Exercices d'Algèbre et Géométrie Marcel Morales

Pour le 28-09-05 et le 12-10-05

Dualité et théorème de Jordan.

E désignera un $K-$espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. $E^* = \mathcal{L}(E,K)$ le dual de E

1) Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E, montrer que les formes linéaires $\{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$ définies par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout i, j, est une base de E^*.

Solution : lin. ind simplement ecrire, pour montrer que c'est une famille génératrice, soit $\varphi \in E^*$ et $\varphi(e_i) = a_i$, vérifier que $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i e_i^*$.

2) Reciproquement, soit $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ une base de E^*, montrer qu'il existe $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ une base de E tel que $\varphi_i = v_i^*$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Solution : Soit $T : E \longrightarrow E^{**}$ définie par $x \mapsto T_x$, avec $T_x(\varphi) = \varphi(x)$. alors T est linéaire, injective, en effet si $T_x = T_y$ alors $\varphi(x) = \varphi(y) \forall \varphi$ en particulier pour $\varphi = e_i^*$ ce qui prouve $x = y$. Puisque E est de dimension finie, T est bijective et donc pour la base $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ de E^* il existe $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ une base de E tel que $\varphi_i^* = T_{v_i}$, ce qui revient à dire que $\varphi_i = v_i^*$.

3) Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel de E, on pose

$$F^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \varphi(v) = 0 \forall v \in F\}.$$

Montrer que

$$\dim F + \dim F^\perp = n.$$

Solution : Soit $\{v_1, v_2, ..., v_s\}$ une base de F et complétons-la à $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ une base de E. Considérons le morphisme $h : E^* \longrightarrow E^*$ $h(\varphi) = \sum_{i=1}^s \varphi(v_i) v_i^*$ Alors Ker $h = F^\perp$ et Imh est engendré par $\{v_1^*, v_2^*, ..., v_s^*\}$, famille libre, donc par le théoréme de la dimension $\dim F + \dim F^\perp = n$.

4) Soit $G \subset E^*$ un sous espace vectoriel de E^*, on pose

$$G^\perp = \{v \in E \mid \varphi(v) = 0 \forall \varphi \in G\}.$$

Montrer que

$$\dim G + \dim G^\perp = n.$$

Solution : voir 3).

5) Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme. On pose ${}^t u(\varphi)(v) = \varphi(u(v))$, vérifier que ${}^t u$ est un endomorphisme de E^*. Déterminer Ker ${}^t u$ et Im${}^t u$.

Solution : $\varphi \in \text{Ker } {}^t u \Leftrightarrow \forall v \in E \varphi(u(v)) = 0 \Leftrightarrow \varphi \in (\text{Im} u)^\perp$.

Appliquons ceci à ${}^t u$ à la place de u, en tenant en compte que par l'application T définie ci-dessus ${}^t({}^t u) = u$. (Vérifier que $T_u(v) =^t ({}^t u)(T_v)$.) On aura alors $v \in \text{Ker } u \Leftrightarrow v \in (\text{Im}^t u)^\perp$, i.e Ker $u = (\text{Im}^t u)^\perp$ et donc $(\text{Ker } u)^\perp = (\text{Im}^t u)$.

6) Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme, et $G \subset E^*$ un sous espace vectoriel de E^* stable par ${}^t u$, vérifier que $G^\perp$ est stable par u.

De même si et $F \subset E$ un sous espace vectoriel de E stable par u, vérifier que $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Solution : Soit $v \in G^\perp$ alors $\varphi(v) = 0 \forall \varphi \in G$, on aura alors $\varphi(u(v)) = ({}^t u(\varphi))(v) = 0$ donc $u(v) \in G^\perp$.

Idem pour F.

7) On suppose K algébriquement clos, par exemple $K = \mathbb{C}$, et $\mu_u(X) = (X-\lambda)^k$. Nous avons vu (en juin) que

Il existe $x \in E$ tel que $(u-\lambda I)^{k-1}(x) \neq 0$.

Que $x, (u-\lambda I)^1(x), \dots, (u-\lambda I)^{k-1}(x)$ sont linéairement independants.

Si V est le sous espace vectoriel engendré par $x, (u-\lambda I)^1(x), \dots, (u-\lambda I)^{k-1}(x)$, alors la matrice de $u_{|V}$ dans la base $x, (u-\lambda I)^1(x), \dots, (u-\lambda I)^{k-1}(x)$ peut s'écrire:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & & & \\ & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

et $m_u = m_{u|V}$ Montrer que $V = K[u](x)$.

Solution : l'ensemble

$$1, X-\lambda, (X-\lambda)^2, ..., X-\lambda)^m, ...$$

est une base du $K-$ espace vectoriel $K[X]$, donc $V \subset K[u](x)$. Si $v = P(u)(x)$, et $s = \deg P$, soit

$$P(X) = a_0 + a_1(X-\lambda) + a_2(X-\lambda)^2 + ... + a_s(X-\lambda)^s,$$

d'oú

$$P(u) = a_0 + a_1(u-\lambda I) + a_2(u-\lambda I)^2 + ... + a_s(u-\lambda I)^s.$$

Nous pouvons supposer que $s < k$ car $(u-\lambda I)^k = 0$, et nous avons $P(u)(x) \in V$.

8) Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(u^i(x)) = 0$ si $0 \leq i \leq k-2$ et $\varphi(u^{k-1}(x)) \neq 0$.

Solution : Vérifier que $x, u(x), ..., u^{k-1}(x)$ est une base de $K[u](x)$, la completer à une base de E, prendre la base duale. On pose $\varphi = (u^{k-1}(x))^*$.

9) Montrer que $K[{}^tu](\varphi) \subset E^*$ est un sous espace vectoriel de dimension k, stable par ${}^tu$. **Solution :** Nous savons que $u^k = \sum_{i=0}^{k-1} b_i u^i$, or ${}^t(u^k) = ({}^tu)^k$ et pour deux morphismes u, w de E nous avons :

$${}^t(uw) =^t w^t u,^t (u+w) =^t u +^t w.$$

Donc nous aurons $({}^tu)^k = \sum_{i=0}^{k-1} b_i({}^tu)^i$, en particulier

$$({}^tu)^k(\varphi) = \sum_{i=0}^{k-1} b_i({}^tu)^i(\varphi).$$

Reste à montrer que si $\sum_{i=0}^{k-1} a_i({}^tu)^i(\varphi) = 0$ alors $a_i = 0$ pour tout i, ce qui se fait en appliquant cette relation à x et en utilisant la définition de φ.

10) Montrer que $K[{}^tu](\varphi)^\perp$ est stable par u et que

$$E = K[u](x) \oplus K[{}^tu](\varphi)^\perp.$$

Solution : $K[{}^tu](\varphi)^\perp$ est stable par u par la question 6). d'autre part

$$\dim E = \dim K[u](x) + \dim K[{}^tu](\varphi)^\perp,$$

donc il reste à montrer que $K[u](x) \cap K[{}^tu](\varphi)^\perp = 0$. Prendre $y = \sum_{i=0}^{k-1} c_i u^i(x) \in K[{}^tu](\varphi)^\perp$ et montrer que $c_i = 0$ pour tout i.

11) Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$Mat(u, B) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}$$

où A_i est une matrice carrée $k_i \times k_i$, $k = k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_s$ et

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Solution : Nous avons que

$$E = K[u](x) \oplus K[{}^t u](\varphi)^\perp$$

et $K[{}^t u](\varphi)^\perp$ est stable par u, et $\dim K[{}^t u](\varphi)^\perp < \dim E$. Par récurrence sur la dimension de E il existe une base B_2 de $K[{}^t u](\varphi)^\perp$ tel que la matrice de la restriction $u\mid_{K[{}^t u](\varphi)^\perp}$ est du type voulu, et d'aprés la question 7) nous avons déjà vu que la matrice de $u\mid_V$ dans la base $B_1 = \{x, (u - \lambda I)^1(x), \ldots, (u - \lambda I)^{k-1}(x)\}$ est de la forme A_1, donc la matrice de u dans la base $B_1 \cup B_2$ est de la forme voulue.