

E désignera un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E
Rappels:

- Ne pas confondre F sev propre ($F \neq 0, F \neq E$), et sev propre de l'endomorphisme u .
- Lemme des noyaux: Si $P(X) = Q_1(X)Q_2(X)$ et $Q_1(X), Q_2(X)$ sont premiers entre eux alors

$$\text{Ker } P(u) = \text{Ker } Q_1(u) \oplus \text{Ker } Q_2(u)$$

En particulier si $\chi_u(X) = Q_1(X)Q_2(X)$ et $Q_1(X), Q_2(X)$ sont premiers entre eux alors

$$E = \text{Ker } Q_1(u) \oplus \text{Ker } Q_2(u)$$

et aussi $m_u(X) = m_1(X)m_2(X)$ et $m_1(X), m_2(X)$ sont premiers entre eux alors

$$E = \text{Ker } m_1(u) \oplus \text{Ker } m_2(u).$$

- On suppose $K =$ quelconque (preuve seulement si $K = \mathbb{C}$ ou $K = \mathbb{R}$). Alors u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et a toutes ses racines simples.
- On suppose $K =$ quelconque. Alors u est triangularisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.
- Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, plus précisément si $\chi_u(X) = p_1(X)^{n_1}p_2(X)^{n_2}\dots p_k(X)^{n_k}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $\chi_u(X)$ ($n_i > 0$ pour tout i) alors $m_u(X) = p_1(X)^{m_1}p_2(X)^{m_2}\dots p_k(X)^{m_k}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $m_u(X)$ avec $n_i \geq m_i > 0$ pour tout i .

- Si $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ alors $\chi_M(X) = \chi_{M_1}(X)\chi_{M_2}(X)$ et $m_M(X) = \text{ppcm}\{m_{M_1}(X), m_{M_2}(X)\}$

- Si $F \subset E$ est une sev stable par u alors $m_{u_1} \text{ divisem}_u$ où u_1 est la restriction de u à F .

En particulier si u est triangularisable alors u_1 est triangularisable. Si u est diagonalisable alors u_1 est diagonalisable

- Si u est un endomorphisme réel, par le choix d'une base, et la matrice M de u dans cette base on peut définir un morphisme complexe \tilde{u} ayant la même matrice M dans la base canonique de \mathbb{C}^n , d'où $\chi_u(X) = \chi_{\tilde{u}}(X)$ et $\mu_u(X) = \mu_{\tilde{u}}(X)$.
- Dans un ev euclidien, Si u est une isométrie et $u(F) \subset F$ alors $u(F^\perp) \subset F^\perp$ où F^\perp est l'orthogonal de F et aussi $F \oplus F^\perp = E$

3) Considérons l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique e_1, e_2, e_3, e_4 , u l'endomorphisme défini par la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

où $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- a) Montrer que u est une isométrie. Calculer le polynôme caractéristique de u , ses valeurs propres, ses vecteurs propres.

Solution: La base canonique est une BON donc il suffira de vérifier que son image par u est une BON, or l'image de la base canonique est donnée par les vecteurs colonnes de la matrice M , on vérifie rapidement qu'ils forment une BON.

Nous avons $\chi_u(X) = (X^2 - 2 \cos \theta X + 1)(X^2 - 2 \cos \gamma X + 1)$ Le polynôme $X^2 - 2 \cos \theta X + 1$ a des racines dans \mathbb{R} si et seulement si $-4 \sin^2 \theta \geq 0$ i.e. si $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Si $\theta = 0$ nous avons la racine 1, si $\theta = \pi$ nous avons la racine -1. Il y a 4 cas à détailler que nous laissons au lecteur.

b) On suppose que $\theta = \gamma \neq 0 \pmod{\pi}$. Montrer que $u^2 - 2 \cos \theta u + I = 0$.

Solution: Dans ce cas $M = \begin{pmatrix} M_\theta & 0 \\ 0 & M_\theta \end{pmatrix}$, avec

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique est $\chi_{M_\theta}(X) = X^2 - 2 \cos \theta X + 1$, comme ce polynôme n'a pas de racines réelles il coïncide avec le polynôme minimal, d'où $m_u = X^2 - 2 \cos \theta X + 1$. (cf rappel) et u n'a pas de valeurs propres réelles. et on a $u^2 - 2 \cos \theta u + I = 0$.

b-1) Soit $x \in E, x \neq 0$. Montrer que l'espace vectoriel engendré par $x, u(x)$ est de dimension 2 globalement invariant par u .

Solution: La relation $u^2 - 2 \cos \theta u + I = 0$ implique que cet sev est stable par u , il est de dimension deux car sinon x serait un vecteur propre de u .

b-2) Montrer que tout sous espace vectoriel propre de E globalement invariant par u , est de dimension 2 et de la forme décrite à la question précédente.

Solution: Soit $F \subset E$ un sev propre stable par u ,

alors $\dim F = 1, 2$ ou 3 , Si $\dim F = 1$ alors F contient un vecteur propre pour u , ce qui est absurde. Si $\dim F = 3$ alors puisque u est une isométrie $u(F^\perp) \subset F^\perp$ où F^\perp est l'orthogonal de F et $\dim F^\perp = 1$, contradiction, donc $\dim F = 2$. Soit maintenant $x \in F$ non nul, et on procède comme à la question précédente.

c) On suppose que $\theta \neq \gamma, \theta, \gamma \neq 0 \pmod{\pi}$. On pose $Q_1(u) = u^2 - 2 \cos \theta u + I$ et $Q_2(u) = u^2 - 2 \cos \gamma u + I$.

c-1) Montrer que $e_1, e_2 \in \text{Ker } Q_1(u), e_3, e_4 \in \text{Ker } Q_2(u)$

Solution: Dans ce cas $M = \begin{pmatrix} M_\theta & 0 \\ 0 & M_\gamma \end{pmatrix}$, avec $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (resp. pour M_γ) et son polynôme caractéristique est $\chi_M(X) = \chi_{M_\theta}(X)\chi_{M_\gamma}(X) = Q_1(X)Q_2(X)$, comme c'est une décomposition en polynômes irréductibles nous avons $m_u = \chi_M(X)$. et u n'a pas de valeurs propres réelles. En particulier $Q_1(M_\theta) = 0, Q_2(M_\gamma) = 0$, qui répond à la question.

c-2) Montrer que tout sous espace vectoriel propre de E globalement invariant par u , est soit $\text{Ker } Q_1(u)$ ou $\text{Ker } Q_2(u)$.

Attention La solution donnée en cours était incomplète, cherchez l'erreur!

Solution: Soit $F \subset E$ propre, stable par u , alors $m_{u_1} \text{ divisem}_u$ où u_1 est la restriction de u à F , donc $m_{u_1}(X) = Q_1(X)$ ou $m_{u_1}(X) = Q_2(X)$. Si $m_{u_1}(X) = Q_1(X)$ alors $Q_1(u_1) = 0$ ce qui signifie $F \subset \text{Ker } Q_1(u)$, $\dim F = 2$ donc forcément $F = \text{Ker } Q_1(u)$. De même si $m_{u_1}(X) = Q_2(X)$ alors $F = \text{Ker } Q_2(u)$.

4) Dans cet exercice $K = \mathbb{R}$, ou $K = \mathbb{C}$.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel α et un polynôme $P(X)$, avec $P(0) \neq 0$ tels que:

$$E = \text{Ker } u^\alpha \oplus \text{Ker } P(u)$$

Considérer les cas particuliers.

Solution: Un polynôme a la racine 0 ou pas, si 0 est une racine de χ_u avec la multiplicité α nous pouvons écrire $\chi_u(X) = X^\alpha P(X)$ avec $P(0) \neq 0$. Remarquez que si 0 n'est pas racine de $\chi_u(X)$ alors u est injective, et comme on est en dimension finie u est bijective. On trouve le résultat par le lemme des noyaux. De même si $\chi_u(X) = X^\alpha$ alors u est nilpotent.

- b) On pose $E_1 = \text{Ker } u^\alpha$ et u_1 la restriction de u à E_1 . Justifier l'existence d'une base \mathcal{B}_1 de E_1 tel que la matrice de u_1 dans la base \mathcal{B}_1 est triangulaire avec des zéros sur la diagonale, on note cette matrice M_1 .

Solution: Dans ce cas $\chi_{u_1}(X) = X^\alpha$, c'est un polynôme scindé ayant une seule racine 0, il est donc triangularisable sur K et il existe une base \mathcal{B}_1 de E_1 tel que la matrice de u_1 dans la base \mathcal{B}_1 est triangulaire avec des zéros sur la diagonale.

- c) Déterminer une base convenable de E , on pose M la matrice de u dans cette base et $n = \dim(E)$. Définir une application continue $\phi : K \rightarrow K^{n^2}$ tel que

$$\phi(0) = M, \phi(t) \in \text{GL}(n), \text{ pour tout } t \neq 0.$$

Solution: Soit \mathcal{B}_2 base de $\text{Ker } P(u)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Notons M_2 la matrice de $u|_{\text{Ker } P(u)}$ dans la base \mathcal{B}_2 . La matrice M de u dans la base \mathcal{B} sera $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$. Remarquez que $\chi_M(X) = X^r \chi_{M_2}(X)$ avec $r = \text{card } \mathcal{B}_1$, et comme M_2 est bijective $\chi_{M_2}(0) \neq 0$, il en suit que $r = \alpha$.

On pose

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} M_1 + tI_\alpha & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

Remarquez que ϕ est continue, $\det \phi(t) = t^\alpha \det M_2 \neq 0$ pour $t \neq 0$, et

$$\phi(0) = M, \phi(t) \in \text{GL}(n), \text{ pour tout } t \neq 0.$$

Si $\alpha = 0$, ϕ est constante.

- d) Montrer que $\text{GL}(E)$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$.

Solution: On prend u un endomorphisme non bijectif, d'après la question précédente il existe une application continue $\phi : K \rightarrow K^{n^2}$ tel que

$$\phi(0) = M, \phi(t) \in \text{GL}(n), \text{ pour tout } t \neq 0.$$

Par définition de la continuité, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|t| < \delta$ alors $\|\phi(t) - \phi(0)\| < \epsilon$, cela signifie que dans toute boule de centre u et de rayon ϵ il y a une infinité de morphismes bijectifs.

- 5) Endomorphismes normaux. Dans cet exercice $K = \mathbb{R}$, ou $K = \mathbb{C}$ et E est soit un espace hermitien ou un espace euclidien et u un endomorphisme de E . Pour fixer le problème nous supposons $K = \mathbb{C}$.

Rappelons que:

- L'adjoint u^* de u est l'unique morphisme tel que: $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$ et si B est une base orthonormée de E , alors $M_B(u^*) = {}^t \overline{M_B(u)}$.
- $(u + v)^* = u^* + v^*$, $(uv)^* = v^*u^*$ et $P(u)^* = P(u^*)$. $\chi_{u^*}(X) = \overline{\chi_u(X)}$ et $\lambda \in \text{Spec}(u) \iff \overline{\lambda} \in \text{Spec}(u^*)$.
- u est normal si et seulement si $uu^* = u^*u$.
- u est hermitien si et seulement si $u = u^*$.
- u est unitaire si et seulement si $uu^* = u^*u = I$.
- Si $uv = vu$ alors pour tous polynômes $P(X), Q(X)$ on a $P(u)Q(v) = Q(v)P(u)$. Si u est normal alors $P(u)$ est normal pour tout polynôme $P(X)$. De même si u est hermitien alors $P(u)$ est hermitien pour tout polynôme $P(X)$.

- a) Soit u un endomorphisme hermitien et $\mu_u = \prod_{i \in J} (X - \lambda_i)^{m_i}$ son polynôme minimal. On pose $m = \max_{i \in J} m_i$ et $q(X) = \prod_{i \in J} (X - \lambda_i)$

Montrer que

i) $q^m(u) = 0$ et $q^k(u)$ est hermitien pour tout entier naturel k ,

ii) $q(u) = 0$ par récurrence descendante,

iii) u est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont réelles.

aide: q est scindé et ses racines sont simples donc u est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres de u et E_1, \dots, E_s les espaces propres de u correspondants. Pour montrer que $\lambda_i \in \mathbb{R}$ prendre $x \in E_i$ non nul, alors $\langle \lambda_i x, x \rangle = \langle ux, x \rangle = \dots$

Pour avoir une base orthonormée de vecteurs propres il suffira de vérifier que si $x \in E_i$ et $y \in E_j$ avec $i \neq j$ alors $\langle x, y \rangle = 0$, or $u(x) = \lambda_i x, u(y) = \lambda_j y$ on aura:

$$\lambda_i \langle x, y \rangle = \lambda_j \langle x, y \rangle$$

d'où $\langle x, y \rangle = 0$.

- b) Considérons u, v deux endomorphismes de E . Montrer que si u, v sont diagonalisables et $uv = vu$ alors u et v diagonalisent simultanément. En particulier si u, v sont hermitiens ils diagonalisent simultanément sur une base orthonormée.

aide: Puisque u est diagonalisable E est somme directe de ses sous espaces propres pour u , montrer que si E_i est un sev propre de u correspondant à la valeur propre λ_i alors E_i est stable par v . En effet soit $x \in E_i$ alors $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda_i v(x)$ donc $v(x) \in E_i$. Et la restriction de v à E_i est diagonalisable. Pour terminer on diagonalise v sur chaque espace propre de u , et on aura diagonalisé v sur E . A compléter dans le cas orthonormé.

- c) Soit u normal on pose

$$u_1 = \frac{u + u^*}{2}, u_2 = \frac{u - u^*}{2i}$$

Montrer que u_1, u_2 sont hermitiens, $u_1 u_2 = u_2 u_1$ et $u = u_1 + i u_2$. Conclure que u est diagonalisable. Traiter les cas particuliers où $M_B u$ est symétrique ou antisymétrique.

aide: c'est une vérification, utiliser la question précédente.

Conséquence importante (cas $K = \mathbb{C}$): u est normal si et seulement si u se diagonalise dans une BON.

- d) Traiter les questions précédentes dans le cas $K = \mathbb{R}$.

aide: Dans le cas réel, l'analogue d'endomorphisme hermitien est un endomorphisme symétrique, sa matrice M est symétrique dans une base orthonormée. Soit l'endomorphisme $\tilde{u} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par M alors il est clair que \tilde{u} est hermitien et donc son polynôme minimal est scindé, toutes ses racines sont réelles de multiplicité 1, or $m_u(X) = m_{\tilde{u}}(X)$, ce qui prouve que u est diagonalisable (sur \mathbb{R}), pour montrer que les espaces propres sont orthogonaux entre eux on répète la démonstration donnée en a).

aide: Dans le cas réel, si u est normal par complexification de u , on montre que \tilde{u} est normal et donc son polynôme minimal est scindé, toutes ses racines sont de multiplicité 1, si $\tilde{u}(x) = \lambda x$, λ est non réel, et $\tilde{u}(\bar{x}) = \bar{\lambda} \bar{x}$ alors $y_1 = (x + \bar{x})/2, y_2 = (x - \bar{x})/(2i)$ sont un vecteur réels non nuls orthogonaux et $u(y_1) = a y_1 - b y_2, u(y_2) = b y_1 + a y_2$ avec $\lambda = a + ib$. Donc la matrice de u dans une BON par des blocs de taille ≤ 2 . chaque bloc de taille deux étant de la forme:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } \lambda = a + ib \in \text{Spec}(\tilde{u})$$

e) ici $K = \mathbb{C}$. Montrer que si u est normal alors $u^* = P(u)$, où P est un polynôme.

aide: Indication utiliser le polynôme de Lagrange P tel que $P(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$. et faire un calcul matriciel par blocs.

f) ici $K = \mathbb{C}$. Montrer que si u est unitaire alors u est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres ont module 1.

aide: Si u est unitaire, alors u est normal, reste à vérifier que ses valeurs propres ont module 1.

g) ($K = \mathbb{R}$) Montrer que si $u \in O(E)$ alors u est diagonalisable en blocs de taille ≤ 2 dans une base orthonormée. L'écrire.

aide: si $u \in O(E)$ alors u est unitaire. D'après la question d) u est diagonalisable en blocs de taille ≤ 2 dans une base orthonormée. et chaque bloc de taille 2 s'écrira

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ et } \lambda = \cos \theta + i \sin \theta \in \text{Spec}(\tilde{u})$$

g) ($K = \mathbb{R}$) Montrer que si $SO(E)$ est connexe par arcs et $O(E)$ a deux composantes connexes.

aide: Soit

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t\theta & \sin t\theta \\ -\sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix}$$

alors $M(0) = I$, et $M(1) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Utiliser la décomposition en blocs et la matrice $M(t)$ pour fabriquer un arc dans $SO(E)$ qui passe par u et par I .