Prépa CAPES
Mathématiques
Université de Cergy-Pontoise

RECUEIL D'EXERCICES D'ALGEBRE (II)

Espaces vectoriels et applications linéaires
Espaces vectoriels de dimension finie
Matrices, systèmes linéaires, déterminants
Réduction des endomorphismes
Espaces euclidiens, espaces hermitiens

Ceci est juste une compilation d'exercices d'algèbre destinés aux étudiants préparant le CAPES externe de mathématiques. Ont été particulièrement "pillés" :

S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas, Exercices de mathématiques, oraux des concours de Polytechnique et des Ecoles Normales Supérieures, Algèbre 1, Cassini

F. Liret et D. Martinais, Algèbre 1ere année, Cours de mathématiques DEUG MIAS, MASS et SM, Dunod

D. Prochasson, Algèbre 1ere année, Exercices corrigés, DEUG MIAS, MASS et SM, Algèbre 1ere année, Dunod

L. Schwartz, Algèbre, Mathématiques pour la licence, Dunod

J. M. Monier, Cours d'algèbre 1ere année MPSI-PCSI-PTSI, 2 tomes, Dunod

Table des matières

1. Espaces vectoriels et applications linéaires

Sauf mention du contraire, les espaces vectoriels considérés sont sur le corps $\mathbb{K}$ qui est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 1

On considère dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ les sous-ensembles suivants :

$$E_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(1) = 2f(0)\};$$
$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(0) = 1\};$$
$$E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); \forall x \in \mathbb{R}, f(1-x) = f(x)\};$$
$$E_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); \forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = f(x)\}.$$

1) Dire si ces sous-ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2) Si $f \in E_3$, donner une propriété géométrique du graphe de f.
3) Montrer que les éléments de E_4 qui sont continues sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions constantes. L'ensemble E_4 contient-il des fonctions non constantes ?

Exercice 2

1) Montrer que $X^3 - 5$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. On note $\alpha = 5^{\frac{1}{3}}$ et on pose

$$A = \{a + b\alpha + c\alpha^2, (a,b,c) \in \mathbb{Q}^3\}.$$

2) Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$ de degré inférieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe U, $V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $(X^3-5)U + PV = 1$ et $degV \leq 2$. Calculer $P(\alpha)V(\alpha)$.
3) Montrer que $(1, \alpha, \alpha^2)$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel A.

4) Montrer que A est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1) Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cup G = E$. Montrer que $F = E$ ou $G = E$.

2) Soient E un espace vectoriel, I un ensemble non vide, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On suppose que

$$\forall (i,j) \in I^2, \exists k \in I \text{ tel que } F_i \cup F_j \subset F_k.$$

Montrer que $\bigcup_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) On note F_1 (respectivement F_2) l'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires). Montrer que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

2) Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et a_0, ..., $a_N \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On note $F = \{f \in E; \forall i \in \{0, ..., N\}, f(a_i) = 0\}$ et G l'ensemble des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq N$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 5

Montrer que les familles suivantes sont libres (pour les lois usuelles).

1) $f_a :]0,1[\to \mathbb{R}$, $a \in]0,1[$, définie par $f_a(x) = \dfrac{1}{1-ax}$.

2) $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in [0, +\infty$, définie par $f_a(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2 + 1}$.

3) $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, définie par $f(x) = e^{ax}$.

Exercice 6

Soient E un espace vectoriel et x_1, ..., x_n des éléments de E. Pour tout $i = 1, .., n$, on note E_i l'espace vectoriel engendré par x_i. Montrer que $(x_1, .., x_n)$ est libre si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiés :

(i) $\forall i = 1, .., n$, $x_i \neq 0$.

(ii) La somme $E_1 + ... + E_n$ est directe.

Exercice 7

Soient E un espace vectoriel et F_1,....,F_n, G_1,....., G_n des sous-espaces vectoriels de E. On suppose que les F_1,...,F_n sont en somme directe et que pour tout $i = 1, .., n$, $G_i \subset F_i$. Montrer que les G_1,...., G_n sont en somme directe.

Exercice 8

Soient E un espace vectoriel et F_1,....,F_n des sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que si les F_1,....., F_n sont en somme directe et que si, pour tout $i = 1, .., n$, $\mathcal{L}_i$ est une famille libre dans F_i, alors $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i$ est une famille libre de E.

b) Montrer que si $F_1 + ... + F_n = E$ et que si, pour tout $i = 1, .., n$, $\mathcal{G}_i$ est une famille génératrice de F_i, alors $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i$ est une famille génératrice de E.

b) Montrer que si les F_1,...., F_n sont en somme directe de somme E et que si, pour tout $i = 1, .., n$, $\mathcal{B}_i$ est une base de F_i, alors $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ est une base de E.

Exercice 9

1) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par $f(P) = P - XP'$ est linéaire et déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

2) Soit E l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\leq n$. Montrer que l'application $f : E \to E$ définie, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par $f(P) = P - P'$ est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}.

3) Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (pour les lois usuelles) et que, pour tout $f \in E$, $f' \in E$.
3b) Soit $\phi : E \to E$ définie par $\phi(f) = f'$ pour tout $f \in E$. Montrer que ϕ est linéaire et déterminer $\mathrm{Ker}(\phi)$ et $\mathrm{Im}(\phi)$.

4) Soient E et F deux espaces vectoriels (sur $\mathbb{K}$) et soit $f \in \mathcal{L}(F, E)$. On définit $\phi : E \times F \to E \times F$ par $\phi(x, y) = (x + g(y), y)$ pour tout $x \in E$, tout $y \in F$. Montrer que ϕ est un automorphisme de $E \times F$.

Exercice 10
Soit E un espace vectoriel (non réduit à 0).

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un unique $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = Id_E$. Montrer que $f \in \mathcal{GL}(E)$.

2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre p (c'est à dire $f^p = 0$ mais $f^{p-1} \neq 0$). Montrer que la famille $(Id_E, f, ..., f^{p-1})$ est libre.

3) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 11
Soit E un espace vectoriel.

1) Soient p et q deux projecteurs de E.
1a) Montrer que si $p \neq 0$, $q \neq 0$, $p \neq q$, alors (p, q) est libre dans $\mathcal{L}(E)$.
1b) Montrer que si $p \circ q = q \circ p$ et $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q)$, alors $p = q$.
1c) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

2) Soient f, $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes
  (i) $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.
  (ii) f, g sont des projecteurs et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.
3) Soit p un projecteur de E. On pose $q = Id_E - p$,

$$L = \{f \in \mathcal{L}(E); \exists u \in \mathcal{L}(E), f = u \circ p\},$$

$$M = \{g \in \mathcal{L}(E); \exists v \in \mathcal{L}(E), g = v \circ q\}.$$

Montrer que L et M sont des sous-espaces de $\mathcal{L}(E)$ supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 12
On admet que tout sous-espace vectoriel admet au moins un supplémentaire. Seul le cas

de la dimension finie est au programme de CAPES.

1) Soient E et F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, et E' un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E. Montrer que u définit un isomorphisme de E' sur $\mathrm{Im} u$.

2) Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.
(i) Il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(f) = F$ et $\mathrm{Ker}(f) = G$.
(ii) Il existe un supplémentaire H de G dans E tel que H soit isomorphe à F.

2. Espaces vectoriels de dimension finie

Sauf mention du contraire, les espaces vectoriels considérés sont sur le corps $\mathbb{K}$ qui est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 1
On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{C}^3$:

$$u_1 = (1 - i, i, 1 + i),\ \ u_2 = (-1, 1, 3),\ \ u_3 = (1 - i, i, i).$$

a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.
b) Calculer les coordonnées du vecteur $(1 + i, 2, i)$ dans cette base.

Exercice 2
Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lorsque c'est le cas, en donner une base.

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 3x - y + t = 0\};$$
$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + 2z + t = 1\};$$
$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + t = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\};$$
$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; |x + t| = |y|\};$$
$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = (3a + b, a - b, a + 5b, 2a + b)\};$$

Exercice 3
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(0, -1, 1, 1)$, $(2, 1, -1, 1)$ et $(1, 1, -1, 0)$. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 3, 0, 1)$, $(2, 4, -2, 2)$ et $(-1, -2, 1, -1)$. Les sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^4$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 4
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(2, 3, -1)$ et $(1, -1, -2)$. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(3, 7, 0)$ et $(5, 0, -7)$. Montrer que l'on a $F = G$. Trouver une équation de F.

Exercice 5
Soit a un nombre réel. Quel est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(a + 2, a, a - 2)$, $(1, a, -1)$ et $(a, -a, 1)$?

Exercice 6
On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (-3, 1, 0, 2),\ \ u_2 = (-5, 2, 1, 2),\ \ u_3 = (1, 1, 4, -6),\ \ u_4 = (-1, 0, -1, 2).$$

a) Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par u_1 et u_2 est égal au sous-espace vectoriel engendré par u_3 et u_4.

b) Montrer que les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement indépendants. Compléter ces vecteurs pour former une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs $(1,0,1,-1,0)$, $(2,1,2,1,1)$ et $(3,1,2,0,1)$. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs $(1,1,3,-1,1)$, $(2,-1,-4,4,-1)$, $(0,1,2,0,1)$ et $(1,-2,-3,-1,-2)$.
a) Trouver une base de F puis de G.
b) Déterminer une base de $F+G$ et donner une équation de $F+G$.
c) Trouver des équations de F et de G.
d) Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 8
On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^5$:

$$u_1 = (1,2,0,1,1),\ u_2 = (0,1,1,1,1),\ u_3 = (1,4,1,2,1).$$

a) Montrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants.
b) Soit $v = (a,b,c,d,e)$ un vecteur de $\mathbb{R}^5$. A quelles conditions v est-il un élément du sous-espace vectoriel F engendré par u_1, u_2, u_3 dans $\mathbb{R}^5$?
c) Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 9
a) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites à termes réels et soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère F l'ensembles des suites de E telles que $u_{n+1} = au_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dont on déterminera la dimension.
b) Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites à termes complexes et soient a, $b \in \mathbb{C}$. On considère F l'ensembles des suites de E telles que $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dont on déterminera la dimension.
c) Adapter a) et b) au cas des fonctions vérifiant des équations différentielles.

Exercice 10
1) Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel de l'espace des applications $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ engendré par les $(f_i)_{i=1,2,3,4}$ définis, pour tout $x \in]-1,1[$ par

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ f_2(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f_a(x) = \cos(x+a)$. Soit a, b, c dans $\mathbb{R}$. Déterminer le rang de (f_a, f_b, f_c) dans l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11

1) Soient E un espace vectoriel de dimension finie, soit F un sous-espace vectoriel non trivial ($F \neq \{0\}$ et $F \neq E$) de E. Montrer que F admet au moins deux supplémentaires différents de E.

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun dans E.

3) Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes impliquent la troisième.

$$(1)\ F\cap G=\{0\}\quad (2)\ F+G=E\ (3)\ \dim F+\dim G=\dim E.$$

4) Soient E, F deux espaces vectoriels. Montrer que si $E\times F$ est de dimension finie, E et F sont de dimension finie.

Exercice 12

Soient les vecteurs $u(1,1)$, $v=(2,-1)$ et $w=(1,4)$ de $\mathbb{R}^2$.
a) Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
b) Pour quelles valeurs du nombre réel a existe-t-til une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(u)=(2,1)$, $f(v)=(1,-1)$ et $f(w)=(5,a)$?

Exercice 13

a) Trouver une infinité d'isomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que $f(1,1)=(1,2)$.
b) Trouver toutes les formes linéaires f sur $\mathbb{R}^3$ telles que $f(1,-2,1)=1$.

Exercice 14

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leq n$. Montrer que pour tout $Q\in E_n$, il existe un unique $P\in E_n$ tel que

$$Q=\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right).$$

Exercice 15

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^2)\leq 2\dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Exercice 16

1) Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\lambda\in\mathbb{K}$, $f\in\mathcal{L}(E)$. Calculer $\mathrm{rg}(\lambda f)$ en fonction de $\mathrm{rg}(f)$.

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f,g\in\mathcal{L}(E)$ tels que $f+g=Id_E$ et $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\leq\dim E$. Montrer que f et g sont des projecteurs.

3) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que p est un projecteur si et seulement si la somme des rangs de f et de Id_E-f est n.

4) Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f,g\in\mathcal{L}(E,F)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) $\mathrm{rg}(f+g)=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$;
(ii) $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\{0\}$ et $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)=E$.

Exercice 17

1) Soit H un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
(ii) Il existe a non nul tel que $E=H\oplus\mathbb{K}a$.
Si l'une de ces propriétes est vérifiée, on dit que H est un hyperplan de E. Quelle est la dimension d'un hyperplan ?

2) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Une famille $\mathcal{F} = (\phi_1, ..., \phi_n)$ de formes linéaires sur E est dite positivement liée si, pour tout $x \in E$, les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $\phi_i(x) \geq 0$ pour $1 \leq i \leq n$;
(ii) $\phi_i(x) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$.
Soit $\mathcal{F} = (\phi_1, ..., \phi_n)$ une famille de formes linéaires sur E.
a) Prouver que si $\mathcal{F}$ est positivement liée, elle est liée.
b) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.
(i) $\mathcal{F}$ est positivement liée.
(ii) Il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $\alpha_1\phi_1 + ... + \alpha_n\phi_n = 0$.

3) Soient l_1, l_2, $l_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les formes linéaires définies, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par $l_1(x, y, z) = x + y + 3z$, $l_2(x, y, z) = 5x - y + z$, $l_3(x, y, z) = x - y - z$. Montrer que $(l_1, l_2, l_3))$ est une base de l'espace duale $(\mathbb{R}^3)^*$, puis trouver la base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ dont la base duale est (l_1, l_2, l_3).

4) Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $< 2n$ et soient a_1, ..., a_n des réels distincts. On considére, pour tout $i = 1, ..n$, les formes linéaires définies par $\lambda_i(P) = P(a_i)$ et $\mu_i(P) = P'(a_i)$ pour tout $P \in E$. Montrer que $(\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, ..., \mu_n)$ est une base de E^* et trouver sa base duale.

Exercice 18
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que dans les cas suivants, f est une homothétie.
a) f laisse stable toute droite de E.
b) $\dim E \geq 2$ et f laisse stable tout sous-espace de E de dimension p avec $1 \leq p < \dim E$.
c) f laisse stable tout hyperplan de E.
Exercice 19

Pour une partie $A \subset E$, on définit $A^\perp = \{\varphi \in E^* |; \forall x \in A,\ \varphi(x) = 0\}$, c'est un sous-espace-vectoriel de E^*. On définit également pour $A' \subset E^*$, $A'^\top = \{x \in E |\ \forall \varphi \in A',\ \varphi(x) = 0\}$, c'est un sous-espace vectoriel de E. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, M et N deux sous-espaces vectoriels de E^*, montrer les propriétés suivantes :

(1) $E^\perp = \{0\}$, $E^{*\top} = \{0\}$.
(2) $\dim A^\perp + \dim A = \dim E$.
(3) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
(4) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$
(5) $(F^\perp)^\top = F$

3. Matrices, système linéaires, déterminants

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. On note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui ont n lignes et p colonnes.

Exercice 1

1) Résoudre l'équation

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

d'inconnue $X \in M_2(\mathbb{K})$.

2) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer A^k.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 = 0$. On dit alors que A est nilpotente.

Exercice 2

Soit $S_n(\mathbb{K})$ (respectivement $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
1) Montrer que $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$. Donner une base de $S_n(\mathbb{K})$ et de $A_n(\mathbb{K})$.
2) Soient A et B dans $S_n(\mathbb{K})$. Montrer que $AB \in S_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieure ou égale à n. Soit $f \in \mathcal{L}(E_3, E_2)$ définie par $f(P) = P' - P''$ pour $P \in E_3$.
1) Déterminer la matrice A de f dans les matrices canoniques de E_3 et E_2.
2) Soit $S \in \mathbb{C}[X]$ tel que $S \neq 0$ et de degré 3. Démontrer que $(S, S', S'', S^{(3)})$ est une base de E_3 et (S, S', S'') une base de E_2. Ecrire la matrice de f dans ces deux bases.

Exercice 4

1) Pour tout nombre réel x, on note $A(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}x & \mathrm{sh}x \\ \mathrm{sh}x & \mathrm{ch}x \end{pmatrix}$. Montrer que, pour tout x, $y \in \mathbb{R}$, $A(x+y) = A(x)A(y)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x)$ est inversible et calculer son inverse.

2) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2-i & i & 1 \\ i & 1 & 1+i \\ 3-i & i & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.

3) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.

4) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 5

Soient $S \in M_n(\mathbb{K})$, $E = \{M \in M_n(\mathbb{K}); MS = 0\}$, $F = \{I_n + M; M \in E\}$.
1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.
2a) Montrer que F est stable pour la multiplication.
2b) Etablir que, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} \in F$.

Exercice 6

1) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 3i & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{C})$. Déterminer le rang de A, puis de ${}^tA$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a \\ a & 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & a \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{C})$. Etudier suivant la valeur de $a \in \mathbb{C}$ le rang de A.

3) Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quel est le rang de ϕ ? Déterminer une base de $\mathrm{Im}\phi$ et de $\mathrm{Ker}\phi$.

4) En utilisant des matrice carrées extraites, calculer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On note C_1,..., C_p les colonnes de A. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que la matrice de f dans des bases de E et F est A. Montrer que

$$\mathrm{rg}(A) = n \Longleftrightarrow f \text{ surjective } \Longleftrightarrow (C_1, ..., C_p) \text{ engendre } M_{n,1}(\mathbb{K});$$

$$\mathrm{rg}(A) = p \Longleftrightarrow f \text{ injective } \Longleftrightarrow (C_1, ..., C_p) \text{ est libre ;}$$

Exercice 8

1) Montrer que l'application $\mathrm{Tr} : A \to \mathrm{tr}A$ est une forme linéaire de $M_n(K)$.

2) Trouver toutes les applications linéaires $f : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(K)$ telles que, pour tout A, $B \in M_n(\mathbb{K})$, $f(AB) = f(BA)$.

3a) Montrer que si deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ sont semblables (c'est à dire qu'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$), alors elles ont même trace.
3b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'on peut définir la trace de u comme étant la trace de la matrice de u dans n'importe laquelle des bases de E.

Exercice 9

Soient A, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est équivalente à B s'il existe $(P, Q) \in Gl_p(\mathbb{K}) \times$

$Gl_n(\mathbb{K})$ tel que $B = Q^{-1}AP$.

1) Montrer que ceci définit une relation d'équivalence dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
2) Montrer que si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, alors A est équivalente à la matrice $J = (a_{ij})$ avec $a_{jj} = 1$ si $1 \leq j \leq r$ et $a_{ij} = 0$ sinon.
3) Montrer que, si $A,\ B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$A \text{ est équivalente à } B \Longleftrightarrow \text{rg}A = \text{rg}B.$$

En déduire que, pour tout $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$.
4) Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, il existe des matrices $B,\ C \in Gl_n(\mathbb{C})$ telles que $A = B + C$.

Exercice 10

1) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + z)$ pour tous $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$. On note A la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).
1a) Ecrire la matrice A.
1b) On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 1, 2)$ et $v_3 = (2, 1, 5)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $(v_1, v_2, v_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f dans cette base.

2) Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 11

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ 2x + 3y - z &= 4 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système

$$\begin{cases} x + y - z + t &= 2 \\ 2x - 2y + z - 3t &= 1 \\ -x + y + z - 2t &= -2 \end{cases}$$

3) Discuter et résoudre, suivant $a \in \mathbb{R}$, le système dans $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} 2x + y - 3z &= a \\ 3x + 2y + z &= a + 3 \\ 7x + 4y - 5z &= 2a + 5 \end{cases}$$

4) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $m \in \mathbb{C}$ pour que les trois plans vectoriels de $\mathbb{C}^3$ d'équation

$$x - 2y + z = mx, \ , 3x - y - 2z = my, \ 3x - 2y - z = mz$$

contiennent une même droite vectorielle.

Exercice 12

1) Montrer que, pour tout $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, $|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^n |a_{ij}|\right)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe A et B dans $Gl_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = 0$. Montrer que n est pair. Donner un exemple de matrices A et B dans le cas $n = 2$.

3) On note $Sl_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}); \det(A) = 1\}$.
3a) Vérifier que $Sl_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{K})$ pour la multiplication, appelé groupe spécial linéaire.
3b) Montrer que, pour $A \in Gl_n(\mathbb{C})$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $B \in Sl_n(\mathbb{C})$, $A = \alpha B$.

Exercice 13

Soient n, $p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A^p = I_n$ si et seulement si $(\mathrm{com}(A))^p = I_n$ où $\mathrm{com}(A)$ désigne la comatrice de A.

Exercice 14
Calculer les déterminants suivants.

1) $\begin{vmatrix} x+1 & -2 & 2 & 0 \\ a & x-a-1 & a & 0 \\ -2 & 2 & x-3 & x-1 \\ -1 & 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ où a, b et c dans $\mathbb{K}$. En déduire le nombre de solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & d \\ ax+by+cz & = & d^2+3 \\ a^2x+b^2yc^2z & = & d^3 \end{array} \right.$$

Calculer ces solutions.

3) $\det A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible ?

4) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ où $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ (Déterminant de Vandermonde).

5) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \vdots & \vdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$

6) $\det A$ où $A = \left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{ij}$ avec, pour tout i, $j \in \{1, .., n\}$, a_i, $b_j \in \mathbb{K}$, et $a_i + b_j \neq 0$ (Déterminant de Cauchy).

Exercice 15
Soient A, B, C et D dans $M_n(\mathbb{K})$ avec C et D commutent, et D inversible. Montrer alors

que $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$.

Exercice 16

1) Calculer $\det(f)$ où f est l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par $f(X) = {}^tX$ pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, V_1, ..,V_n des vecteurs de E, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(V_1, ..., f(V_j), ..., V_n) = \mathrm{tr}(f)\det_{\mathcal{B}}(V_1, ..., V_n).$$

3) Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout i, $j \in \{1, ..., n\}$
(i) $a_{ij} \in \mathbb{Z}$;
(ii) $i \neq j \Rightarrow a_{ij}$ pair.
(iii) a_{ii} impair.
Montrer que $\det(A) \neq 0$.

Complément : Espaces de matrices

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on note $M_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert et dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

2) On note $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}); \det A = 1\}$. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $SL_n(\mathbb{K})$.

3) On note E l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ et F l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\overline{F} = \overline{E} = M_n(\mathbb{C})$. Ce résultat subsiste-t-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

4) Soient $E = M_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et $T_{2,s}(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures. Calculer la projection orthogonale d'une matrice A sur F.

5) Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

6) Montrer que l'application *det* de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui à $A \in M_n(\mathbb{K})$ associe $\det A$ est continue.

4. Réduction des endomorphismes

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Tous les espaces vectoriels considérés sont (sauf mention du contraire) sur $\mathbb{K}$.

Exercice 1
Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer

que tout sous-espace propre pour f est stable par g, et que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont stables par g.

Exercice 2

1) Déterminer valeurs propres, vecteurs propres, noyau, image de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = X(P(X) - P(X-1))$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

2) Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes convergentes et f l'endomorphisme de E, qui à toute suite (x_n) associe la suite (y_n) définie par $y_n = x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de f.

3) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonction continues $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, $u(f) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t) f(t) dt$ et $v(f) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $v(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t) f(t) dt$. Montrer que u et v sont des enmorphismes de E, dont on déterminera valeurs propres et vecteurs propres.

Exercice 3
On note $P(f)$ et $P(A)$ le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f et d'une matrice carrée A.

1) Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et F un sous-espace de E stable par f. On note f' l'endomorphisme induit par f sur F. Montrer que $P(f) = P(f')$.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$.

3) Montrer que pour tout $A \in M_n(K)$, $P(A) = P({}^tA)$. En déduire que A et ${}^tA$ ont même spectre.

Exercice 4

1) Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, puis diagonaliser A.

2) Même question avec (pour $a \in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -a-1 & a & a+1 \\ -a & a & a+1 \end{pmatrix}$$

3) Soient $a \in \mathbb{K}$ et f l'endomorphisme de $K_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\leq n$) défini par $f(P) = (X-a)(P' - P'(a)) - 2(P - P(a))$ pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer valeurs propres, vecteurs propres, noyau et image de f ; f est-elle diagonalisable ?

Exercice 5

Soient a, $b \in \mathbb{C}$. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ définie pour tout i, $j \in \{1, ...n\}$, par $a_{i,i} = 0$, $a_{i,j} = a$ si $j > i$ et $a_{i,j} = b$ si $i > j$.

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2) Donner une CNS sur (n, a, b) pour que A soit diagonalisable.

Exercice 6

Trouver toutes les matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ et $\mathrm{tr}B = 0$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ sont-elles semblables ?

Exercice 8

Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ -1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k.

2) Soient $a \in]-1, 1[$, $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $e^B = A$.

3) Soient (u_n), (v_n), (w_n) les suites réelles définies par

$$u_0 = 0, v_0 = 22, w_0 = 22$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n),$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n),$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n).$$

Calculer u_n, v_n et w_n, puis étudier la convergence de ces suites.

4) Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 = 1; u_1 = 1, u_2 = 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}.$$

Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) exo sur les systemes d'equa diff ?

Exercice 10

1) Etablir que tout endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

2) Soient A, $B \in M_n(\mathbb{K})$ telles que AB soit diagonalisable. Montrer que si A ou B est inversible, alors BA est diagonalisable.

3) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'on peut décomposer A en la somme de deux matrices diagonales.

4) Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$, $M \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k A = 0$, alors $MA = 0$.

Exercice 11
Trigonaliser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12

1) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Soit f l'endomorphisme de E considéré dans l'exercice 2 2). Montrer que le seul polynôme annulateur de f est le polynôme nul.

2) Soeint $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A = 0$ (et $A \neq 0$). Montrer que A est équivalente à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) =^t A$. Montrer que f est linéaire ; f est-il diagonalisable ?

Exercice 13

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
(i) A est nilpotente ;
(ii) Le spectre de A est $\{0\}$.
(iii) $P_A = (-1)^n X^n$;
(iv) $A^n = 0$.
2) Soient un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que pour tout $k = 0, .., n$, il existe un sous-espace vectoriel de E stable par f.

Exercice 14

1a) Soit E l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que E est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
1b) Soit $A \in E$. Montrer que $P(A) = 0$.
1c) En déduire une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton dans la cas de $M_n(\mathbb{C})$.

2) Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer

$$P(A) \in GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \text{pgcd}(P, \chi_A) = 1.$$

3) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que χ_f est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par f.

Exercice 15

1) Soit E un espace vectoriel (de dimension finie ou non). Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et des polynômes P_1,...., P_N des polynômes premiers entre eux. Montrer que les sous-espaces vectoriels Ker$(P_1(f))$,...,Ker$(P_N(f))$ sont en somme directe et que

$$\bigoplus_{i=1}^{N} \text{Ker}(P_i(f)) = \text{Ker}\left(\left(\Pi_{i=1}^{N} P_i\right) f\right).$$

2) En utilisant 1), montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ est équivalente à une matrice diagonale par blocs.

Attention ! les notions de polynômes minimales et de réduction de Jordan ne font pas partie du programme de CAPES

Exercice 16 (Polynôme minimal)

1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. 1a) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire, note π_f, tel que

$$\{P \in \mathbb{K}[X]; P(f) = 0\} = \pi_f.\mathbb{K}[X].$$

Le polynôme π_f est appelé “polynôme minimal” de f.
1b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si π_f est scindé simple sur $\mathbb{K}$.
1c) Montrer que π_f et χ_f ont les mêmes diviseurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.
1d) Montrer que f est trigonalisable si et seulement si π_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ Calculer χ_A, les valerus propres et vecteurs propres de A et π_A.

3) Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension finie E. Montrer que f est nilpotente si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\pi_f = X^r$.

Exercice 17 (Décomposition de Dunford)

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un couple unique $(D, N) \in M_n(\mathbb{K})^2$ tel que
(i) $A = D + N$;
(ii) D est diagonalisable ;
(iii) N est nilpotente ;

(iv) $ND = DN$.
Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On appelle rayon spectrale de A (que l'on note $\rho(A)$) le réel $\rho(A) = \max|\lambda|$ où le max est pris sur toutes les valeurs propres de A. Montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} A^p = 0 \Longleftrightarrow \rho(A) < 1.$$

3) Comment calculer l'exponentielle d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ en utilisant la décomposition de Dunford.

4) Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de la matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$.
4a) Quelles est la décomposition de Mumford de A^k ? de A^{-1} (si on suppose que A est inversible) ? de e^A ?
4b) Résoudre l'équation $e^X = I_n$ d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable.

Exercice 18 (Réduction de Jordan)

1) Rappeller ce qu'est la réduite de Jordan d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Vérifier que A est nilpotente. Déterminer sa réduite de Jordan J et une matrice inversible P telle que $A = PJP^{-1}$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.
3a) Montrer que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. Déterminer la réduite de Jordan J de A et une matrice inversible P telle que $A = PJP^{-1}$.
3b) Montrer que A est inversible et calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
3c) Calculer e^A.

4) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -9 & 72 & 52 \\ 1 & -5 & -4 \\ -3 & 20 & 15 \end{pmatrix}$ sont semblables dans $M_3(\mathbb{R})$.

5. Espaces euclidiens, espaces hermitiens

Dans cette feuille, tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.
Dans un espace euclidien E, on notera $< .,. >$ le produit scalaire et $||.||$ la norme euclidienne.

Exercice 1
Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire usuel.

1) Soit H le sous-espace de R^4 d'équation $x+y+z+t=0$ et soit p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur H.
1a) Pour tout $u \in \mathbb{R}^4$, calculer $||u-p(u)||$.
1b) Quelle est la matrice de p dans la matrice canonique de $\mathbb{R}^4$?

2) Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u_1 = (1,1,0,1)$, $u_2 = (-2,0,1,1)$ et $u_3 = (0,1,0,1)$.
2a) Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Trouver une équation de H.
2b) Trouver un vecteur unitaire orthogonal à H.
2c) Notons s_H la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^4$ par rapport à H. Quelle est la matrice de s_H dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?

3) Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ d'équations $x-4y+z+3t=0$ et $2x-y+z+t=0$. Trouver les équations du plan orthogonal à P.

4) Quelle est la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$) de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur le plan engendré par $(0,1,1,1)$ et $(1,0,1,0)$?

5) Soient les vecteurs $u_1 = (1,-3,0,2)$, $u_2 = (3,-3,-2,1)$, $u_3 = (1,0,1,0)$ et $u_4 = (0,0,0,1)$
5a) Montrer que (u_1,u_2,u_3,u_4) forme une base de $\mathbb{R}^4$, puis orthonormaliser cette base.
5b) Quelle est la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$) de la projection orthogonale sur le plan P de $\mathbb{R}^4$ d'équations $x-3y+2t=0$ et $3x-3y-2z+t=0$?

Exercice 2
Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure ou égale à 2 et $x,\, y \in E$.
1) Montrer que si $||x|| = ||y||$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = s_H(x)$ (où s_H est la symétrie orthogonale par rapport à H).
2) Montrer que si $< x, y >= ||y||^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = p_H(x)$ (où p_H est la projection orthogonale sur H).

Exercice 3

1) On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $< A, B >= \mathrm{Tr}({}^tA.B)$ Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, on considère $\phi_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $\phi_A(X) ={}^t A.X.A$ pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\phi_A \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$, puis calculer l'adjoint de ϕ_A.

2) Soient E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ (où f^* est l'adjoint de f), F un sous-espace vectoriel de E et g l'endomorphisme de F induit par f. On munit F du produit scalaire induit par celui de E. Montrer que $g \circ g^* = g^* \circ g$.

Exercice 4

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que deux des propriétés suivantes entrainent la troisième.
(i) ${}^tA = A$;
(ii) ${}^tAA = A$;
(iii) $A^2 = A$.

Exercice 5

Dans tout l'exercice, l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^n$ est (sauf mention du contraire) équipé du produit scalaire usuel.

1) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1a) Montrer que f est une isométrie.
1b) Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ déquation $x + y + 2z + 3t = 0$. Montrer que $f(H)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$, puis trouver une équation de $f(H)$.

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2a) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f
2b) Montrer que pour tout vecteur non nul $u \in \mathbb{R}^3$, on a $< f(u), u >> 0$.
2c) Soit $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $N(u) = \sqrt{< u, f(u) >}$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$. Montrer que N est une norme et que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, on a $||u|| \leq N(u) \leq \sqrt{2}||u||$.

3) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une rotation de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'axe et l'angle.
4) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) est

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4a) Montrer que f est une isométrie.
4b) Montrer que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
4c) Trouver les équations d'un plan P de $\mathbb{R}^4$ stable par f.
4d) L'isométrie a-t-elle un vectuer propre ?

5) On note P le plan de $\mathbb{R}^4$ d'équations $x = 0$ et $y + z + t = 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5a) Montrer que f est une isométrie.
5b) Trouver une base orthonormée (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$ telle que $e_1, e_2 \in P$.
5c) Montrer que le plan P est stable par f.

5d) Quelle est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) ?
5e) Calculer le polynôme caractéristique de f.

6) Soient E un espace euclidien de dimension finie $n \geq 2$ et $(e_1, .., e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $u = u_1 e_1 + ... + u_n e_n$ un vecteur non nul de E et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(e_1, ... e_n)$ est $A = (u_i u_j)$.
6a) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de rang 1.
6b) Déterminer valeurs propres et espaces propres de f.
6c) A quelle condition sur u, f est-il une projection orthogonale ?

7) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7a) Montrer que f est une isométrie.
7b) Montrer que f a une unique valeur propre que l'on calculera.
7c) Trouver une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que e_1 est vecteur propre de f.
7d) Quelle est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) ?
7e) Montrer qu'il existe une unique rotation r et une unique symétrie orthogonale s par rapport à un plan telles que $f = r \circ s = s \circ r$. On précisera l'axe et l'angle de r.

8) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Préciser la nature de f.

Exercice 6

On note dans tout l'exercice $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ et $O(E)$ le groupe des endomorphismes orthogonaux de E.

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, .., C_n$ les colonnes de A. Montrer que $A \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sum_{i=1}^n C_i \, {}^tC_i = I_n$.

2) Soit $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $S = I_n - \dfrac{2}{{}^tC.C}({}^tC.C)$ (matrice de Householder). Vérifier que S est la matrice (dans la base canonique) de la reflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à C.

3) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$ et étudier le cas d'égalité.
4) Soit E un espace euclidien et soit $f \in O(E)$. Montrer que $\text{Ker}(f - i_d)$ et $\text{Im}(f - i_d)$ sont supplémentaire orthogonaux dans E.
5) Soit E un espace euclidien et soit $f \in O(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.

Exercice 7

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice $P \in O(3)$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A + {}^tA$ est nilpotente, alors A est antisymétrique.
3) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tX.X = n$ et ${}^tX.A.X = \mathrm{Tr}A$.

4) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On pose $A = S + iI_n$. Montrer que A est inversible.

5) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que la plus grande valeur propre de A est

$$\sup_{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0} \frac{{}^tX.A.X}{{}^tX.X}.$$

<u>Exercice 8</u>

1) Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $q(x,y,z) = y^2 - 3z^2 + 2xy - 4xz + yz$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
1a) Montrer que q est une forme quadratique.
1b) Expliciter la forme bilinéaire symétrique associée à q.
1c) Quelle est la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1d) Montrer que pour toute base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $e_1 = (1,0,0)$, la matrice de q dans la base (e_1, e_2, e_3) n'est pas diagonale.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $q(x,y,z,t) = ax^2 + 2axy + y^2 + 4zt - at^2$ pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
2a) Montrer que q est un forme quadratique.
2b) Pour quelles valeurs de a, q est-elle dégénérée ?
2c) On suppose que q est dégénérée. Trouver une base du noyau de q.

3) Décomposer les formes quadratiques suivantes sous la forme de combinaison linéraire de formes linéaires qui sont linéairement indépndantes, puis en déduire rang, noyau et signature.
3a) $q(x,y,z) = 2x^2 - 3y^2 + z^2 + 4xy - 6xz + 5yz$.
3b) $q(x,y,z) = xy + 2xz - 3yz$.
3c) $q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - 2t^2 - 2xy + 2xz - 2xt - 2yz - 4ayt$ $(a \in \mathbb{R})$.
3d) $q(x,y,z,t) = xy + xz + xt - yz + yt + 2zt$.

4) Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $q(x,y,z,t) = xy + 2xz + 2xt + yz + 4yt + 2zt$ pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
4a) Quelle est la matrice de q dans la base canonique de R^4 ?
4b) Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ orthogonale pour q. Ecrire la matrice de q dans cette base.

5)Soient $q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les formes quadratiques définies par $q_1(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2$ et $q_2(x,y) = 7x^2 + 6xy + 2y^2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Trouver toutes les bases de $\mathbb{R}^2$ orthonormées pour q_1 et orthogonales pour q_2.

6) Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique telle que $q(x,y,z) = x^2 + 11y^2 + 6z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$.
6a) Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée à q est un produit scalaire.
6b) On munit $\mathbb{R}^3$ de ce produit scalaire. Soit p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le

plan d'équation $x + y - z = 0$. Quelle est la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

7) Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique telle que $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4xy + 2xz + 2yz$. Trouver tous les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sur lesquels la restriction de q est définie-positive.

8) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit $q : E \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(P) = b^2 - 4ac$ si $P = aX^2 + bX + c$.
8a) Quelle est la matrice de q dans la base $(1, X, X^2)$ de E ?
8b) Trouver une base de E orthogonale pour q.
8c) Soit $r \in \mathbb{R}$ et soit F le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes s'annulant en r. Trouver une base de $H^\perp$.

Exercice 10

1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie positive. Soit A la matrice de q dans une base de E. Montrer que $\det A > 0$.

2) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée et soit β la forme bilinéaire symétrique associée. Montrer que pour tout $l \in E^*$ (E^* est le dual de E), il existe un unique $a \in E$ tel que $l(u) = \beta(a, u)$ pour tout $u \in E$.

3) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
3a) Montrer que $F \subset F^\perp$ si et seulement si $q(x) = 0$ pour tout $x \in F$.
3b) Supposons que $q(x) = 0$ pour tout $x \in F$ et tout $x \in G$.
(i) Montrer que pour tout vecteur $y \in F + (F^\perp \cap G)$, on a $q(y) = 0$.
(ii) Soient U un suplémentaire de $F \cap G$ dans F et V un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Montrer que l'on a
$$F^\perp \cap G = (F \cap G) \oplus (U^\perp \cap V).$$

Exercice 10

Dans tout cet exercice, E est un espace hermitien. On note $H(E)$ l'espace des endomorphismes hermitiens de E.

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que pour tout $x \in F$, $||f(x)|| = ||x||$ et pour tout $x \in F^{\perp}$, $f(x) = 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = F^{\perp}$.

2) Soit $f \in H(E)$ et soit $x \in E$. Montrer que
$$< x, f(x) >^2 \leq < x, f^2(x) > ||x||^2.$$
3) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. Montrer que $p = p^*$ si et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p)$, $< x, y >= 0$.

Exercice 11

On note U_n l'ensemble des matrices unitaires de $M_n(\mathbb{C})$.

1) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On pose $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $A = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} w^{(k-1)(j-1)}\right)_{1 \leq j,k \leq n}$. Montrer que $A \in U_n$.

2) Montrer que pour tout $A \in H_n$, $e^{iA} \in U_n$.

3) Déterminer $H_2 \cap U_2$.

4) On pose $J = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$. Soit $G = \{M \in M_{2n}(\mathbb{R}) ;^t M.JM = J\}$.
4a) Montrer que pour tout $M \in G$, $\det M \in \{-1, 1\}$.
4b) Montrer que G est un sous-groupe de $Gl_{2n}(\mathbb{R})$.
4c) Montrer que
$$G \cap O_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} ; A + iB \in U_n \right\}.$$
4d) Pour $M \in G \cap O_{2n}(\mathbb{R})$, calculer $\det(M)$.

Exercice 11

Soient H_1 et H_2 des matrices hermitiennes positives telles que $H_1 = H_2$. Montrer que si H_1 et H_2 sont semblables, elles sont nulles.