Ag. interne. 4-4-05. Equations différentielles et séries de Fourier. (En remplacement de de la leçon du 30-03).

exercice 1.

On considère l'équation différentielle (E_1) : $y"(t) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} y(t) = 0$.
1. Montrer que f, définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E_1), est 2π pér. si et seulement si $f(0) = f(2\pi)$,$f'(0) = f'(2\pi)$.
2. Soit f une fonction 2π périodique solution de (E_1). On note $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_o^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$.
a). Relation entre $c_n(f)$ et $c_n(f")$.
b). En déduire une relation entre $c_n(f)$ et $c_{n-1}(f)$. Calculer $c_{-1}(f)$.

c). Trouver l'expression de f.

solution de l'exercice 1.

1. $g(t) = f(t + 2\pi)$ vérifie $g(0) = f(2\pi) = f(0)$ et $g'(0) = f'(2\pi) = f'(0)$. Par unicité, $g = f$.

2. f étant C^2, le th de cv normale des séries de fourier s'applique et $f = Sf$. $c_n(f') = -\mathrm{i}nc_n(f)$,$c_n(f") = -n^2 c_n(f)$, $y"(t) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} y(t) = 0$ équivaut à $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}(c_{n-1}(f) - n^2 c_n(f))\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = 0$. Par unicité des coeff de Fourier quand il y a cv uniforme: $c_{n-1}(f) = n^2 c_n(f)$. $c_{-1}(f) = 0$, donc $c_{-n}(f) = 0$ pour tout $n > 0$. $c_n(f) = \dfrac{1}{(n!)^2} c_0(f)$,$f(t) = c_0(f)\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$.

exercice 2.

Résoudre l'équation différentielle : $y"(t) + y(t) = |\sin(t)|$ en développant $|\sin(t)|$ en série de fourier.

solution abrégée de l'exercice 2.

$$|\sin(t)| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{1}^{+\infty}\frac{\cos(2nt}{1-4n^2}.$$

solution particulière de $y"(t) + y(t) = \cos(2nt)$: $t \to \dfrac{\cos(2nt)}{1-4n^2}$ convient. donc $f(t) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{1}^{+\infty}\frac{\cos(2nt}{(1-4n^2)^2}$ devrait être solution de l'eq par superposition des sols particulières. Reste à vérifier que f est C^2 sur $\mathbb{R}$ et que l'on peut dériver deux fois la série de fns définissant f. Posons $u_n(t) = \dfrac{\cos(2nt}{(1-4n^2)^2}$. Alors $\sum u_n$, $\sum u'_n$, $\sum u"_n$ cv normalement sur $\mathbb{R}$. $f" = \sum u"_n$. on vérifie ensuite que $f(t)+f"(t) = |\sin(t)|$. enfin, les solutions sont $t \to f(t) + a\cos(t) + b\sin(t)$.

exercice . équation de la chaleur : voir Gourdon.

exercice 3. cordes vibrantes.

(*d'après Analyse 2 PSI, PC. J. Franchini et J.J. Jacquens (dernière page). Ellipses*).

On considère l'éq aux dérivées partielles (1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ u étant une fn de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. on dit que u est stationnaire si elle s'écrit $u(x,t) = v(x)w(t)$, v et$w$ étant C^2 sur $\mathbb{R}$. On note alors $u = v \otimes w$.
1. a) Soit λ un réel fixé. Montrer que si v et w sont C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifient (S_λ): $\{v" = \lambda v, w" = \lambda c^2 w\}$, alors $v \otimes w$ est solution de (1).
1. b) Récip, si $v \otimes w$ est solution non nulle de (1), alors il existe un réel unique λ tq v et w sont sol de (S_λ).
2. Soit $l > 0$, $T = \dfrac{l}{c}$. Soit $u = v \otimes w$ est solution non nulle de (1), vérifiant les conditions aux limites suivantes

$(L): \forall t \in \mathbb{R}, u(0,t) = u(l,t) = 0 , \forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,o) = 0.$
a) Montrer que $v(0) = v(l) = w'(0) = 0$.
b) Montrer que le réel λ tq v,w soient sol de (S_λ) ne peut prendre qu'une infinité dénombrable de valeurs: $-\omega_1^2, -\omega_2^2, \dots, -\omega_n^2, \dots$, (avec: $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n \dots$) que l'on déterminera. Déterminer les solutions stationnaires non nulles de (1) vérifiant (L) et correspondant à $\lambda = -\omega_n^2$.
c) On donne V impaire, de classe C^∞ et 2π périodique, $V(x) = \sum_1^{+\infty} b_n \sin(nx)$,

trouver $u(x,t) = A_0(t) + \sum_1^{+\infty}[A_n(t)\dfrac{\cos(n\pi x}{l}) + B_n(t)\dfrac{\sin(n\pi x}{l})]$ vérifiant (1), $(L) et \forall x \in \mathbb{R}, u(x,0) = V(\dfrac{\pi x}{l})$.
d) Montrer que $||(A_n)||_\infty, ||(A'_n)||_\infty, ||(A"_n)||_\infty, ||(B_n)||_\infty, ||(B'_n)||_\infty, ||(B"_n)||_\infty$ sont des $o(n^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

solution de l'exercice 3.

1. a) $u = v \otimes w, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v" \otimes w, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v \otimes w"$ et on constate que u est bien sol de (1).
1. b) Soit (x_0,t_0) tq $u(x_0,t_0) = v \otimes w(x_0,t_0) \neq 0$, on a $c^2 v"(x_0)w(t_0) = v(x_0)w"(t_0)$.
Soit $\lambda = \dfrac{v"}{v}(x_0)$, alors $\lambda = \dfrac{w"}{w}(t_0) = \lambda c^2$. $\forall x \in \mathbb{R}, c^2 v"(x)w(t_0) = v(x)w"(t_0) \Longrightarrow v"(x) = \lambda v(x)$.
$\forall t \in \mathbb{R}, c^2 v"(x_0)w(t) = v(x_0)w"(t) \Longrightarrow w"(t) = \lambda w(t)$. D' où l'existence de λ.
2. a) $v(0) = v(l) = 0$ car $u(0,t_0) = u(l,t_0) = 0$. Utilisons x_0 : $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_0,0) = 0 \Longrightarrow w'(0) = 0$.
2. b)
- Si $\lambda = 0 \Longrightarrow v = 0 \Longrightarrow u = 0$. exclu.
- Si $\lambda = \omega^2 > 0 \Longrightarrow v(x) = A\mathrm{ch}(\omega x) + B\mathrm{sh}(\omega x)$. Mais $v(0) = 0 \Longrightarrow A = 0, v(l) = 0 \Longrightarrow B = 0$.
Et donc $u = 0$, exclu.
- Si $\lambda = -\omega^2 < 0 \Longrightarrow v(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$. $v(0) = 0 \Longrightarrow A = 0, v(l) = 0 \Longrightarrow B = 0$ ou $\omega_n l = n\pi, n \in \mathbb{N}^*$. $w(t) = C\cos(\omega ct) + D\sin(\omega ct)$ et $w'(0) = 0 \Longrightarrow D = 0$.
Finalement, $\lambda = -\omega_n^2$ et $u(x,t) = \alpha \sin(\dfrac{n\pi x}{l})\cos(\dfrac{n\pi x}{T})$.
2. c) Soit u une solution.
$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, A_0(0) + \sum_1^{+\infty}[A_n(0)\cos(\dfrac{n\pi x}{l}) + (B_n(0) - b_n)\sin(\dfrac{n\pi x}{l})] = 0$. Par unicité des coeff de fourier de cette série de fonctions normalement cv sur $\mathbb{R}$, on obtient: $\forall n \in \mathbb{N}, A_n(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(0) = b_n$.
$\bullet$ Posons $\phi_n(t) = A_n(t)\cos(\dfrac{n\pi x}{l}) + B_n(t)\sin(\dfrac{n\pi x}{l})]$ pour x fixé. Comme $\sum A'_n, \sum B'_n$ cv normalement sur $\mathbb{R}$, on obtient la cv normale de $\sum \phi_n, \sum \phi'_n$. et on déduit:
$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = A'_0(t) + \sum_1^{+\infty} A'_n(t)\cos(\dfrac{n\pi x}{l}) + B'_n(t)\sin(\dfrac{n\pi x}{l})] \Longrightarrow A'_0(t) + \sum_1^{+\infty} A'_n(0)\cos(\dfrac{n\pi x}{l}) + B'_n(0)\sin(\dfrac{n\pi x}{l})] = 0$. On obtient, par cv normale, que les coeff de fourier de cette sont $A'_n(0), B'_n(0)$ et sont nuls.
$\bullet \sum \phi''_n$ cv normalement sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x,t) = A''_0(t) + \sum_1^{+\infty}[A''_n(t)\cos(\dfrac{n\pi x}{l}) + B''_n(t)\sin(\dfrac{n\pi x}{l})]$.
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t) = -\sum_1^{+\infty}(\dfrac{n\pi}{l})^2[A_n(t)\cos(\dfrac{n\pi x}{l}) + B_n(t)\sin(\dfrac{n\pi x}{l})]$ En utilisant (1), on obtient
$\forall t \in \mathbb{R}, A''_0(t) + \sum_1^{+\infty}[(A''_n(t) + \dfrac{n\pi}{l})^2 A_n(t))\cos(\dfrac{n\pi x}{l}) + (B''_n(t) + \dfrac{n\pi}{l})^2 B_n(t))\sin(\dfrac{n\pi x}{l})] = 0$
$\bullet A_n \mathrm{et} B_n$ sont caractérisés par $A''_0 = 0, A_n \mathrm{et} B_n$ solutions de $y" + (\dfrac{n\pi}{l})^2 y = 0$. Compte tenu des c.i. $A_n = 0$ et $u(x,t) = \sum_1^{+\infty} b_n \cos\dfrac{n\pi t}{T}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$, les b_n étant quelconques. Réciproquement cette fn convient... 2. d) résulte des propriétés des coeffs de fourier pour les fns C^∞.