Algèbre et Géométrie   Complément 11-10-06   Marcel Morales

E désignera un $K-$espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E.
Pour tout $u, v \in \mathrm{End}_K(E)$ on définit le crochet de Lie

$$[u, v] = u \circ v - v \circ u,$$

vérifier que le crochet de Lie $[\ ,\ ] : \mathrm{End}_K(E) \times \mathrm{End}_K(E) \longrightarrow \mathrm{End}_K(E)$, définit une application bilinéaire et antisymétrique et satisfait la relation:

$$[u, [v, w]] + [[v, w], u] + [[w, v], u] = 0 \forall u, v, w \in \mathrm{End}_K(E) .$$

Réponse : Simple vérification:
Pour tout $u \in \mathrm{End}_K(E)$ on pose $ad_u : \mathrm{End}_K(E) \longrightarrow \mathrm{End}_K(E)$, le morphisme défini par $ad_u(v) = [u, v]$

1. Démontrer que

$$\forall p \in I\!N\ (ad_u)^p(v) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k u^k \circ v \circ u^{p-k}$$

Réponse : La preuve se fait par récurrence sur p. On aura à utiliser que

$$C_p^{k-1} + C_p^k = C_{p+1}^k$$

pour $1 \le k \le p$.

2. Démontrer que si u est nilpotent alors ad_u l'est aussi.

Réponse : Supposons $u^s = 0$ alors on utilisant la formule démontrée au 1. on a que $(ad_u)^{2s}(v) = 0$ pour tout $v\imath E$, car si $0 \le k \le s$ alors $2s - k \ge s$ et $u^{2s-k} = 0$; si $2s \ge k > s$ alors $u^k = 0$.

3. Démontrer que si u est diagonalisable alors ad_u l'est aussi.

Réponse : Soit $e_1, ..., e_n$ une base de E dans laquelle u est diagonalisable, avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Soit $v_{i,j} \in \mathrm{End}_K(E)$ pour $i, j = 1, ..., n$, défini par $v_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$. Vérifier que l'ensemble $v_{i,j}$ pour $i, j = 1, ..., n$ est une base de $\mathrm{End}_K(E)$. D'autre part nous avons:

$$ad_u(v_{i,j})(e_k) = u \circ v_{i,j}(e_k) - v_{i,j} \circ u(e_k) = u(\delta_{j,k} e_i) - v_{i,j}(\lambda_k e_k)$$
$$= \delta_{j,k} \lambda_i e_i - \lambda_k \delta_{j,k} e_i = (\lambda_i - \lambda_k)\delta_{j,k} e_i = (\lambda_i - \lambda_j)\delta_{j,k} e_i (\lambda_i - \lambda_j) v_{i,j}(e_k)$$

pour tout $k = 1, ..., n$. d'où en particulier:

$$ad_u(v_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j) v_{i,j},$$

pour tout $i, j = 1, ..., n$, donc $v_{i,j}$, est un vecteur propre de ad_u pour la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$, ce qui montre que ad_u est diagonalisable.

A partir de maintenant on suppose que $K = \mathbb{C}$.

4. Démontrer que si $u = d+n$ est la décomposition de Dunford de u alors $ad_u = ad_d + ad_n$ est la décomposition de Dunford de ad_u

Réponse : Soit $u = d + n$ la décomposition de Dunford de u, avec d diagonalisable, n nilpotente et $d \circ n = n \circ d$. Il est facile de vérifier que $ad_u = ad_d + ad_n$, et d'après les questions 2. et 3. ad_d est diagonalisable et ad_n est nilpotente. Il reste à démontrer que $ad_d \circ ad_n = ad_n \circ ad_d$, or $d \circ n = n \circ d$ donc

$$ad_d \circ ad_n(v) = ad_d(n \circ v - v \circ n) = d \circ (n \circ v - v \circ n) - (n \circ v - v \circ n) \circ d$$

$$= d \circ n \circ v - d \circ v \circ n - n \circ v \circ d + v \circ n \circ d = n \circ d \circ v - n \circ v \circ d - d \circ v \circ n + v \circ d \circ n = ad_n \circ ad_d(v).$$

5. On considère une sous $K-$ algèbre $A \subset \mathrm{End}_K(E)$, tel que tous ses élements sont diagonalisables.

a) Montrer que si $u \in A$ et λ est une valeur propre non nulle de ad_u et v un vecteur propre pour λ, alors

$$\forall p \in I\!N^*, u \circ v^p - v^p \circ u = p\lambda v^p.$$

En déduire que v est nilpotent.

Réponse : La relation
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, u \circ v^p - v^p \circ u = p\lambda v^p,$$
se démontre facilement par récurrence sur p, et se traduit par $ad_u(v^p) = p\lambda v^p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. Si $v^p \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ alors v^p est un vecteur propre de ad_u pour la valeur propre non nulle $p\lambda$, ad_u a donc une infinité de valeurs propres, ce qui est absurde. Donc $v^p = 0$ pour un entier $p \geq 2$.

b) Soit h la restriction de ad_u à A. Montrer h a une seule valeur propre $\lambda = 0$. En déduire que h est nilpotente.

Réponse : Remarquons que si $u, v \in A$ alors $u \circ v - v \circ u \in A$, car A est une algèbre, donc h es un endomorphisme de A. Soit λ une valeur propre pour h, qui existe car nous travaillons sur $\mathbb{C}$ et soit $v \in A$ un vecteur propre (non nul) de h pour λ.

- Si $\lambda \neq 0$ alors d'après la question précédente v est nilpotente, et diagonalisable car par hypothèse tous les éléments de A sont diagonalisables. Le seul endomorphisme diagonalisable et nilpotent est le morphisme nul, ce qui implique $v = 0$, ce qui est absurde.
- Donc $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de h, ce qui implique que son polynôme minimal est de la forme X^p, i.e. h est nilpotent.

c) Montrer que $h = 0$, i.e. A est commutative.

Réponse : Puisque A est globalement invariant par ad_u, et que ad_u est diagonalisable alors h est diagonalisable, par la question précédente h est nilpotent, donc forcément $h = 0$, ce qui prouve que A est commutative.

6. Fixons une base B de E. Montrer que l'application $ad : v \mapsto ad_v$ est continue. et que l'application déterminant $\Delta : \mathrm{End}_K(E) \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application continue. En déduire que pour tout entier $r \leq n^2$ l'application $\Delta_r \circ ad$ est continue, où Δ_r est un mineur d'ordre r fixé.

   Réponse : Toute application linéaire ϕ entre deux espaces vectoriels de dimensions s et t est continue : par le choix des bases, une application linéaire est donnée par :
$$\phi : (x_1, ..., x_s) \longmapsto (L_1(x_1, ..., x_s), ..., L_t(x_1, ..., x_s))$$
   où $L_1, ..., L_t$ sont des formes linéaires.

   Par le choix d'une base le déterminant d'un endomorphisme est un fonction polynomiale, elle est donc continue. Il en est de même de tout mineur d'ordre r fixé. Il en suit que $\Delta_r \circ ad$ est continue.

7. Soit $(u_n), n \in \mathbb{N}$ une suite d'endomorphismes que converge vers u, et r le rang de ad_u, montrer qu'il existe un entier p_0 tel que si $p > p_0$ alors le rang de ad_{u_p} est supérieur ou égal à r.

   Réponse : Fixons une base de E, donc une base de $\mathrm{End}_K(E)$; puisque l'application $u \mapsto ad_u$ est continue, la suite ad_{u_n} converge vers ad_u, et puisque $\Delta_r \circ ad$ est continue la suite $\Delta_r(ad_{u_n})$ converge vers $\Delta_r(ad_u)$, qui est non nul, il en suit que il existe un entier p_0 tel que si $p > p_0$ alors $\Delta_r(ad_{u_p})$ est non nul, ce qui assure que le rang de ad_{u_p} est supérieur ou égal à r.