

### 5.1.5 Liste des sujets de la session 2006

#### LEÇONS D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

- 101 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.
- 102 Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.
- 103 Congruences dans  $\mathbf{Z}$ , anneau  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Applications.
- 104 Propriétés élémentaires liées à la notion de nombre premier.
- 105 PGCD, PPCM dans  $\mathbf{Z}$ , théorème de Bézout. Applications.
- 106 PGCD dans  $K[X]$ , où  $K$  est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.
- 107 Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels.
- 108 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une application linéaire.
- 109 Formes linéaires, hyperplans, dualité (on pourra se limiter à des espaces vectoriels de dimension finie). Exemples.
- 110 Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, polynômes d'endomorphisme.
- 111 Changements de bases en algèbre linéaire (applications linéaires, formes bilinéaires ...). Applications.
- 112 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications.
- 113 Déterminants. Applications.
- 114 Groupe des homothéties et translations dans le plan affine. Applications.
- 115 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimensions 2, de dimension 3.
- 116 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien (dimension finie). Applications.
- 117 Formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien de dimension finie (les généralités sur les formes quadratiques seront supposées connues). Applications géométriques.
- 118 Applications géométriques des nombres complexes.
- 119 Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications.
- 120 Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, formes réduites.
- 121 Géométrie du triangle.
- 122 Barycentres. Applications.
- 123 Droites et plans dans l'espace.
- 124 Projecteurs et symétries dans un espace affine de dimension finie.
- 125 Cercles dans le plan affine euclidien.
- 126 Cinématique du point : vitesse, accélération. Exemples de mouvements. On pourra se limiter aux mouvements plans.
- 127 Division euclidienne.
- 128 Utilisation de groupes en géométrie.
- 129 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes. Racines, polynômes irréductibles, factorisation.

- 130 Rang en algèbre linéaire.
- 131 Utilisation de transformations en géométrie.
- 132 Coniques.
- 133 Courbes planes paramétrées.
- 134 Diverses notions d'angle et leurs utilisations.
- 135 Équations et géométrie.
- 136 Factorisation de matrices. Cas des matrices symétriques réelles. Applications.
- 137 Formes réduites d'endomorphismes. Applications.
- 138 Résolution de problèmes modélisés par des graphes.
- 139 Trigonométrie.

## LEÇONS D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

- 201** Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence.
- 202** Séries à termes réels positifs.
- 203** Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence (les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs étant supposés connus).
- 204** Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes.
- 205** Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation de fonctions.
- 206** Parties compactes de  $\mathbf{R}^n$ . Fonctions continues sur une telle partie. Exemples.
- 207** Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.
- 208** Théorème du point fixe. Applications.
- 209** Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.
- 210** Séries entières. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
- 211** Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés. Exemples.
- 212** Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques, nombre  $\pi$ .
- 213** Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
- 214** Théorème de Rolle. Applications.
- 215** Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
- 216** Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.
- 217** Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.
- 218** Calcul de valeurs approchées d'une intégrale. Exemples d'estimation de l'erreur.
- 219** Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ . Exemples
- 220** Intégrale d'une fonction numérique continue sur un intervalle compact. Propriétés.
- 221** Intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.
- 222** Équations différentielles linéaires d'ordre deux :  $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ , où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont des fonctions continues sur un intervalle de  $\mathbf{R}$ , à valeurs réelles ou complexes.
- 223** Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants ; écriture matricielle ; exponentielle d'une matrice. Exemples.
- 224** Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentielle. Fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . Fonctions composées.
- 225** Fonctions définies sur une partie convexe de  $\mathbf{R}^n$ . Inégalité des accroissements finis. Applications.
- 226** Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli, variable aléatoire de loi binomiale, approximations de cette loi.
- 227** Probabilité conditionnelle et indépendance. Couples de variables aléatoires. Exemples.
- 228** Espérance, variance ; loi faible des grands nombres.
- 229** Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.
- 230** Approximation d'un nombre réel. Théorèmes et méthodes.

**231** Équations et systèmes différentiels.

**232** Exponentielles et logarithmes

**233** Fonctions définies sur un intervalle, à valeurs dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{R}^n$ . Dérivabilité, théorème des accroissements finis, exemples.

**234** Intégrales et primitives.

**235** Le nombre  $\pi$ .

**236** Recherche d'extremums.

**237** Suites de fonctions. Divers modes de convergence. Exemples.

**238** Suites de nombres réels.

**239** Utilisations de la dérivée d'une fonction numérique.

## EXERCICES D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

- 301** Exercices sur les groupes.
- 302** Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans  $\mathbf{Z}$ .
- 303** Exercices faisant intervenir la division euclidienne.
- 304** Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.
- 305** Exercices faisant intervenir les nombres premiers.
- 306** Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM et mettant en œuvre des algorithmes associés.
- 307** Exercices faisant intervenir des dénombrements.
- 308** Exercices faisant intervenir les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.
- 309** Exercices faisant intervenir polynômes et fractions rationnelles sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .
- 310** Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
- 311** Exercices faisant intervenir la notion de rang.
- 312** Exercices faisant intervenir des matrices inversibles.
- 313** Exercices faisant intervenir des systèmes linéaires.
- 314** Exercices faisant intervenir des déterminants.
- 315** Exemples de recherche et d'emploi de vecteurs propres et valeurs propres.
- 316** Exercices faisant intervenir la réduction des endomorphismes.
- 317** Exercices sur les endomorphismes diagonalisables.
- 318** Exercices faisant intervenir des projecteurs ou des symétries.
- 319** Exemples de méthodes et d'algorithmes de calcul en algèbre linéaire.
- 320** Exercices sur les isométries vectorielles dans les espaces euclidiens en dimension 2 et en dimension 3.
- 321** Exercices faisant intervenir la réduction des matrices réelles symétriques.
- 322** Exercices sur les formes quadratiques.
- 323** Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.
- 324** Exercices faisant intervenir des similitudes planes directes ou indirectes.
- 325** Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimension 2 et en dimension 3.
- 326** Exercices faisant intervenir la notion de barycentre.
- 327** Exercices faisant intervenir des applications affines.
- 328** Exercices sur les aires et les volumes.
- 329** Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimension 2 et en dimension 3.
- 330** Exercices sur la cocyclicité.
- 331** Exercices sur les cercles.
- 332** Exercices de géométrie plane faisant intervenir des triangles isométriques ou semblables.
- 333** Exercices sur les coniques.

- 334** Exemples d'étude de courbes planes.
- 335** Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure. . .).
- 336** Exercices sur les propriétés métriques des courbes de l'espace.
- 337** Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.
- 338** Exemples de groupes en géométrie.
- 339** Exercices de construction en géométrie plane.
- 340** Exercices de géométrie faisant intervenir le choix d'un repère.
- 341** Exercices de cinématique du point.
- 342** Exercices de cinématique du point.
- 343** Exercices sur les triangles.

## EXERCICES D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

- 401 Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes.
- 402 Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.
- 403 Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.
- 404 Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.
- 405 Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
- 406 Exemples de comportement asymptotique de suites ; rapidité de convergence ou de divergence.
- 407 Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.
- 408 Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.
- 409 Exercices sur les suites de polynômes orthogonaux.
- 410 Comparaison sur des exemples de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions d'une variable réelle.
- 411 Exemples d'étude de fonctions définies par une série.
- 412 Exemples de développements en série entière. Applications.
- 413 Exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles.
- 414 Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.
- 415 Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable réelle.
- 416 Exemples d'approximations de fonctions numériques ; utilisations.
- 417 Exemples d'utilisation de développements limités.
- 418 Exemples d'utilisation d'intégrales pour l'étude de suites et de séries.
- 419 Exemples d'utilisation de suites ou de séries pour l'étude d'intégrales.
- 420 Exemples de calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
- 421 Exemples d'étude d'intégrales impropres.
- 422 Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.
- 423 Exemples de calculs d'aires et de volumes.
- 424 Exemples de calculs d'intégrales multiples.
- 425 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
- 426 Exemples de résolution d'équations différentielles scalaires, linéaires ou non linéaires.
- 427 Exemples de résolution de systèmes différentiels linéaires.
- 428 Exemples d'équations différentielles issues des sciences expérimentales ou de l'économie.
- 429 Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une variable, d'une fonction numérique de deux variables.
- 430 Exemples d'approximations d'un nombre réel.
- 431 Approximations du nombre  $\pi$ .

- 432 Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.
- 433 Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes.
- 434 Exemples de calcul de primitives.
- 435 Exemples de variables aléatoires et applications.
- 436 Exemples de problèmes de dénombrement.
- 437 Exemples de calculs de la norme d'une application linéaire continue.
- 438 Exemples de calculs de la longueur d'un arc de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- 439 Exemples de systèmes différentiels linéaires  $Y' = AY$  à coefficients réels constants en dimension 2. Allure des trajectoires.

## 5.2 La première épreuve orale

Cette épreuve comprend trois parties : le plan, le développement, puis les questions du jury. Chacune dure un quart d'heure. Elle est précédée d'une préparation de trois heures. Avant de faire des commentaires spécifiques à chacune des phases de l'épreuve, commençons par des remarques d'ordre général.

Il est conseillé de bien lire et comprendre le sujet. Il vaut mieux éviter de se disperser en cherchant dans un trop grand nombre d'ouvrages. Il faut bien sûr maîtriser les résultats du programme de l'agrégation correspondant au sujet traité, mais si un candidat, pour une application ou une comparaison de méthodes, évoque d'autres outils du programme, il est nécessaire qu'il les connaisse aussi.

Les deux premières parties de l'épreuve : plan et exposé se déroulent sans interruption, les questions ne débutent qu'ensuite et portent en premier lieu sur ce qui vient d'être présenté. Ce mode de fonctionnement impose au candidat de faire tenir l'intégralité de son plan et de son développement sur le tableau (recto verso). Il y a bien assez de place à condition de gérer correctement le tableau.

### Le plan

En voici le principe : en quinze minutes, il s'agit de faire un exposé structuré sur le sujet choisi : définitions, énoncés clairs et précis, exemples, contre exemples, applications... Cela doit ressembler à un cours magistral dans lequel on ne présente toutefois aucune démonstration. Il doit être conforme au programme de l'agrégation interne.

Le candidat n'est pas obligé d'être exhaustif sur le sujet, mais il est souhaitable qu'il puisse expliquer ses choix. Le jury attend avant tout un exposé logique avec des énoncés complets et exacts, des définitions et théorèmes (qu'il ne faut pas confondre) et une présentation rendue attrayante par l'intérêt porté par le candidat au sujet, par de nombreux exemples et quelques figures. Mais il est important aussi de montrer que l'on a compris l'utilité et la portée du chapitre en donnant des applications, surtout si le titre de la leçon le demande explicitement.

Le candidat doit gérer l'espace, le tableau, et la durée de quinze minutes. Beaucoup de candidats restent dix minutes sur des généralités avant de « bâcler au sprint » les résultats importants ou les applications. Les abréviations sont tolérées, on peut s'abstenir d'écrire quelques résultats proches d'autres résultats déjà mentionnés, mais les propositions et les définitions doivent être intégralement écrites au tableau « prêtes à être apprises par des élèves ». L'énoncé oral des prérequis est possible ; en modérer la longueur.

Le candidat peut consulter ses notes personnelles en cours d'exposé mais ne peut se contenter de les recopier !

Il termine son exposé en indiquant le point qu'il se propose de développer dans la deuxième partie. Il est déconseillé d'attendre ce moment pour prendre une décision et de montrer aux examinateurs des hésitations sur ce choix

Le plan, comme le développement, ne peuvent se limiter à un compte rendu de lecture d'un ouvrage, si bon que soit cet ouvrage. C'est ainsi qu'il est fortement déconseillé aux candidats de se servir d'ouvrages se présentant comme des recueils de leçons modèles à l'usage des concours. Les examinateurs sont rarement dupes et arrivent, notamment lors des questions au candidat, à vérifier les connaissances du candidat et sa compréhension réelle du sujet.

Par ailleurs, le jury est plus indulgent pour un plan de niveau mathématique modeste, mais bien maîtrisé, que pour un exposé plus ambitieux que le candidat récite par cœur sans en avoir compris les articulations.

### Le développement

Le candidat a le choix de développer une démonstration, un exemple ou une application. Ce choix doit être consistant, cohérent avec le niveau de l'exposé et pouvoir être présenté en quinze minutes. Il doit