_{n+1}. Le point A_{n+1} est le point de C d'abscisse x_{n+1}.
b) Faire une figure.
c) Montrer que si on pose $g(x)=x-\frac{b-x}{f(b)-f(x)}f(x)$, $x_{n+1}=g(x_n)$; vérifier que $0\leq g'(\alpha)<1$.
d) Etudier la suite définie par $x_0\in[a,b]$ et $x_{n+1}=g(x_n)$.
e) Majorer $\frac{|x_n-\alpha|}{|x_{n+1}-\alpha}$; que dire de la rapidité de convergence de cette suite.

Application : $a = 2$, $b = 4$ et $f(x) = x^2 - x - 7$.

<u>Exercice 44 :</u> On considère l'équation (E) $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.
1) Montrer que cette équation admet une unique solution α dans l'intervalle $[1,3;1,4]$.
2) En utilisant la méthode par dichotomie, donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près, puis 10^{-6} près.
3) On pose $\phi(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$. En considérant la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \phi(u_n)$, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près, puis 10^{-6} près (Méthode itérative).
4) Soit la fonction $g(x) = f(x) + x$. En étudiant une suite de la forme $v_{n+1} = g(v_n)$, peut on obtenir une valeur approchée de α ?
5) En utilisant la méthode de Newton, donner une valeur de α à 10^{-3} près, puis 10^{-6} près.
6) Quelle est, pour cette équation, la méthode la plus performante ?

<u>Suites de nombres complexes et géométrie</u>

<u>Exercice 45 :</u> Etant donnés deux nombres complexes a et b tels que $a \neq 0$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$, on définit la suite (z_n) par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = az_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans un plan orthonormé, on notera M_n le point d'affixe z_n.
1) Montrer par récurrence que, pour $n \geq 1$, on a :

$$z_n = \frac{b(1-a^n)}{1-a}.$$

2) p étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose dans cette question $a = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$. Montrer qu'alors la suite (z_n) est périodique de période p.
3) α étant un réel donné tel que $\alpha \neq k\pi$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, on pose dans cette question $a = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$ et $b = 2\sin\alpha$.
Quelle est la nature de l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = az + b$? En déduire que l'ensemble des points M_n est inclus dans un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
Faire un dessin dans le cas $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

<u>Exercice 46 :</u>
1) On se donne deux nombres complexes non nuls a et s et l'on cosidère la suite de nombres complexes (z_n) définies par $z_{n+1} = sz_n + a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $z_0 = 0$.
1a) Exprimer simplement z_n en fonction de a, s et n lorsque $s \neq 1$. Que peut on dire de la suite si $s = 1$? si $s = -1$?
1b) Deux éléments distincts de la suite peuvent ils être égaux ? montrer qu'alors la suite est périodique.
1c) Vérifier que deux termes consécutifs de la suite (z_n) ne sont jamais égaux et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(*)\frac{z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n} = s + 1.$$

1d) Inversement, soit une suite vérifiant les 3 conditions suivantes : deux termes consécutifs ne sont jamais égaux, la relation (*) est satisfaite, les deux premiers termes sont 0 et a. Montrer qu'une telle suite est confondue avec (z_n).
2) Soit θ un nombre compris strictement entre 0 et π, et soit r un réel donné strictement positif. Si P désigne un point quelconque, on note f_P la similitude de centre P, d'angle θ et de rapport r. On considère la suite de points définie par $A_0 = 0$ et $A_{n+1} = f_P(A_n)$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note a l'affixe de A_1.
2a) En utilisant 1), montrer que A_{n+1} est le transformé de A_n dans une similitude S indépendante de n (on ne calculera que l'affixe du centre de S).
2b) On suppose que $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$. Déterminer l'angle, le rapport et le centre U de S. Vérifier que tous les points A_i appartiennent, selon la parité de i, à l'une ou l'autre de deux droites fixes. Comment faut-il choisir θ pour que la suite (A_n) soit périodique.

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1 : Vrai ou faux ?
(i) Si (u_n) est une suite convergente de réels et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors $(f(u_n))$ est une suite convergente.
(ii) Si (u_n) est une suite de Cauchy de réels et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors $(f(u_n))$ est une suite de Cauchy.
(iii) L'image d'un ouvert (respectivement d'un fermé) de $\mathbb{R}$ par une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un ouvert (respectivement un fermé) de $\mathbb{R}$.
(iv) L'image d'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ par une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Soit $X \subset \mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit, pour $x \in X$, $f^+(x) = \sup(f(x), 0)$, et de la même façon $f^-(x) = \inf(f(x), 0)$. Montrer que $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, $\sup(f^+, f^-) = |f|$, $\inf(f^+, f^-) = 0$.

Exercice 3 : Etudier la continuité de l'application $f(x) = \cos x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = \sin x$ sinon.

Exercice 4 (Fonctions de Dirichlet) :

1) Soit f une fonction définie par $]0, +\infty[$ par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ si p et q sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que f est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.
2) Etudier la continuité de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$ si x est irrationnel et $g\left(\dfrac{p}{q}\right) = \frac{p}{p+q+1}$ si p et q sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux.

Exercice 5 : A tout $r \in \mathbb{Q}$ on associe son unique représentant canonique $\dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux) et on dit que p et q sont respectivement le numérateur et le dénominateur de r.
1) Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$). Montrer que l'ensemble A des rationnels de $I = [a, b]$ dont le dénominateur est au plus égal à N est fini.
2) Etudier la continuité de l'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ si $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ et $f(x) = \dfrac{pq}{p^2+q^2+2q}$ si $x \in \mathbb{R}^+$ est rationnel de représentant canonique $\dfrac{p}{q}$.

Exercice 6 : On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'à chacune d'elles f, on puisse associer un K_f tel que, pour tout x, tout y dans $\mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K_f |\sin x - \sin y|.$$

1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que toute fonction f de E est périodique, continue et bornée.

Exercice 7 : Soient f et g deux applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Etudier la continuité de l'application M de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $M(x) = \sup_{t\in[-1,1]}(f(t) + xg(t))$.

Exercice 8 : Soit f une fonction croissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
1) On suppose que I est fermé, borné. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, l'ensemble des points x intérieurs à I tels que $f(x+) - f(x-) \geq \dfrac{1}{n}$ est fini. En déduire que l'ensemble des points de I où f n'est pas continue est dénombrable.
2) Etendre ce résultat au cas d'un intervalle quelconque.
3) Donner un exemple de fonction croissante sur $[0,1]$ dont l'ensemble des points de discontinuité est infini.

Exercice 9 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in [a,b]$, on définit $\alpha(x) = \inf_{t\in[a,x]} f(t)$ et $\beta(x) = \sup_{t\in[a,x]} f(t)$. Prouver que ces fonctions sont continues sur $[a,b]$. Etudier le cas où f est lipschitzienne.

Exercice 10 : Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$ telles qu'il existe des réels positifs α et β tels que, pour tout x, tout y de $\mathbb{R}$,

$$(*) f(x+y) \leq (1+\alpha|x|)^{\beta} f(y).$$

1) Montrer que la relation (*) implique

$$(**)(1+\alpha|x|)^{-\beta} f(y) \leq f(x+y).$$

En déduire que tout élément de E est continu sur $\mathbb{R}$.
2) Les fonctions suivantes sont-elles dans E ?
$f_1(x) = 1 + |x|$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = e^{-x^2}$.
3) Montrer que E est un groupe pour la multiplication des fonctions. Montrer que, pour tout élément f de E et pour tout nombre réel a, f^a appartient à E.
4) Soit M la partie de E constituée des fonctions f satisfaisant aux conditions supplémentaires $f(0) = 1$ et, pour tout x, tout y dans $\mathbb{R}$, $f(x+y) \leq f(x)f(y)$. Montrer que M est stable pour la multiplication. M est-il un sous-groupe de E ?
5) Pour tout élément f de E, on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{f(x+t)}{f(t)}.$$

Montrer que F appartient à M. L'application $f \to F$ de E dans M est-elle surjective ? injective ?

Exercice 11 : Trouver toutes les applications f dans chacun des cas suivants :
(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(3x)$;
(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 1 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(x^2)$;
(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout x, tout y dans $\mathbb{R}$:

$$f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y).$$

(v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout x, tout y dans $\mathbb{R}$:

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y).$$

Exercice 12 : Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et telle que $f(0)=f(1)$. Pour $p\in\mathbb{N}^*$, on définit $f_p:[0,1-\frac{1}{p}]\to\mathbb{R}$ par $f_p(x)=f\left(x+\frac{1}{p}\right)-f(x)$.

1) Calculer $\sum_{k=0}^{p-1} f_p\left(\frac{k}{p}\right)$.

2) En déduire que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, il existe $c\in[0,1]$ tel que $f(c)=f\left(c+\frac{1}{p}\right)$.

Exercice 13 : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l'$ avec $l,\ l'\in\mathbb{R}$ et $l\neq l'$. Montrer que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\min(l,l')<\lambda<\max(l,l')$, il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)=\lambda$.

Exercice 14 : Soient f et g deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $f\circ g=g\circ f$. Montrer par l'absurde qu'il existe au moins un $c\in[0,1]$ tel que $f(c)=g(c)$.

Exercice 15 : Soit f une fonction croissante sur $]a,b[$. Montrer que si f satisfait la propriété (VI)

$$\text{(VI) pour tout } y\in]f(a),f(b)[,\ \text{il existe } x\in]a,b[\text{ tel que } f(x)=y,$$

alors f est continue sur $]a,b[$.

Exercice 16 :
1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues sur I telles que pour tout $x\in I$, $(f(x))^2=(g(x))^2\neq 0$. Montrer que $f=g$ ou $f=-g$.
2) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|=f(|x|)>0$. Montrer que f est paire.

Exercice 17 :
1) Soient I un intervalle et f une fonction continue et injective sur I. Montrer que f est strictement monotone sur I.
2) Soit $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction strictement décroissante. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $f\circ f=\phi$. Existe-t-il une application continue $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f\circ f(x)+x=0$?

Exercice 18 : Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et f, g des fonctions continues sur $[a,b]$ telles que, pour tout $x\in[a,b]$, $0<g(x)<f(x)$. Montrer qu'il existe $\lambda>0$ tel que pour tout $x\in[a,b]$, $(1+\lambda)g(x)\leq f(x)$.

Exercice 19 : Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $f^-(\{c\})$ n'ait pas exactement deux éléments.

Exercice 20 : Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle compact $[a,b]$. On suppose que $f(a)\leq g(a)$ et que $f(b)\geq g(b)$. Prouver qu'il existe au moins un point c de $[a,b]$ tel que $f(c)=g(c)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 21 : Soient f et g deux fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, périodiques, de périodes respectives α et β ($\alpha>0$ et $\beta>0$). Que dire de $f+g$?

Exercice 22 : Soit f un application continue d'un cercle sur la droite réelle. Prouver alors qu'il existe deux points diamétralement opposés ayant même image par f.

Exercice 23 : Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'existe : $l = \lim_{t\to+\infty}(f(t+1)-f(t))$. Vérifier que $\lim_{t\to+\infty}\dfrac{f(t)}{t} = l$.

Exercice 24 :
1) Soit α un réel de la forme $\dfrac{1}{p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Montrer qu'à toute application continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1)$, on peut associer un $t_0 \in [0, 1-\alpha]$ tel que $f(t_0+\alpha) = f(t_0)$.
2) Le résultat s'étend-il à un réel α quelconque ?
3) Application : promenade à vélo !
Un cycliste a parcouru 20 km en une heure.
3a) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
3b) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de 3 mn pendant lequel il a parcouru 1 km.
3c) Montrer qu'il n'existe pas nécessairement d'intervalle de temps de 45 mn pendant lequel il a parcouru 15 km.

Exercice 25 : Soit la fonction $f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 4x^3 - 3x$. Montrer que f admet une fonction réciproque $g : [-1,1] \to [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ continue et décroissante. Ou est dérivable g ? Calculer g' où cette dérivée existe.
Montrer que $g(\cos t) = \cos\dfrac{2\pi - t}{3}$ pour $t \in [0,\pi]$. En déduire une expression de g sur $[-1,1]$.

Exercice 26 :
1) On définit ; $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1$ si $x \in \mathbb{Q}$et $f(x) = x+1$ sinon. Montrer que f est bijective et discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.
2) On définit f par $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ si $x \in]-1,1[$. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1}.

Exercice 27 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^5 + x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est bijective. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$.

2. Séries réelles et complexes

Quelques rappels

La plupart des résultats qui suivent sont dans le cours de Cauchy de 1821. Ce qui lui a valu ce commentaire d'Abel : *"Cauchy est fou, et avec lui il n'y a pas moyen de s'entendre, bien que pour le moment il soit celui qui sait comment les mathématiques doivent être traitées. Ce qu'il fait est excellent, mais très brouillé ......"*

- Soit $\sum u_n$ une série à termes **positifs** (à partir d'un certain rang).

Critère de Riemann : On suppose que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(i) Si $\lambda \neq 0$, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
(ii) Si $\lambda = 0$ et $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge.

Critère de Cauchy : On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(i) Si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge.
(ii) Si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge.
(iii) Si $\lambda = 1$, on ne peut rien dire!!!!!!!!!!!!

Critère de D'Alembert : On suppose que $u_n \neq 0$ (à partir d'un certain rang) et que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(i) Si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge.
(ii) Si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge.
(iii) Si $\lambda = 1$, on ne peut rien dire!!!!!!!!!!!

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites **positives** (à partir d'un certain rang). On a alors :
(i) Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour n assez grand et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
(ii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de la même nature.

- Soient $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction positive, continue et décroissante. Alors, la série $\sum f(n)$ est de la même nature que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$.

- Soit (a_n) une suite réelle décroissante tendant vers 0. Alors, la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ est convergente. De plus, si on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ et $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.

- Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles ou complexes absolument convergentes. La série $\sum w_n$ de terme générale

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$$

est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

- Critère d'Abel : Soient u_n et v_n deux suites réelles. On suppose que
(i) la suite (u_n) est positive, décroissante et convergente vers 0;
(ii) la suite des sommes partielles associée à (v_n) est bornée.
Alors, la série $\sum u_n v_n$ est alors convergente.

Quelques exercices

Exercice 1 : Vrai ou faux?
(i) Soit (a_n) une suite à termes positifs. Alors, $\sum a_n$ et $\sum a_n^2$ sont de même nature.
(ii) Pour tout $\alpha > 0$, la série de Riemann $\sum_{n>0} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.
(iii) Pour tout $\alpha > 1$, tout $\beta > 1$, la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\mathrm{Ln} n)^\beta}$ converge.
(iv) Soit (u_n) une série à termes positifs. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et si pour n assez grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
(v) Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réels. Alors, $\sum(u_n + v_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Et que se passe-t-il si les suites sont à termes positifs?
(vi) Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ pour n assez grand. Alors, si $\sum v_n$

converge, $\sum u_n$ converge.
(vii) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors, $\sum u_n$ converge si et seulement si il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} u_k \leq M$.
(viii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
(ix) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ou nuls. S'il existe $a \in]0, +\infty[$ tel que $\lim_{n \to +\infty} n^a u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.

Exercice 2 : Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

1) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$;

2) $u_n = \dfrac{1}{2n(n-1)}$;

3) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} e^n$;

4) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + 7\cos n}$;

5) $u_n = \dfrac{1! + 2! + ... + n!}{(n+p)!}$ (suivant la valeur de p) ;

6) $u_n = \dfrac{1}{2^p}$ si $n = 2p$ et $u_n = \dfrac{1}{2^{p+1}}$ si $n = 2p - 1$ (Calculer la somme).

7) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, puis $u_n = \sin \frac{(-1)^n}{n}$.

8) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

9) $u_n = |\sqrt{n^2+n+1} - (n^3 + an^2 + cn + d)^{\frac{1}{3}}|$ où a, b et c sont des réels fixés.

Exercice 2 (bis) : Déterminer la nature des séries de terme suivant :

1) $u_n = 1 - \int_0^1 (1 - t^n)^{\frac{1}{n}} dt$;

2) $u_n = \text{Ln}\left(\cos \dfrac{x}{2^n}\right)$;

3) $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{p=2}^{n} (\text{Ln}p)^2$ où $\alpha > 0$;

4) $u_n = (-1)^n((1 + \frac{1}{n})^{-n}) - \frac{1}{e})$;

5) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$;

6) $u_n = \left(\dfrac{1}{p(n)}\right)^{p(n)}$ où $p(n)$ est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n ;

7) $u_n = \Pi_{p=2}^{n}(2 - (e)^{\frac{1}{p}})$;

8) $u_n = \sin \pi\sqrt{n^2+1}$;

9) $u_n = \dfrac{(-1)^n \sqrt{n} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{n + (-1)^n}$ $(n > 1)$.

10) $u_n = \sin(n! \frac{2\pi}{e})$ puis $v_n = \sin(n! \frac{\pi}{e})$.

Exercice 2 (ter) :

1) $u_n = (\log n)^{-\sqrt{n}}$.

2) $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\log n}$.

3) $u_n = \left(\mathrm{ch}\frac{1}{n}\right)^{-n^3}$.
4) $u_n = \log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)$.
5) $u_n = n^{-\mathrm{ch}\frac{1}{n}}$.
6) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$.
7) $u_n = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) - \mathrm{Arcsin}\left(\frac{n-1}{2n-1}\right)$.
8) $u_n = n^{n^a}$ ($a \in \mathbb{R}$ fixé).
9) $u_n = \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$.
10) $u_n = \frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$.
11) $u_n = n!\ \Pi_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{2^k}\right)$.
12) $u_n = \left(C_{np}^{n}\right)^{-1}$ (p un entier fixé différent de 0 et 1).
13) $u_n = (-1)^n n^{-(1+n^a)}$ ($a \in \mathbb{R}$).
14) $u_n = (-1)^n \exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$.
15) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.
16) $u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
17) $u_n = (-1)^n\left(\tan\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
18) $\sin\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right)$.

Exercice 3 : Soit (a_n) une suite réelle et positive.
1) Que peut-on dire de $\sum_n \frac{a_n}{1+a_n}$ quand $\sum a_n$ converge ? diverge ?
2) Que peut-on dire de $\sum \frac{1}{1+n^2 a_n}$ quand $\sum a_n$ converge et de $\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ quand $\sum a_n$ diverge.

Exercice 4 : Soit E l'ensemble des suites (x_n) de réels vérifiant
(i) $x_0 = 1$;
(ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 < x_k \leq x_{k+1}$;
(iii) La série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{x_n^2}{x_{n+1}}$ est convergente.
1) Montrer que pour toute suite (x_n) de E, la somme $S = \sum u_n$ vérifie $S \geq 4$.
2) Peut-on avoir $S = 4$?

Exercice 5 : Etudier la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \frac{1}{1+2^\alpha+..+n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 : Soit la série $\sum u_n$ où $u_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t)dt$.
1a) Calculer u_0, u_1 et trouver une relation permettant de calculer les u_n par récurrence.

1b) Trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la nature de $\sum u_n$.
2) Exprimer $\sum u_n$ sous la forme d'une intégrale.

Exercice 7 : Calculer $S = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n$ où

1) $u_n = \dfrac{4n-3}{n(n^2-4)}$;
2) $u_n = \dfrac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$;
3) $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$;
4) $u_n = \dfrac{E(\sqrt{n+1})-E(\sqrt{n})}{n}$.

Exercice 8 : Soient (ε_n) une suite à valeurs dans $\{-1,1\}$ et (α_n) une suite réelle décroissante. On suppose en outre que la série $\sum_{n\geq 1} \varepsilon_n \alpha_n$ converge.
1) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)\alpha_n = 0$.
2) Etudier le cas où $\varepsilon_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 : Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels positifs, divergentes et telles que $a_n \sim b_n$ au voisinage de $+\infty$. On note $A_n = \sum_{k=0}^n a_n$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_n$. Montrer que $A_n \sim B_n$ au voisinage de $+\infty$. Que se passe-t-il si les séries convergent ?

Exercice 10 :

1) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\dfrac{\theta}{k}\right)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
2) Déterminer un équivalent de $\left(\sum_{k\geq n} \dfrac{1}{k^2}\right)$, puis en donner un développement limité à l'ordre 2.
3) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}\right)^{-\frac{1}{2\log n}}$.
4) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}\right|^{\frac{1}{\log(\log n))}}$.

Exercice 11 : Donner un équivalent quand $x \to +\infty$ de $\left(\sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+p)^2}\right)$.

Exercice 12 : Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, tendant vers 0 en décroissant. On suppose que la suite $((\sum_{k=1}^n a_k) - na_n)$ est bornée. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

Exercice 13 : Etudier la convergence de la série de terme générale $u_n = e^{in\theta}$ où $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exercice 14 : Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$. Montrer que si la série $\left(\sum_{n\geq 1} \dfrac{u_n}{\mathrm{Ln}(\frac{1}{u_n})}\right)$ converge, il en est de même de la série $\left(\sum_{n\geq 2} \dfrac{u_n}{\mathrm{Ln} n}\right)$.

Exercice 15 :

1) Calculer $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ à 10^{-1} près.

2) Majorer l'écart entre $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^3}$ et $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^3}$.

3) Déterminer une valeur approchée à 10^{-5} de la somme $\sum \frac{k}{3^k}$.

4) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1}$ et soit $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

4a) Donner un encadrement de $R_n = S - S_n$; Déterminer n tel que $|R_n| \leq 10^{-4}$.

4b) Montrer qu'il existe a et b tels que

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)} + 0\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

4c) Déduire de 4b) une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 16 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < 1 < b$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\alpha_n = E(\log n)$. Comparer les règles de Cauchy et de D'Alembert pour la série de terme général $u_n = a^{n-\alpha_n} b^{\frac{1}{2}\alpha_n(\alpha_n+1)}$.

Exercice 17 :

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $\int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t} dt = n$.

2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3) On note $v_n = n + \log u_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Etudier la convergence de cette suite. On exprimera sa limite sous la forme d'une intégrale.

4) Quelle est la nature de $\sum u_n$?

Exercice 18 : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On note (pour $n \in \mathbb{N}$) $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $\sum n u_n$ converge si et seulement si $\sum R_n$ converge, et dans le cas de la convergence, que ces deux séries ont la même somme.

Exercice 19 : Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)^3 u_{n+1} = (n+1)u_n + n.$$

Exercice 20 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{1}{n}$ si n est le carré d'un entier et $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ sinon. Montre que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Exercice 21 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$. Quelle est la nature de $\sum (-1)^n u_n$?

Exercice 22 (Règle de Raabe-Duhamel) :

1) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

2) Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + +o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Montrer que si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge et que si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
3) Déterminer pour $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-)^2$ la nature de la série de terme générale
$$u_n = \frac{a(a+1)....(a+n-1)}{b(b+1)....(b+n-1)}.$$
Exercice 23 : Soit E un espace vectoriel normé.
1) Soit (x_n) une suite de Cauchy de E qui vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, :
$$(1)\ ||x_{n+1} - x_n|| \leq 2^{-n}.$$
Montrer qu'il s'agit d'une suite de Cauchy.
2) Montrer que de toute suite de Cauchy de E, on peut extraire une suite vérifiant (1).
3) Montrer que E est complet si et seulement si toute suite de E vérifiant (1) converge.
4) Montrer que E est complet si et seulement si toute série de E absolument convergente est convergente.

3. Suites et séries de fonctions

Quelques rappels

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Suites de fonctions

(i) Continuité : Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur l'intervalle I qui converge uniformément vers une fonction f sur I, alors f est continue sur I.

(ii) Dérivabilité : Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur I. On suppose que
- la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I ;
- la suite (f'_n) converge uniformément sur I.
Alors, f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \lim_{n \to +\infty} f'_n(x)$.

(iii) Intégrabilité : Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle **compact** $I = [a, b]$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f. Alors, f est continue sur I, donc intégrable sur I, et
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$
Remarque : dans (i) et (ii), on peut remplacer la convergence uniforme par la convergence uniforme sur tout compact.

Séries de fonctions

(i) Continuité : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I, la fonction $x \to \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur I.

(ii) Dérivabilité : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur I. On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur I et que $\sum f'_n$ converge uniformément sur I. Alors, la fonction $x \to \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est dérivable en tout x de I de dérivée $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

(iii) Intégrabilité : Soit $I = [a, b]$ un intervalle **compact** de $\mathbb{R}$ et soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur I. Alors,

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Remarque : dans (i) et (ii), on peut remplacer la convergence uniforme par la convergence uniforme sur tout compact.

Un peu d'histoire

La convergence des suites ou séries de fonctions n'est pas une notion facile à maitriser, puisque même le grand Cauchy s'est trompé en l'étudiant ! Comme le confirme Abel (1826) : *" Dans l'ouvrage de Mr Cauchy on trouve le théorème suivant : " Lorsque les différents termes de la série* $u_0 + u_1 + u_2 + ..$ *sont des fonctions continues, la somme s de la série est aussi (....) fonction continue de x". Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série* $\sin x - \dfrac{1}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{3} \sin 3x + ...$ *est discontinue pour toute valeur* $(2m + 1)\pi$ *de x ...".* Heine (1870) confirme le flou autour de cette notion après les travaux de Cauchy et Bolzano dans la première moitié du 19e siecle : *" Jusque récemment on croyait que l'intégrale d'une série convergente (...) est égale à la somme des intégrales des termes de la série, et Mr Weierstrass a été le premier à observer .....".* Ainsi, on attribue à Weierstrass et à son école la définiton de la convergence uniforme (1841) ainsi que la plupart des théorèmes sur la continuité, la dérivabilité et l'intégrabilité des suites et séries de fonctions (1850-1880).

Quelques exercices

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

(1) Si (f_n) converge simplement vers f sur $A \subset \mathbb{R}$ et si toutes les fonctions f_n sont continues sur A, alors f est continue sur A (Cauchy, Cours d'analyse, 1821).

(2) Il n'existe pas de suite de fonctions (f_n) continues sur $A \subset \mathbb{R}$ qui converge simplement (et pas uniformément) sur A vers une fonction f continue sur A (on pourra considérer $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2x^2}$, exemple dû à Cantor, 1850).

(3) Si (f_n) est une suite de fonctions croissantes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f sur I, alors f est croissante sur I.

(4) Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Alors,

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt.$$

(5) Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur $[0, 1]$ qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$, alors f est dérivable sur $[0, 1]$.

Exercice 1 : Etudier la convergence simple, puis uniforme de (f_n) sur I.

(1) $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n}$ et $I = \mathbb{R}$;
(2) $f_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}$ et $I = [0, +\infty[$;
(3) $f_n(x) = \dfrac{\sin^2 nx}{x \sin x}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $f_n(x) = 0$ sinon, et $I = \mathbb{R}$;
(4) $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}$ et $I = \mathbb{R}$;
(5) $f_n(x) = (n-1)x$ si $0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}$ et $f_n(x) = 1 - x$ si $\dfrac{1}{n} \leq x \leq 1$, et $I = [0, 1]$;
(6) $f_n(x) = \cos \dfrac{nx}{n+1}$ et $I = \mathbb{R}$;
(7) $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$ si $|x| < n$ et $f_n(x) = 0$ sinon, et $I = \mathbb{R}$.
8) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.
9) $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^{2n}}$ sur $\mathbb{R}^+$.
10) $f_n(x) = \sin(\sqrt{x + 4\pi^2 n^2}) - \dfrac{x}{4n\pi}$ sur $\mathbb{R}^+$.
11) $f_n(x) = \dfrac{nx^2 e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.
12) $f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.

Exercice 3 : Soit (f_n) une suite de fonctions bornées qui converge uniformément sur un intervalle I vers une fonction f. Montrer que les fonctions f_n sont uniformément bornées.

Exercice 4 : Soient (f_n) une suite d'applications d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f et si g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$.

Exercice 5 : Soit (f_n) une suite de fonctions uniformément continues sur un intervalle I et qui converge uniformément vers une fonction f sur I. Montrer que f est uniformément continue sur I.

Exercice 6 : Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément sur un intervalle I vers une fonction f. Montrer que la suite $\left(\dfrac{f_n}{1+f_n^2}\right)$ converge uniformément vers $\left(\frac{f}{1+f^2}\right)$ sur I.

Exercice 7 : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On suppose que f n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+$. Soient (f_n) et (g_n) les suites de fonctions définies par $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f\left(\dfrac{x}{n}\right)$.
(1) Montrer que (f_n) et (g_n) convergent simplement vers une même fonction sur $\mathbb{R}^+$. Cette convergence est-elle uniforme ?
(2) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
(3) Soit $a > 0$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et que (g_n) converge uniformément sur $[0, a]$.
(4) Montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction à déterminer.

<u>Exercice 8 :</u> Soit (P_n) définie sur $[-1,1]$ par

$$P_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}.$$

1) Etudier la convergence de (P_n).
2) En déduire la convergence uniforme de la suite de fonctions (Q_n) définies sur $[-1,1]$ par $Q_n(x) = \int_0^x P_n(t)dt$.

<u>Exercice 9 :</u> Soit (P_n) une suite de polynômes de degré au plus N. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in [0,1]$, $|P_n(x)| \leq 1$. Montrer qu'il existe une sous-suite de (P_n) qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers un polynôme de degré au plus N.

<u>Exercice 10 :</u> Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x f(t^n)dt$ si $x \in [0,1]$.

<u>Exercice 11 :</u> On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x + x^n)^n$.
1) Etudier les convergences simples et uniformes de (f_n).
2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \sim \frac{2^{n+1}}{n^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

<u>Quelques exemples de suites de fonctions continues dont la limite n'est pas continue</u>

Exercice 12 : Etudier la convergence (simple, uniforme, absolue et normale) des séries de fonctions suivantes.

(1) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ si $x = n$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

(2) $f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

(3) $f_n(x) = ({}_1)^n \dfrac{n}{n^2+x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

(4) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ sur $\mathbb{R}^+$ (étudier la dérivabilité de la somme, puis en donner un développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 2).

(5) $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ (Etudier la continuité et la dérivabilité de la somme).

(6) $f_n(x) = \text{Arctan}\dfrac{x}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$ (Déterminer la limite de la somme en $+\infty$).

(7) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ sur $\mathbb{R}^+$ (Etudier la continuité de la somme).

8) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}(x^n + (1-x)^n)$.

9) $f_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}^+$.

10) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ si $n < x < n+1$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

11) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}e^{-(x-n)^2}$.

12) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n n^{-x}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

13) $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$, puis $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$

Exercice 13 : On considère $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$ sur $\mathbb{R}^+$.

1) Etudier la convergence de la série des (f_n).

2) On note S la somme des f_n.

2a) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

2b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{S(x)}{x} = +\infty$. La fonction S est-elle dérivable en 0 ?

2c) Etablir $\lim_{x \to +\infty} S(x) = 0$.

Exercice 14 (Fonction ζ de Riemann) :

On note, pour $x \in]1, +\infty[$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

1) Montrer que $\lim_{x \to 1^+} \zeta(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$.

2) Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et exprimer les dérivées successives de ζ comme somme de séries.

3) Etudier les variations et la convexité de ζ.

4) Tracer la courbe représentative de ζ.

Exercice 15 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| \leq M|x|$ (où M est une constante). On définit, pour tout $n \neq 0$, $f_n(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

1) Etudier la convergence de la série $\sum f_n$.

2) Montrer que la somme est continue sur $[a, b]$.

Exercice 16 : Soit $f_n = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1) Etudier les convergences de $\sum f_n$.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la somme f.

3) Calculer $\int_0^1 t^{n+x-1}dt$; en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$.

4) Montrer que f est décroissante, puis déterminer une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

5) Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 17 : Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients réels convergeant uniformément vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 18 : Etudier la série $\sum_n x^\alpha e^{-n^2 x}$. Donner un équivalent de cette somme quand $x \to 0^+$.

Exercice 19 : Montrer que $x \to \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(2^n x)}{n^n} = f(x)$ est de classe C^∞ et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ diverge pour tout réel $x \neq 0$.

exercice 20 : Etudier la fonction $x \to \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-nx}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21 : Prouver que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1}dx = \sum_{n\geq 1} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

Exercice 22 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{Ln}t}{t}\text{Ln}(1-t)dt$.

Exercice 23 : Soit $\sum_n f_n$ la série des applications $t \to \dfrac{1}{n + n^2t^2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Etudier la convergence et la continuité de la somme f.

2) Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 3 en $+\infty$. Le déterminer.

3) Trouver un développement asymptotique de f au voisinage de 0.

Exercice 24 : Montrer que, pour tout $a \in [0, +\infty[$, tout $x \in]0, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^a t^{x-1}e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^{x+n}}{n!(x+n)}$.

Exercice 25 : Pour la série d'applications $\sum f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$, étudier la convergence (simple, absolue, normale, uniforme) et calculer la somme.

Exercice 26 : On note f_n la fonction définie, si $n \geq 1$, par $f_n(x) = n^x e^{-nx}$ sur $]0, +\infty[$.

a) Etudier les convergences de $\sum f_n$;

b) Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que $S_n(x) \sim \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0^+.

Exercice 27 :

a) Etudier les convergences sur $\mathbb{R}^+$ de $\sum f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n}$.

b) On note $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Montrer que $\lim_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$.

Exercice 28 :
a) Etudier les convergences sur $\mathbb{R}^+$ de $\sum_{n\geq 1} f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x)}$.
b) On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. S est-elle dérivable en 0 à droite ?

Exercice 29 :
a) Etudier les convergences sur $]1, +\infty[$ de $\sum f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$.
b) On note $S = \sum_{n\geq 0} f_n$. Former le développement asymptotique de $S(x)$ à la précision $\dfrac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 30 :
a) Etudier les convergences sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $\sum_{n\geq 1} f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{Ln}(1+nx)}{nx^n}$. On note S sa somme.
b) Montrer que S est continue sur $]1, +\infty[$.
c) Montrer que $\lim_{x\to 1^+} S(x) = +\infty$.

Exercice 31 : Démontrer les égalités suivantes.
a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x(x - \mathrm{Ln}(e^x - 1))dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.
b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$ où a, b sont des réels strictement positifs.
c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{a-1}}{1+x^b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$ où $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^{+*}$.

4. Séries entières et séries de Fourier

Séries Entières

Quelques rappels

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Dans la suite, sauf mention du contraire, les séries entières sont à coefficients complexes.
Soit
$$R = \sup\{r \in [0, \infty]; (|a_n|r^n) \text{est bornée}\}.$$
Ce réel R s'appelle le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ est le disque de convergence de cette série entière.
On peut aussi définir le rayon de convergence comme étant l'unique réel $R \in [0, +\infty]$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
- $|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument ;
- $|z| > R \Rightarrow (a_n z^n)$ n'est pas bornée.

On en déduit
- $\sum a_n z^n$ converge $\Rightarrow |z| \leq R$;
- $\sum a_n z^n$ diverge $\Rightarrow |z| \geq R$;

On a le fait crucial suivant : la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact K de $D(0,R)$.

Quelques exercices

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

1) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, sa somme $z \to \sum_n a_n z^n$ est continue sur $D(0, R)$.

2) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Alors, il existe au moins un point du cercle de convergence $\{z \in \mathbb{C}; |z| = R\}$ où la série $\sum a_n z^n$ converge (respectivement diverge).

3) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$. Alors, la somme $x \to \sum_n a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, +R[$.

4) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R = \infty$. Alors, la série converge normalement sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Exercice 2 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1) $\sum n^n z^n$;

2) $\sum \dfrac{z^n}{n^n}$;

3) $\sum (\mathrm{Ln} n)^2 z^n$;

4) $\sum z^{2n}$;

5) $\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$, puis $\sum \dfrac{(np)!}{(n!)^q} z^n$ (où $p, q \in \mathbb{N}$) ;

6) $\sum (3\alpha^n - 5\beta^n) z^n$ où α et β sont des nombres complexes tels que $|\alpha| < |\beta|$;

7) $\sum a_n z^n$ où (a_n) est une suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et pour tout $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

8) $\sum a_n z^n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n dt$.

9) $\sum \left((n^3 + n^2 + n)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{n^2+1}\right) z^n$.

10) $\sum \dfrac{n^2+n}{2^n + n!} z^n$.

11) $\sum \dfrac{\ln(\sqrt{n}+1)}{\ln(\sqrt{n}-1)} z^n$.

12) $\sum (e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}}) z^n$.

13) $\sum (\ln(n!))^2 z^n)$.

14) $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 n^n} z^n$.

15) $\sum (\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^3 - x - 1} dx) z^n$.

16) $\sum (\sqrt{n} + 3^{(-1)^n} n)^{-1} z^n$.

17) $\sum_{n \geq 1} \dfrac{\cos^3 n}{n(n+2)} z^n$.

Exercice 3 :

1) Calculer le rayon de convergence et trouver la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dont les coefficients ont pour valeur $a_n = 3^n$ si n est pair et $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ si n est impair.

2) Même question avec la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}$, puis $\sum \left(n + \frac{1}{n}\right) x^{2n}$.

3) Même question avec $\sum n^3 z^n$, puis $\sum (-1)^n n^2 z^{2n-1}$.

Exercice 4 : Déterminer le développement en série entière de $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(2z+3)}$, et donner son rayon de convergence.

Exercice 5 : Supposons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge mais que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

Exercice 6 : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence $R > 0$ et $R' > 0$.

a) Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$?

b) Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n b_n z^n$?

c) Comparer les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum S_n z^n$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

d) Soit c_n définie par $c_{2n} = a_n$ et $c_{2n+1} = 0$. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$.

e) Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum n a_n z^n$? $\sum n^2 a_n z^n$? $\sum n^d a_n z^n$ (où $d \in \mathbb{N}$) ?

f) Soit $k \in \mathbb{C}^*$. Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum k^n a_n z^n$?

Exercice 7 : Donner le développement en série entière en 0 des fonctions réelles suivantes (on précisera le rayon de convergence) :

1) e^x, $(1+x)^\alpha$, $\mathrm{Ln}(1+x)$, $\mathrm{Arctan}x$.

2) $x \to \mathrm{sh}(\mathrm{Arcsin}x)$;

3) $x \to \displaystyle\int_x^1 \frac{1-\cos t}{t} dt$.

4) $x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{sh}(a^n x)$ où $a \in]-1, 1[$.

5) $x \to \dfrac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}$.

6) $x \to (1 + x + x^2 + x^3)^{-3}$.

7) $x \to \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 8 : Montrer que l'équation différentielle $4ty'' - 2y' + 9t^2 y = 0$ ($t \in \mathbb{R}$) admet comme solution une série entière dont on déterminera le rayon de convergence.

Exercice 9 : Soit la série entière $\sum_{n \geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$.

1) Calculer son rayon de convergence. On note $f(z)$ sa somme au point z où elle converge.

2) Montrer que, pour tout z_1, z_2 de $\mathbb{C}$, $f(z_1 + z_2) = f(z_1) f(z_2)$.

3) On définit, pour $z \in \mathbb{C}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Montrer que ces définitions ont un sens. Donner le développement en série entière de sin et cos (préciser le rayon de convergence). Etablir les identités $\sin 2z = 2 \cos z \sin z$ et $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Exercice 10 : Quel est la rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 2}\left(\ln\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) z^n$? Déterminer la nature de la série pour $z=1$ et $z=-1$.

Exercice 11 (Formule d'Hadamard) : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Démontrer que

$$R=\left(\text{limsup}_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.$$

Application : Déterminer le rayon de convergence de $\sum e^{n\sin n}z^n$, $\sum \frac{n+3}{n+6}z^{3n}$.

Exercice 12 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et telle que $a_0=1$.
1) Montrer qu'il existe une unique série entière $\sum b_n z^n$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ vaut 1 si $n=1$ et 0 sinon.
2) Montrer que $\sum b_n z^n$ est de rayon de convergence >0.

Exercice 13 : On considère la série entière $\sum_{n\geq 1}\left(\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$, $x\in\mathbb{R}$.
1) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2) Etudier la convergence en R et $-R$.
3) Etudier la continuité de la somme S.
4) Montrer que $\lim_{x\to 1^-}(1-x)S(x)=0$.

Exercice 14 : Etablir les égalités suivantes :
1) si $x\in]-1,1[$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}dt=\pi(\sqrt{1+x}-1)$.
2) $\displaystyle\int_0^1 e^x \ln x dx=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n.n!}$.

Exercice 15 : Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{n!}\sim e^{ex-\frac{1}{2}}$ quand $x\to+\infty$.

Exercice 16 : Soit (λ_n) une suite dans $\mathbb{R}^{+*}$ strictement croissante telle que $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$.
1) Etudier les convergences simple et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ où, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)=(-1)^n e^{-\lambda_n x}$ si $x\in\mathbb{R}^+$.
2) En notant $S=\sum_{n\geq 0} f_n$, montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}S(x)dx$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}S(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n}$

Séries de Fourier

Quelques rappels

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une application 2π-périodique et continue par morceaux.
Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on appelle n-ème coefficient exponentiel de Fourier de f le nombre complexe $c_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}dt$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit les coefficients trigonométriques de Fourier de f les nombres réels

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos nt\ dt \text{ et } b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin nt\ dt.$$

On a les relations : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ (ou encore $2c_n = a_n - ib_n$ et $2c_{-n} = a_n + ib_n$).
On appelle série de Fourier de f la série de fonctions $t \to c_0 + \sum_{n\geq 0}(c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int})$.

On définit les sommes partielles de la série de Fourier de f par $S_n(t) = \displaystyle\sum_{p=-n}^{p=+n} c_p e^{ipt}$ ou de manière équivalente $S_n(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{p=1}^{n}(a_p \cos pt + b_p \sin pt)$.

On a alors
<u>Théorème de Parseval :</u> Si f est 2π-périodique, continue par morceaux telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)),$$

alors $\lim_{n\to+\infty} ||f - S_n(f)||_2 = 0$.

<u>Egalité de Parseval :</u> Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème de Parseval,
- La série $|c_0|^2 + \sum_{n\geq 1}(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$ et vaut $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$.
- Si $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, alors la série $\dfrac{a_0^2}{4} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$ converge et vaut $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$.

<u>Théorème de convergence normale :</u> Si f est 2π-périodique, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

<u>Théorème de Dirichlet :</u> Si f est 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $t \to \dfrac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))$.

<u>Preuve du Théorème de Dirichlet</u>

1) Montrer que si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0 \text{ (Lemme de Lebesgue).}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, 2π-périodiques, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)).$$

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-v) + f(x+v)}{2} \sum_{k=-n}^{+n} e^{ikv} dv.$$

3) On note $D_n(v) = \sum_{k=-n}^{+n} e^{ikv}$ (Noyau de Dirichlet). Montrer que

$$D_n(v) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})v}{\sin\frac{v}{2}}.$$

4) On note

$$g_x(v) = \frac{(f(x+v) - f(x^+)) + (f(x-v) - f(x^-))}{2\sin\frac{v}{2}}.$$

Montrer que
$$S_nf(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}g_x(v)\sin{(n+\frac{1}{2})}vdv.$$
5) Conclure en utilisant le lemme de Lebesgue.

Quelques exercices

Exercice 1 : Pour les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ suivantes, vérifier que f est 2π-périodique, continue par morceaux ; Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f ; Etudier la convergence de la série de Fourier de f ; En déduire les sommes indiquées.

1) f 2π-périodique, paire telle que $f(t)=1$ si $0\leq t<\frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ et $f(t)=-1$ si $\frac{\pi}{2}<t<\pi$;
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1},\ \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2},\ \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$$
2) f 2π-périodique, impaire telle que $f(t)=t$ si $0\leq t<\frac{\pi}{2}$ et $f(t)=\pi-t$ si $\frac{\pi}{2}\leq t\leq\pi$;
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2},\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2},\ \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4},\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4}.$$
3) f 2π-périodique, paire telle $f(t)=1-\frac{2t}{\pi}$ si $t\in[0,\pi]$;
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2},\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2},\ \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4},\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4}.$$
4) $f(t)=\sup(0,\sin t)$ pour $t\in\mathbb{R}$;
$$\sum_{p\geq1}\frac{1}{4n^2-1},\ \sum_{p\geq1}\frac{(-1)^n}{4n^2-1},\ \sum_{p\geq1}\frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$
Exercice 2 : Soient $x\in[0,+\infty[$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $f(\pi)=0$ et pour tout $t\in]-\pi,\pi[$, $f(t)=\text{sh }xt$. 1) Vérifier que f est 2π-périodique, continue par morceaux et calculer ses coefficients de Fourier (trigonométriques).

2) Etudier la convergence de la série de Fourier de f, et montrer que, pour tout $t\in]-\pi,\pi[$,
$$\text{sh}xt=\sum_{n\geq1}\frac{2n(-1)^{n+1}\text{sh}\pi x}{\pi(n^2+x^2)}\sin t.$$
3) En déduire
$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xt}{\text{ch}t}dt=\frac{\pi}{2\text{ch}\frac{\pi x}{2}}.$$
Exercice 3 : Soit $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ de classe C^1 par morceaux, continue et telle que $\int_0^{2\pi}f(t)dt=0$. Montrer que
$$\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt\leq\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2dt.$$
Etudier le cas d'égalité.

Exercice 4 : Soit $(a_n)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que la suite d'applications (S_n) définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, tout $t\in\mathbb{R}$, par $S_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}a_ke^{ikt}$ converge

uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, puis que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = a_n$.

Exercice 5 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 xE\left(\frac{1}{x}\right) dx$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice 6 :
1) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
2) En déduire la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}dx\,;\ \int_0^1 \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx\,;\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2}dx.$$

Exercice 7 : Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique telle que, pour tout $t \in [-\pi,\ pi]$, $f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$.
1) Montrer que f_α est continue par morceaux et calculer les coefficients trigonométriques de f_α.
2) Etudier la convergence de la série de Fourier de f_α.
3) En déduire

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \text{cotan} x;$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}.$$

Compléments sur l'approximation des fonctions

Quelques rappels

Théorème 1 : Pour toute application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, il existe une suite $(f_n : [a,b] \to \mathbb{R})_n$ d'applications en escalier sur $[a,b]$ convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.

Théorème 2 : Pour toute application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, il existe une suite $(f_n : [a,b] \to \mathbb{R})_n$ d'applications affines par morceaux et continues convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.

Remarque : On peut remplacer dans les théorèmes 1 et 2 $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ pour les ensembles d'arrivée de f et f_n.

Théorème 3 (Weierstrass) : Pour toute application continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, il existe une suite $(P_n : [a,b] \to \mathbb{R})_n$ de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.

Théorème 4 (Weierstrass) : Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique, il existe une suite $(T_n)_n$ de polynômes trigonométriques complexes convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
On rappelle qu'un polynôme trigonométrique T est de la forme

$$T(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_n e^{int} \text{ où } c_n \in \mathbb{C}$$

Remarque : Ce théorème s'étend sans problème aux fonctions T-périodiques.

Quelques exercices

Exercice 1 (Théorème de Riemann-Lebesgue) :

1) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \int_a^b f(t)e^{ixt}dt = 0$.

2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et intégrable sur I. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \int_I f(t)e^{ixt}dt = 0$.

Exercice 2 :

1) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b x^n f(x)dx = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique. Montrer que, si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = 0$, alors f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $f = 0$ (sur $[0, 1]$) ;
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$;
(iii) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(n \geq N \Rightarrow \int_0^1 x^n f(t)dt = 0\right)$;
(iv) Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^{kn} f(x)dx = 0$.

Exercice 4 : Montrer que l'application $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas limite uniforme d'une suite de polynômes.

Exercice 5 : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) telle que (P_n) converge vers f uniformément et (P'_n) converge uniformément vers f' (sur $[a, b]$).

Exercice 6 : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) f est uniformément continue sur $[a, b]$;
(ii) Il existe une suite (P_n) de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.

Exercice 7 : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On se donne des réels $a_1, ..., a_N \in [a, b]$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) telle que (P_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$ et pour tout $i \in \{1, ..., N\}$, tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(a_i) = f(a_i)$.

Exercice 8 : On définit la suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in [0, 1]$,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - (P_n(x))^2).$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}.$$

2) En déduire que (P_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers l'application $x \to \sqrt{x}$.
3) Montrer que la suite de polynômes $(Q_n : [-1,1] \to \mathbb{R})_n$ definie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $t \in [-1,1]$, $Q_n(t) = (P_n(|t|))^2$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction $x \to |t|$.

5. Equations différentielles

Equations différentielles linéaires

Exercice 1 : Trouver toutes les appplications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2xf(x) = 3\int_0^x f(t)dt.$$

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes (la fonction inconnue est $y : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$).

a) $2x(1+x)y' + (1+x)y = 1$;

b) $(x^2+1)y' + (x-1)^2y - (x^3 - x^2 + x + 1) = 0$;

c) $(x+1)^2(xy' - y) + 2x + 1 = 0$;

d) $y' + (\cos x)y - \sin x \cos x = 0$.

Exercice 3 :

a) Résoudre $y' - y - \mathrm{Ln}x = 0$ sur $]0, +\infty[$. Existe-t-il des solutions bornées ?

b) Résoudre $y'y + y^2 = \frac{1}{2}e^{-2x}$ (Poser $z = y^2$ pour se ramener à une équation linéaire).

c) Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

d) Déterminer l'ensemble des points d'inflexion des courbes intégrales de l'équations différentielles

$$xy' - 3y - 2x^2 = 0.$$

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles suivantes.
a) $y'' - 2my' + (m^2+1)y = e^x \sin x$, $m \in \mathbb{R}$;
b) $y'' - 2y' - 3y = \dfrac{e^{3x}}{\mathrm{ch}^2 x}$;
c) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$;
d) $y'' - 3y' + 2y = e^x - x - 1$;
e) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$;
f) $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8x = 0$;

Exercice 5 :

1) Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide d'un changement de variable et/ou de fonction.
a) $xy'' - y' - x^3y = 0$;
b) $x^2y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0$;
c) $x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$;

2) Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$ par la méthode de Lagrange.

<u>Exercice 6 :</u> On considère l'équation différentielle

$$(E) 2xy' - (2 - \alpha - x)y = 0, \ \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Pour quelles valeurs de α l'équation (E) admet-elle des solutions (autres que la fonction nulle) définies sur $\mathbb{R}$?

<u>Exercice 7 :</u> On considère l'équation différentielle (E) $(x^2 + x)y'' + (3x + 1)y' + y = 0$.
a) En cherchant une solution sous forme d'une série entière, trouver une solution simple de (E) (autre que la fonction nulle).
b) Résoudre (E).

<u>Exercice 8 :</u>

1) Montrer que, pour tout $m \in]0, 2[$, l'équation différentielle

$$(E_m) \ y'' + (1 - 2m)y' - 2my = e^{2x}$$

admet une solution et une seule y_m telle que $y_m(0) = y'_m(0) = 0$. Etablir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{m\to 1} y_m(x) = y_1(x)$.

2) Résoudre sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ l'équation d'Euler suivante : $x^2y'' - 2y = x$ (on pourra faire le changement de variable $t = \mathrm{Ln}|x|$).

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = |x| + 1$.

4) Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = xe^x$.

<u>Exercice 9 :</u>

a) Calculer les coeficients de Fourier de la fonction $t \to |\sin 2t|$. Etudier la convergence de la série de Fourier associée.

b) Soit l'équation différentielle $y^{(4)} + 5y'' + 4y = |\sin 2t|$. Montrer qu'il existe une solution $\frac{\pi}{2}$ périodique que l'on exprimera sous la forme d'une série trigonométrique.

<u>Exercice 10 (Méthode d'Euler) :</u>

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, L-lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit y la solution sur $I = [x_0, x_0 + a]$ du problème de Cauchy :

$$y'(x) = f(y, x) \text{ et } y(x_0) = \lambda.$$

1) Quelle est la régularité de y sur I ?

Soit le schéma d'Euler suivant :

$$y_{n+1} - y_n = hf(x_n, y_n)$$

où $x_n = x_0 + nh$, $x_N = x_0 + a$, y_0 est donné (à priori différent de λ).

2) Soit $\varepsilon_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n))$ l'erreur de consistance. Montrer que

$$|\varepsilon_n| \leq h \int_{x_n}^{x_{n+1}} |y''(s)| ds.$$

3) Soit $e_n = y(x_n) - y_n$ l'erreur de discrétisation. Montrer que l'on a

$$|e_n| \leq e^{L(x_n - x_0)} |e_0| + h \int_{x_0}^{x_n} e^{L(x_n - s)} |y''(s)| ds.$$

Si on calcule sur machine par cette méthode d'Euler, du fait de l'accumulation des erreurs d'arrondi, la valeur approchée calculée n'est pas y_n, mais y_n^* qui satisfait le schéma perturbé suivant :

$$y_{n+1}^* = y_n^* + hf(x_n, y_n^*) + h\mu_n + \rho_n$$

avec $y_0^* = y_0$, $|\mu_n| \leq \mu$, $|\rho_n| \leq \rho$ (ρ, μ fixés).

4) On pose $e_n^* = y(x_n) - y_n^*$. Etablir qu'il existe A, B et C tels que

$$|e_n^*| \leq A + Bh + \frac{C\rho}{h}.$$

5) En déduire l'existence d'un pas optimal pour lequel l'erreur est minimale.

Equations différentielles non linéaires

Exercice 11 : Résoudre les équations différentielles non linéaires classiques suivantes.

1) Equations à variables séparables

1a) $(1 + x^2)y' + (1 + y^2) = 0$; 1b) $y' + e^{y-x} = 0$.

2) Equations homogènes

2a) $(y - x)y' + y = 0$; 2b) $y' = e^{\frac{y}{x}}$ (sur $]0, +\infty[$).

3) Equations de Bernouilli

3a) $y'\sqrt{x} - y + (x + 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$; $xy' - y - y^3 = 0$.

4) Equations de Ricatti

4a) $2x^2y' + x^2y^2 + 1 = 0$; 4b) $y' - 3y\tan x + y^2 + (\tan x)^2 - 1 = 0$.

5) Equations incomplètes

5a) $(y + y')^2 + (y - y')^3 = 0$; 5b) $xy' - y'^2 - 1 = 0$.

6) Equations de Lagrange et de Clairaut

6a) $xy' + y + y'^2 = 0$; 6b) $y = xy' - y'\text{Ln}|y'|$.

Exercice 11 (bis) : Etudier qualitativement les équations suivantes :

a) $y' - \frac{1}{x}y + \frac{e^x}{x}y^2 = 0$ d'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}^+$ (Equation de Bernouilli).

b) $y' = x^2 + y^2$ (Equation de Riccati).

Exercice 12 : Résoudre les équations différentielles suivantes.
a) $y' + e^{y-x} = 0$ (on tracera l'allure des courbes intégrales)
b) $\sqrt{1-x^2}y' - y^2 - 1 = 0$ (on cherchera les solutions définies sur $]-1,1[$) ;
c) $(x + yy')^2 = x^2 + y^2$;
d) $(xy' - y)^2 = x^2 - y^2$;
e) $(y^2 - 3x^2) + xyy' = 0$;
f) $2(1+x)yy' + 2x - 3x^2 + y^2 = 0$;
h) $y' = (x + y - 1)^2$.

Exercice 13 : On considère le problème de Cauchy (C) $y' = 1 + x^2y^2$ et $y(0) = 0$.
a) Montrer que le problème de Cauchy (C) admet une unique solution maximale notée f.
b) Montrer qu'il existe $a \in]0, +\infty[$ tel que le domaine de définition de f est $]-a, a[$, puis que f est impaire.
c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 14 : Trouver toutes les solutions définies et dérivables sur $]1, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(x-1)y' = (x-1)y^2 + (2-x^2)y + x^2 - x - 1$$

(on pourra utliser le changement de fonction $z = \frac{1}{y-1}$).

Exercice 15 :

1) Soit y une solution maximale de $y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2}$. Montrer que l'intervalle de définition de y n'est pas bornée, puis que $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.

2) Déterminer la (ou les) solution(s) maximale(s) du problème de Cauchy $y' = \frac{3x^4 + y^4}{4x^3y}$ et $y(1) = 2$.

3) Résoudre l'équation différentielle $xyy' - (x^2 + y^2) = 0$, puis tracer l'allure des courbes intégrales.

Systèmes linéaires

Exercice 16 : Résoudre les systèmes différentiels suivants :

a)

$$\begin{cases} (1+t^2)x' &= tx - y - t \\ (1+t^2)y' &= x + ty - 1 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} (1+t^2)x' &= tx - y2t \\ (1+t^2)y' = &= x + ty - 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x' &= x + 8y + e^t \\ y' &= 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x' &= -x\tan t + y \\ y' &= x + y\tan t \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x' &= -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ y' &= 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}(t > 0) \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x' &= x + y - z - 1 \\ y' &= x - y + z - 1 \\ z' &= -x + y + z - 1 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} x' &= 3x - 2y + -4z + te^t - t \\ y' &= -2x + 3y + 2z + te^t - 2t + 2 \\ z' &= 3x - 3y - 4z - 1 \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} x' &= 5x - 3y - 4z \\ y' &= -x + y - 2z \\ z' &= x - 3y \end{cases}$$

h)

$$\begin{cases} 2x'' + 3y'' + 2x' + y' + x + y &= 0 \\ x'' + 3y'' + 4x' + 2y' - x - y &= 0 \end{cases}$$

i)

$$\begin{cases} x'' &= 3x - y - z \\ y'' &= -x + 3y - z \\ z'' &= -x - y + 3z \end{cases}$$

Exercice 17 : Exponentielle de matrice

1) Montrer les propriétés suivantes :
1a) Pour tout A, B dans $M_n(\mathbb{R})$, si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.
1b) Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, si $e^A \in GL_n(\mathbb{R})$, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
1c) Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$.

2) Calculer e^{tA} pour $t \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Soit $||.||$ une norme sous-multiplicative sur $M_n(\mathbb{R})$.
3a) Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\rho \in [||A||, +\infty[$, $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\left|\left|e^A - (I_n + \frac{1}{p}A)^p\right|\right| \leq e^\rho - (1 + \frac{\rho}{p})^p.$$

3b) En déduire que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lim_{p\to+\infty}\left(I_n + \frac{1}{p}\right)^p = e^A$ et que la convergence est uniforme sur toute partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$.

4) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in I$, on pose $\phi(t) = e^{tA}$. Montrer que ϕ est de classe C^1 sur I et que, pour tout $t \in I$, $\phi'(t) = A\phi(t) = \phi(t)A$.

5) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$, et $B : I \to M_{n,1}(\mathbb{R})$ une application continue. Montrer que l'application $t \to e^{tA}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)ds$ $(t_0 \in I)$ est une solution de $X' = AX + B$.

6) Soient $T \in \mathbb{R}^{+*}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ tels que $I_n - e^{TA} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B : \mathbb{R} \to M_{n,1}(\mathbb{R})$ continue et T-périodique. Montrer que l'équation $X' = AX + B$ d'inconnue $X : \mathbb{R} \to M_{n,1}(\mathbb{R})$ admet une et une seule solution T-périodique.

7) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour toute valeur propre λ de A, $\mathrm{Re}\lambda < -\alpha$. Prouver qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, tout $a \in \mathbb{C}^n$, $||e^{tA}a|| \leq Me^{-\alpha t}||a||$. Que peut-on en déduire ?

Compléments sur les équations différentielles

Exercice 1 :

1) Résoudre les équations différentielles suivantes. On cherchera des solutions sous forme paramétrique.

1a) $y = x(y' - \sqrt{1 - y'^2})$.

1b) $x^3y'^3 + y^3 - xy^2 = 0$.

1c) $y'(y'^2 + y^2) - ay'^2 = 0$ $(a > 0)$.

2) Intégrer par passage en coordonnées polaires les équations différentielles suivantes. Tracer l'allure de certaines courbes intégrales.

2a) $(x^2 + y^2)(xy' - y) - a^2(xy' + y) = 0$.

2b) $yy''(x^2 + y^2) + (xy' - y)^2 = 0$.

2c) $y' = \dfrac{x}{y}\left(\dfrac{y^2 - (x^2 + y^2)^2}{x^2 + (x^2 + y^2)^2}\right)$.

Exercice 2 : Mouvements rectilignes

1) Déterminer le mouvement rectiligne tel que l'abscisse x vérifie $x'' + x' + x = 0$ et qu'à l'instant $t = 0$, on ait $x'(0) = x(0) = 1$.

2) Etudier le mouvement rectiligne défini pour $|x| < 1$ par $x'' = \dfrac{x'^2}{1 - x^2}$ avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$. Représenter la courbe x en fonction de t.

3) On donne une fonction $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ continue. On suppose f intégrable en $+\infty$, mais pas en 0. On considère le mouvement rectiligne défini par l'équation $x'' = -f(x)$. A l'instant $t = 0$, le mobile est en $x_0 > 0$ avec une vitesse initiale $v_0 = x'_0 > 0$. A quelle condition portant sur v_0, le mobile atteint-il un certian point d'abscisse $x_1 > x_0$. avec une vitesse nulle ? Décrire alors la suite du mouvement.

Exercice 3 :

3a) Soit (C) la courbe d'équation cartésienne $y = \dfrac{x^3}{3a^2}$. Un point mobile parcourt (C). A l'instant $t = 0$, sa vitesse est nulle et son abscisse est $x_0 > 0$. A tout instant, son accélération est donnée par $\vec{\Gamma} = -g\vec{j} + r\vec{N}$ où g est une constante positive, $\vec{N}$ est le vecteur unitaire normal, orienté de façon que son ordonnée soit positive, et r est une variable réelle qui doit être positive au cours du mouvement. Montrer qu'il existe un point d'abscisse x_1 au-delà duquel le mouvement ne peut se poursuivre (point de "décrochage"). Déterminer une équation algébrique dont x_1 est solution.

3b) On pose à la surface d'un liquide au repos une bille de masse m, supposée ponctuelle. Sachant que la résistance du liquide est proportionnelle à la vitesse, étudier le mouvement de la bille.

Exercice 4 : Trajectoires orthogonales

1) Trouver les trajectoires orthogonales des paraboles d'équation : $y^2 = 2\lambda x$.

2) Intégrer l'équation différentielle : $yy'^2 + 2xy' - y = 0$. Combien passe-t-il de courbes intégrales par chaque point du plan ? Trouver leurs trajectoires orthogonales ?

3) Déterminer les courbes intégrales de l'équation différentielle $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$ et déterminer leurs trajectoires orthogonales.

Exercice 5 :

1a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $M(x, y)$ un point de la courbe (C) d'équation $y = f(x)$ $x \in I$. On suppose que f est une fonction dérivable sur I, et que, pour tout $x \in I, f'(x) \neq 0$.

5a) Calculer en fonction de x, y et y' la mesure algébrique de mT appelée sous-tangente de (C) au point M.

Trouver toutes les courbes à sous-tangente constante.
1b) Déterminer les courbes telles que le segment $[T, T']$ découpé sur la tangente au point M par les axes ait pour milieu M.
1c) Déterminer les courbes telles que MT soit constant (chercher des représentations paramétriques des solutions).

2) Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de courbes représentatives C_f, telles que, pour tout réel x_0, la tangente à C_f au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0)$ passe par le point de coordonnées $(\frac{x^2}{2}, x_0^2)$.

3) Déterminer les courbes (C) telles qu'en chacun de leurs points M la tangente et la normale coupent respectivement l'axe $0x$ et l'axe $0y$ en un point et un seul T (respectivement N) de telle manière que T et N soient distincts et que la droite TN garde une direction fixe.

6. Espaces vectoriels normés

Quelques rappels

Soient $(E, ||.||_E)$, $(F, ||.||_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application.

Continuité de f :
Soit $X \subset E$. Il y a équivalence des assertions suivantes :
(i) f est continue sur X ;
(ii) L'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de X ;
(iii) L'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de X ;

A noter que f est continue en $x \in E$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) telle que $x_n \to x$, $f(x_n) \to f(x)$.

Supposons que $f \in \mathcal{LC}\ (E, F)$. Il y a équivalence des assertions suivantes :
(i) f est continue sur E ;
(ii) f est continue en 0_E ;
(iii) f est lipschitzienne ;

(iv) $\exists K > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $||f(x)||_F \leq K||x||_E$;
(v) f est uniformément continue.

Supposons que f soit continue sur X. Alors, si X est compact (respectivement connexe), $f(x)$ est compact (respectivement connexe).

Théorème de Heine : si X et si f est continue sur X, f est uniformément continue sur X.

On rappelle que si f est continue sur X qui est compact, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Cas de la dimension finie :
Supposons que E soit de dimension finie. Alors,
- Toutes les normes sur E sont équivalentes ;
- E est un espace complet ;
- Toute application linéaire $f : E \to F$ est continue ;
- Les parties compactes de E sont les parties fermées et bornées.

Théorème du point fixe :
Si F est un espace complet et si $f : F \to F$ est un application contractante (c'est à dire que f est lipschitzienne de rapport $k < 1$), alors f admet un unique point fixe $a \in F$ (i.e. $f(a) = a$) et pour tout $x \in F$, la suite définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers l'unique point fixe de f.

Quelques exercices

Tous les espaces vectoriels considérés dans la suite sont sur $\mathbb{R}$.

Généralités

Exercice 1 : Montrer que, dans les cas suivants, $(E, ||.||)$ est un espace vectoriel normé.

(i) $E = \mathbb{R}^n, ||(x_1, ..., x_n)|| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ où $p \in]1, +\infty[$;

(ii) $E = C([0,1], \mathbb{R})$, $||f|| = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ où $p \in]1, +\infty[$.

Exercice 2 : Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Montre que pour tout x, $y \in E$,
(i) $||x - y|| \geq |||x|| - ||y|||$;
(ii) $||x|| + ||y|| \leq ||x + y|| + ||x - y||$.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel normé et soit N, N' deux normes sur E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Il existe $K > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $N'(x) \leq KN(x)$.
(ii) Toute suite convergeant vers 0_E dans (E, N) converge vers 0_E dans (E, N').

Exercice 4 : Soient $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$, $\phi \in E$ telle que $\int_0^1 \phi(t)dt \neq 0$. On définit, pour $f \in E$,

$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt$;

$N_\phi = \left| \int_0^1 f(t)\phi(t)dt \right| + \int_0^1 |f'(t)|dt.$
Montrer que N et N_ϕ sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 5 : Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $f(0) = 0$. On définit, pour tout $f \in E$, $N(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $N'(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$. Montrer que N et N' sont des normes sur E, mais qu'elles ne sont pas équivalentes.

Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 6 : Montrer que toute boule ouverte (respectivement fermée) d'un espace vectoriel normé est convexe.

Exercice 7 : Soient E un espace vectoriel normé et Ω un ouvert de E. Montrer que pour tout $k > 0$, $k\Omega$ est un ouvert de E.

Exercice 8 : Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux sous-ensembles de E tels que A et B sont denses dans E.
(i) On suppose que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $\mathrm{int}A = \mathrm{int}B = \emptyset$.
(ii) On suppose que A est ouvert. Montrer que $A \cap B$ est dense dans E.

Exercice 9 : Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$. On définit

$$A = \{f \in E;\ \text{pour tout } x \in [0,1], f(x) \neq 0\}.$$

Déterminer $\mathrm{int}A$ et $\overline{A}$.

Exercice 10 : Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) Pour tout $a \in A$, il existe un voisinage V de a dans E tel que $V \cap A$ soit fermé dans V ;
(ii) il existe un voisinage Ω de E et un fermé F de E tels que $A = \Omega \cap F$.

Exercice 11 : Soient E un espace vectoriel normé, A et B deux parties de E telles que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cup B) = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.

Continuité

Exercice 12 : Soient E un espace vectoriel normé, A, B deux parties de E telles que $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Montrer qu'il existe deux ouverts U, V de E tels que : $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 13 : Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $f : E \to F$ une application et $(U_i)_i$ un recouvrement ouvert de E. On suppose que, pour tout i, f_{U_i} (restriction de f à U_i) est continue. Montrer que f est continue.

Exercice 14 : Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application lipschitzienne. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 15 : Donner un exemple d'espace vectoriel normé E, et de parties A et B de E telles que A et B sont homéomorphes, mais leurs complémentaires ne le sont pas.

Exercice 16 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, (||x|| \geq A \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon).$$

Montrer que f est bornée. Est-elle uniformément continue ?

Exercice 17 : Soit l^∞ l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées $x = (x_n)$ muni de la norme $||x||_\infty = \sup |x_n|$. On considère l'opérateur de différence $\Delta : l^\infty \to l^\infty$ défini par $\Delta(x) = y$ où $y = (y_n)$ est donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Montrer que $\Delta \in \mathcal{LC}(l^\infty)$ et calculer sa norme.

Exercice 18 : Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni des normes classiques $||.||_\infty$, $||.||_1$ et $||.||_2$. Pour $\phi \in E$, on définit l'application $T_\phi : E \to \mathbb{R}$ par, pour tout $f \in E$,

$$T_\phi(f) = \int_0^1 f(t)\phi(t)dt.$$

Montrer que T_ϕ est linéaire, continue et calculer sa norme dans chaque cas.

Exercice 19 : Soient E un espace vectoriel normé, A, B deux parties non vides de E ; On suppose que A est compacte et que $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Montrer que $d(A, B) > 0$.

Exercice 20 :
(i) Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, et $f : A \to F$ une application telles que $\overline{f(A)}$ soit compacte. Montrer que, si le graphe $G_f = \{(x, f(x)); x \in A\}$ de f est fermé dans $A \times F$, alors f est continue.
(ii) On suppose que $E = F = \mathbb{R}$. On suppose que f est bornée et que le graphe de f est fermé. Montrer que f est continue.

Espaces complets

Exercice 21 : Soient E un espace vectoriel normé, F un espace complet, $f : E \to F$ une application bijective uniformément continue et telle que f^{-1} soit continue. Montrer que E est complet.

Exercice 22 : Soient E un ensemble, $(F, ||.||_F)$ un espace vectoriel normé et $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des applications bornées de E dans F. On définit, pour $f \in \mathcal{B}$, $||f|| = \sup_{x \in E} ||f(x)||_F$.
Montrer que $(\mathcal{B}, ||.||)$ est un espace de Banach.
Soit $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{B} : f(0) = 0\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace de Banach.

Exercice 23 : Soient $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espaces vectoriels normés. On munit $\mathcal{LC}(E, F)$ de la norme

$$||f|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||f(x)||_F}{||x||_E}.$$

Montrer que si $(F, ||.||_F)$ est un espace de Banach, $(\mathcal{LC}(E, F), ||.||)$ est un espace de Banach.

Exercice 24 : Soient E, F deux espaces vectoriels normés, X une partie de E, $f : X \to F$ une application telle que, pour toute suite de Cauchy (x_n) dans X, $(f(x_n))$ est de Cauchy dans F. Montrer que f est continue.

Exercice 25 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a > b$, E l'espace des fonctions lipschitziennes de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On définit, pour tout $f \in E$,

$$N(f) = ||f||_\infty + \sup_{(x,y)\in I^2, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

(où $I = [a, b]$.
Montrer que N est une norme sur E. (E, N) est-il complet ?

Exercice 25 (bis) : Montrer que $(C([0, 1], \mathbb{R}), ||.||_1)$ n'est pas complet.

Exercice 26 : Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, X la boule unite fermée de E, et $f : X \to X$ une application 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 27 : Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to E$ une application telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 28 :
a) Supposons que E soit un espace de Banach et soit $X \subset E$. Montrer que X est une partie complète si et seulement si X est fermée.
b) Montrer que toute partie compacte d'un espace vectoriel normé est complète.
c) Montrer que toute partie compacte de E est fermée bornée dans E. Réciproque ?
d) Soit Y une partie compacte de E et soit $X \subset Y$. Montrer que X est compacte si et seulement si X est fermée.

Suites et séries d'applications

Exercice 29 : Soient E, F deux espaces vectoriels normés, (x_n) une suite de E convergeant vers $x \in E$, et (f_n) une suite dans $\mathcal{LC}(E, F)$ convergeant vers $f \in \mathcal{LC}(E, F)$. Montrer que $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ dans F.

Exercice 30 : Soient E un espace vectoriel normé, K une partie compacte de E, (x_n) une suite dans K qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que (x_n) converge.

Exercice 31 : Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_2$. Pour $\alpha > 0$, on définit $u_\alpha(t) = t^\alpha$, $t \in [0, 1]$. Calculer $||u_\alpha||_2$. Déterminer la limite pour la convergence simple de la suite de fonctions (u_n). Déterminer la limite de la suite (u_n) dans l'espace vectoriel normé $(E, ||.||_2)$.

Exercice 32 : Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni des normes usuelles $||.||_\infty$, $||.||_1$ et $||.||_2$. On définit trois suites d'éléments dans E :

Etudier la convergence dans E de ces suites pour les trois normes.

Connexité

Exercice 33 : Montrer que dans tout espace vectoriel normé, toute boule fermée ou ouverte est connexe par arc.

Exercice 34 : Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie connexe de E et $f : A \to \{0,1\}$ une application continue. Montrer que f est constante.

Exercice 35 : Montrer que tout ouvert d'un espace vectoriel normé qui est connexe par arcs est connexe.

Exercice 36 : Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercice 37 : Montrer que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Exercice 38 : Soit $A \subset E$ une partie connexe et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que f a la propriété des valeurs intermédiaires (i.e. $\forall m \in [f(a), f(b)]$ $(a, b \in A)$, il existe $c \in A$ tel que $f(c) = m$).

Complément : Normes et produits scalaires sur des espaces de suites et de fonctions

Exercice 1

1) Soit $E = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. On munit E des normes $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_{+\infty}$. Ces normes sont-elles équivalentes ? E muni de ces normes est-il complet ?

2) On considère les cinq ensembles suivants de suites réelles.
- E_1 est l'ensemble des suites bornées ;
- E_2 est l'ensemble des suites qui convergent vers 0 ;
- E_3 est l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang ;
- E_4 est l'ensemble des suites (u_n) telles que $\sum |u_n| < +\infty$;
- E_5 est l'ensemble des suites (u_n) telles que $\sum u_n^2 < +\infty$.

Vérifier que ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des suites réelles, les comparer pour l'inclusion et donner pour chacun d'eux les différentes normes possibles ($||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$).

Montrer que $(E_1, ||.||_\infty)$ est un espace de Banach de dimension infinie.

3) Soit E l'espace vectoriel formé des suites réelles bornées $u = (u_n)$ telles que $u_0 = 0$. Pour $u \in E$, on pose $N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.
3a) Vérifier que N est une norme sur E.
3b) Montrer que, pour tout $u \in E$, $N(u) \leq 2||u||_\infty$. Montrer que cette inégalité est optimale.
3c) Montrer que les normes N et $||.||_\infty$ ne sont pas équivalentes.

4) On suit les mêmes notations que dans 2). On définit sur E_5 le produit scalaire $< u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. On note $(x^p)_{p\geq 1}$ la suite dans E_5 dont les éléments $x^p = (x^p_n)$ sont donnés par $x^p_0 = 0$ et si $n \geq 1$, $x^p_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{p}}}$. On note enfin x l'élément de E_5 défini par $x_0 = 0$ et, si $n \geq 1$, $x_n = \dfrac{1}{n}$.
4a) Montrer que $(E_5, < .,. >)$ est un espace de Hilbert.
4b) Montrer que $(x^p)_{p\geq 1}$ converge (quand $p \to +\infty$) vers x dans $(E_5, < .,. >)$.
4c) Montrer que E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel fermé de $(E_5, < .,. >)$.

Exercice 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues. Sur E, on définit

$$\begin{aligned} ||f||_1 &= \int_0^1 |f(t)|dt; \\ ||f||_2 &= \left(\int_0^1 f(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}; \\ ||f||_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|. \end{aligned}$$

1) Vérifier que $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ sont des normes sur E.

2) On note f_n, $n \geq 1$, les fonctions données par :

$$f_n(x) = 2nx \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n},\ f_n(x) = -2nx + 2 \text{ si } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n},\ f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq \frac{1}{n}.$$

Calculer $||f_n||_1$, $||f_n||_2$ et $||f_n||_\infty$. Etudier ensuite l'équivalence des trois normes proposés.

3) E muni de la norme $||.||_\infty$ est-il un espace de Banach ? Même question avec $||.||_2$ et $||.||_1$.

4) Soit F l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in F$, on pose $N(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$. Vérifier que N est une norme sur F et que (F, N) est un espace de Banach. F muni de la norme $||.||_\infty$ est-il un espace de Banach ? N et $||.||_\infty$ sont-elles équivalentes sur F ?

5) Sur E, on définit le produit scalaire $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Pour $\alpha \geq 0$, soit $u_\alpha(t) = t^\alpha$ si $t \in [0,1]$.
5a) A quelle norme est associée $< .,. >$?
5a) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (u_n).
5b) Calculer $||u_\alpha||_2$ et $\lim_{n\to+\infty} ||u_n||_2$. En déduire la limite de la suite (u_n) dans $(E, ||.||_2)$.

Exercice 3

Soit E un ensemble quelconque et soit $(F, ||.||)$ un espace de Banach. On considère B l'espace vectoriel des applications bornées de E dans F, et on pose, pour $f \in B$, $N(f) = \sup_{x \in E} ||f(x)||$.
1) Montrer que (B, N) est un espace de Banach.
2) On suppose que $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$. Soit $G = \{f \in B; \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0\}$. Que suffit-il de montrer pour prouver que G est un espace de Banach ? le faire.
3) On suppose que $E = \mathbb{R}^n$. Montrer de même que l'espace des fonctions continues bornées est un espace de Banach.
4) On suppose que $E = F = \mathbb{R}$. Soit C le sous-espace vectoriel de B formé des fonctions bornées de classe C^1. Soit $\sum f_n$ la série de fonctions définie par $f_0(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et, si $n \geq 1$, $f_n(x) = \dfrac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos nx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement vers la fonction $x \to |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. Que peut-on en conclure pour C ?

Exercice 4

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0, \pi]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour $f \in E$, on définit $N(f) = \left(\displaystyle\int_0^\pi f(t)^2 \sin t dt \right)^{\frac{1}{2}}$.
1) Montrer que N est une norme sur E et que cette norme est associée à un produit scalaire que l'on indiquera.
2) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^\pi t^n \sin t dt$. Calculer I_n.
3) Construire une base orthogonale de $V = \text{vect}(t^0, t^1, t^2)$.

Exercice 5

Soit $m \in \mathbb{R}^*$.
1) Montrer que l'ensemble E des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2my' + (1 + m^2)y = 0$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que $< f, g >= \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2mx} f(x) g(x) dx$ détermine un produit scalaire sur E et donner une base orthonormée de E.

Exercice 6

1) On considère $R[X]$ muni de $||.||_\infty$. L'endomorphisme qui à P associe P' est-il continu ? Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{R}$, la forme linéaire qui à P associe $P(c)$ est-elle continue ?
2) Soient E l'espace vectoriel complexe des applications bornées sur $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ muni de $||.||_\infty$, $\phi \in E$, T_ϕ une application de E dans E définie par $T_\phi(f) = f\phi$, pour tout $f \in E$. Montrer que T_ϕ est une application linéaire continue et calculer sa norme.
3) Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, T l'application de E dans E définie par $(T(f))(x) = \int_0^x f$ pour tout $f \in E$, tout $x \in [0, 1]$. Montrer que T est linéaire et continue, puis calculer sa norme.
4) Soient $E = \mathbb{R}[X]$, T une application de E dans E définie par $T(P) = P'$, et

$N : E \to \mathbb{R}^+$ définie par $N(0_E) = 0$ et $N(P) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\deg P} \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}$, pour tout $P \in E$. Montrer que N est une norme sur E. L'application T est-elle continue sur (E, N) ? Comparer avec 1).

Exercice 7

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et soit $< .,. >$ le produit scalaire ususelle sur E.

1) Soit $c \in]0,1[$ et soit ϕ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(f) = \displaystyle\int_0^c f$ pour tout $f \in E$.

1a) Montrer que ϕ est une forme linéaire continue sur E. On note $H = \mathrm{Ker}(\phi)$.
1b) Montrer que H est fermé mais que $H^\perp = \{0\}$.
1c) Montrer que $H^{\perp\perp} \neq H$.

2) On note F (respectivement G) le sous-espace de E formé des fonctions nulles sur $[0, \frac{1}{2}]$ (respectivement sur $[\frac{1}{2}, 1]$).
Montrer
2a) $F^\perp = G$ et $G^\perp = F$;
2b) $F^{\perp\perp} = F$ et $F \oplus F^\perp \neq E$;
2c) $(F \cap G)^\perp \neq F^\perp + G^\perp$.

Exercice 8

1) Soit $(H, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $||.||$ est induite par un produit scalaire si et seulement si l'identité du parallélogramme est satisfaite : pour tout $x \in H$, tout $y \in H$, $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ (Théorème de Jordan-Von Neumann).
2) Soit $(H, < .,. >)$ un espace préhilbertien. On note $||.||$ la norme associée. Soient x, y dans H. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) Il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $x = ky$ ou $y = kx$;
(ii) $||x+y|| = ||x|| + ||y||$;
(iii) $< x, y > = ||x||.||y||$.
3) Soit $(H, < .,. >)$ un espace préhilbertien (de dimension infinie). Soit (x_n) un ensemble fini orthonormal dans H. Montrer les égalités et inégalités suivantes (x, $y \in H$).
(i) $||x||^2 = \sum_{i=1}^N | < x, x_n > |^2 + ||x - \sum_{i=1}^N < x, x_n > x_n||^2$.
(ii) $||x||^2 \geq \sum_{i=1}^N | < x, x_n > |$ (Inégalité de Bessel).
(iii) $| < x, y > | \leq ||x||.||y||$ (Inégalité de Cauchy-Schwartz).
4) Soit $(H, < .,. >)$ un espace préhilbertien. Soit (x_n) une suite de vecteurs de H. S'il existe $x \in H$ tel que, pour tout $y \in H$, on ait $\lim_{n\to+\infty} < x_n, y > = < x, y >$, alors on dit que x est la limite faible de la suite (x_n).
4a) Montrer que si (x_n) est une suite orthonormale, elle converge faiblement vers 0_H.
4b) Trouver dans $l^2(\mathbb{R})$ une suite qui converge faiblement, mais qui ne converge pas pour la norme $||.||_2$.
4c) Soit $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la base orthonormée canonique de $l^2(\mathbb{R})$. On définit la suite (x_n) de $l^2(\mathbb{R})$ par $x_n = \sum_{j=1}^{+\infty} x^j e_{j+n}$ où x^j est la j-ième composante d'un vecteur fixé $x \in l^2(\mathbb{R})$. Montrer que (x_n) converge faiblement vers le vecteur nulle O_H.
4d) Utiliser 4a) pour montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction f intégrable et 2π périodique convergent vers 0 quand $n \to 0$.

Complément : Espaces de matrices

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on note $M_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert et dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

2) On note $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}); \det A = 1\}$. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $SL_n(\mathbb{K})$.

3) On note E l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ et F l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\overline{F} = \overline{E} = M_n(\mathbb{C})$. Ce résultat subsiste-t-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

4) Soient $E = M_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et $T_{2,s}(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures. Calculer la projection orthogonale d'une matrice A sur F.

5) Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

6) Montrer que l'application *det* de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui à $A \in M_n(\mathbb{K})$ associe $\det A$ est continue.