Algèbre et Géométrie 27-09-06 et 11-10-06 Marcel Morales

E désignera un $K-$espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E
Rappels:

- Ne pas confondre F sev propre($F \neq 0, F \neq E$), et sev propre de l'endomorphisme u.
- Tout idéal de $K[X]$ est principal.
- Théorème de Bézout dans $K[X]$.
- $K[X]$ est un anneau intègre a factorisation unique.
- Si $P, Q \in K[X]$ alors $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

Théorème 0.1 *Si le polynôme caractéristique χ_u est scindé dans K alors u est triangularisable.*

Théorème 0.2 *Montrer dans le cas où χ_u est scindé dans K, que $\chi_u(u) = 0$.*

Théorème 0.3 *Lemme des noyaux: Si $P(X) = Q_1(X)Q_2(X)$ et $Q_1(X), Q_2(X)$ sont premiers entre eux alors*

$$\text{Ker } P(u) = \text{Ker } Q_1(u) \oplus \text{Ker } Q_2(u)$$

- L'ensemble $\{P \in K[X]\text{tel que } P(u) = 0\}$ est un idéal non nul de $K[X]$. Son générateur (unitaire) est appelé le polynôme minimal de u et noté μ_u.
- Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, plus précisement si $\chi_u(X) = p_1(X)^{n_1}p_2(X)^{n_2}...p_k(X)^{n_k}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $\chi_u(X)$ ($n_i > 0$ pour tout i) alors $\mu_u(X) = p_1(X)^{m_1}p_2(X)^{m_2}...p_k(X)^{m_k}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $\mu_u(X)$ avec $n_i \geq m_i > 0$ pour tout i.
- Si $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ alors $\chi_M(X) = \chi_{M_1}(X)\chi_{M_2}(X)$ et $\mu_M(X) = \text{ppcm}\{\mu_{M_1}(X), \mu_{M_2}(X)\}$
- Si $F \subset E$ est une sev stable par u alors μ_{u_1} divise μ_u oú u_1 est la restriction de u á F.

  En particulier si u est triangularisable alors u_1 est triangularisable. Si u est diagonalisable alors u_1 est diagonalisable
- Si u est un endomorphisme réel, par le choix d'une base, et la matrice M de u dans cette base on peut définir un morphisme complexe $\tilde{u}$ ayant la même matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, d'où $\chi_u(X) = \chi_{\tilde{u}}(X)$ et $\mu_u(X) = \mu_{\tilde{u}}(X)$.
- Dans un ev euclidien, Si u est une isométrie et $u(F) \subset F$ alors $u(F^\perp) \subset F^\perp$ oú $F^\perp$ est l'orthogonal de F et aussi $F \oplus F^\perp = E$
- Si $\chi_u(X) = Q_1(X)Q_2(X)$ et $Q_1(X), Q_2(X)$ sont premiers entre eux alors

  $$E = \text{Ker } Q_1(u) \oplus \text{Ker } Q_2(u),$$

  avec $u(\text{Ker } Q_1(u)) \subset \text{Ker } Q_1(u); u(\text{Ker } Q_2(u)) \subset \text{Ker } Q_2(u)$.
- Si $\mu_u(X) = m_1(X)m_2(X)$ et $m_1(X), m_2(X)$ sont premiers entre eux alors

  $$E = \text{Ker } m_1(u) \oplus \text{Ker } m_2(u),$$

  avec $u(\text{Ker } m_1(u)) \subset \text{Ker } m_1(u); u(\text{Ker } m_2(u)) \subset \text{Ker } m_2(u)$.

1)a) On suppose que $\mu_u(X) = X^k$.

b) Soit $K_i = \text{Ker } u^i$, démontrer que $K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_k = E$

c) Montrer par l'absurde que pour tout $1 \leq j < k$ on a $K_j \neq K_{j+1}$.

d) Soit $F_k \subset K_k$ tel que $K_k = K_{k-1} \oplus F_k$. On va démontrer par récurrence l'existence des sev $F_{k-j+1}, j = 1, ..., k$, tels que :

$(*)_j \quad K_{k-j+1} = K_{k-j} \oplus u^{j-1}(F_k) \oplus u^{j-2}(F_{k-1}) \oplus ... \oplus u(F_{k-j+2}) \oplus (F_{k-j+1})$

Supposons que l-on a défini $F_k \subset K_k, ..., F_{k-j+1} \subset K_{k-j+1}$ tels que nous ayons les égalités : $(*)_1, (*)_2, ..., (*)_j$.
Montrer que $K_{k-j-1} + u^j(F_k) + u^{j-1}(F_{k-1}) + ... + u(F_{k-j+1}) \subset K_{k-j}$

d-1) Montrer que $K_{k-j-1}+u^j(F_k)+u^{j-1}(F_{k-1})+...+u(F_{k-j+1})$ est une somme directe, i.e. supposons que nous ayons une égalité

$$w_{k-j-1}+\sum_{s=1}^{j}u^s(f_{k-j+s})=0$$

avec $w_{k-j-1}\in K_{k-j-1}$et pour $s=1,...,j,\ f_{k-j+s}\in F_{k-j+s}$. Montrer que chacun des termes dans cette somme est nul.

d-2) Définir F_{k-j}

d-3) Vérifier que l'application $u^s: F_{k-j}\longrightarrow u^s(F_{k-j})$ est un isomorphisme pour tout $1\leq s\leq k-j-1$. En particulier si $\{v_{j,1},...,v_{j,l_j}\}$ est une base de F_{k-j} alors $\{u^s(v_{j,1}),...,u^s(v_{j,l_j})\}$ est une base de $u^s(F_{k-j})$

d-4) On pose $E_j=F_{k-j}\oplus u(F_{k-j})\oplus...\oplus u^{k-j-1}(F_{k-j})$, montrer que $E=\oplus_{j=0}^{k-1}E_j$ et que $u(E_j)\subset E_j$, pour tout j.

d-5) Soit $E_{j,i}$ le sev engendré par $\{v_{j,1},u(v_{j,1}),...,u^{k-j-1}(v_{j,1})\}$, vérifier que $E=\oplus_{j=0}^{k-1}\oplus_{i=1}^{l_j}E_{j,i}$ et que $u(E_{j,i})\subset E_{j,i}$, pour tout j,i.

d-6) Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$Mat(u,B)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0\\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_s\end{pmatrix}$$

où A_i est une matrice carrée $k_i\times k_i,\ \ k=k_1\geq k_2\geq\ldots\geq k_s$ et

$$A_i=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{pmatrix}$$

2) On suppose que $\mu_u(X)=(X-\lambda)^k$. Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$Mat(u,B)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0\\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_s\end{pmatrix}$$

où A_i est une matrice carrée $k_i\times k_i,\ \ k=k_1\geq k_2\geq\ldots\geq k_s$ et

$$A_i=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

(Écriture en blocs de Jordan)

3) On suppose que le polynôme caractéristique χ_u est scindé dans K et que $n=\dim E=3$, écrire toutes les décompositions possibles en blocs de Jordan de u.

4) Dans cet exercice $K=\mathbb{R}$, ou $K=\mathbb{C}$.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel α et un polynôme $P(X)$, avec $P(0)\neq 0$ tels que:

$$E=\text{Ker }u^\alpha\oplus\text{Ker }P(u)$$

Considérer les cas particuliers.

Solution: Un polynôme a la racine 0 ou pas, si 0 est une racine de χ_u avec la multiplicité α nous pouvons écrire $\chi_u(X)=X^\alpha P(X)$ avec $P(0)\neq 0$. Remarquez que si 0 n'es pas racine de $\chi_u(X)$ alors u est injective, et comme on est en dimension finie u est bijective. On trouve le résultat par le lemme des noyaux. De même si $\chi_u(X)=X^\alpha$ alors u est nilpotent.

b) On pose $E_1 = \text{Ker } u^\alpha$ et u_1 la restriction de u à E_1. Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 tel que la matrice de u_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ est triangulaire avec des zéros sur la diagonale, on note cette matrice M_1.

Solution: Dans ce cas $\chi_{u_1}(X) = X^\alpha$, c'est un polynôme scindé ayant une seule racine 0, il est donc triangularisable sur K et il existe une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 tel que la matrice de u_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ est triangulaire avec des zéros sur la diagonale.

c) Déterminer une base convenable de E, on pose M la matrice de u dans cette base et $n = \dim\,(E)$. Définir une application continue $\phi : K \longrightarrow K^{n^2}$ tel que

$$\phi(0) = M, \phi(t) \in \mathrm{GL}(n), \text{pour tout } t \neq 0.$$

Solution: Soit $\mathcal{B}_2$ base de Ker $P(u)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Notons M_2 la matrice de $u\,|_{\text{Ker } P(u)}$ dans la base $\mathcal{B}_2$. La matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$ sera $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$. Remarquez que $\chi_M(X) = X^r \chi_{M_2}(X)$ avec $r = \text{card}\mathcal{B}_1$, et comme M_2 est bijective $\chi_{M_2}(0) \neq 0$, il en suit que $r = \alpha$.

On pose

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} M_1 + tI_\alpha & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

Remarquez que ϕ est continue, $\det \phi(t) = t^\alpha \det M_2 \neq 0$ pour $t \neq 0$, et

$$\phi(0) = M, \phi(t) \in \mathrm{GL}(n), \text{pour tout } t \neq 0.$$

Si $\alpha = 0$, ϕ est constante.

d) Montrer que $GL(E)$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$.

Solution: On prend u un endomorphisme non bijectif, d'aprés la question précédente il existe une application continue $\phi : K \longrightarrow K^{n^2}$ tel que

$$\phi(0) = M, \phi(t) \in \mathrm{GL}(n), \text{pour tout } t \neq 0.$$

Par définition de la continuité , pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $\mid t \mid < \delta$ alors $\parallel \phi(t) - \phi(0) \parallel < \epsilon$, cela signifie que dans toute boule de centre u et de rayon ϵ il y a une infinité de morphismes bijectifs.

5) Endomorphismes normaux. Dans cet exercice $K = \mathbb{R}$, ou $K = \mathbb{C}$ et E est soit un espace hermitien ou un espace euclidien et u un endomorphime de E. Pour fixer le problème nous supposerons $K = \mathbb{C}$.

Rappelons que:

- L'adjoint u^* de u est l'unique morphisme tel que: $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$ et si B est une base orthonormée de E, alors $M_B(u^*) =^t \overline{M_B(u)}$.
- $(u+v)^* = u^* + v^*$, $(uv)^* = v^*u^*$ et $P(u)^* = P(u^*)$. $\chi_{u^*}(X) = \chi_u\bar{(}X)$ et $\lambda \in Spec(u) \Longleftrightarrow \bar{\lambda} \in Spec(u^*)$.
- u est normal si et seulement si $uu^* = u^*u$.
- u est hermitien si et seulement si $u = u^*$.
- u est unitaire si et seulement si $uu^* = u^*u = I$.
- Si $uv = vu$ alors pour tous polynômes $P(X), Q(X)$ on a $P(u)Q(v) = Q(v)P(u)$. Si u est normal alors $P(u)$ est normal pour tout polynôme $P(X)$. De même si Si u est hermitien alors $P(u)$ est hermitien pour tout polynôme $P(X)$.

a) Soit u un endomorphisme hermitien et $\mu_u = \prod_{i\in J}(X - \lambda_i)^{m_i}$ son polynôme minimal. On pose $m = max_{i\in J} m_i$ et $q(X) = \prod_{i \in J}(X - \lambda_i)$

Montrer que

i) $q^m(u) = 0$ et $q^k(u)$ est hermitien pour tout entier naturel k,

ii) $q(u) = 0$ par récurrence descendante,

iii) u est diagonalisable dans une base orthonomée et ses valeurs propres sont réelles.

aide: q est scindé et ses racines sont simples donc u est diagonalisable. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_s$ les valeurs propres de u et $E_1, ..., E_s$ les espaces propres de u correspondants. Pour montrer que $\lambda_i \in \mathbb{R}$ prendre $x \in E_i$non nul, alors $\langle \lambda_i x, x\rangle = \langle ux, x\rangle = ...$

Pour avoir une base orthonormée de vecteurs propres il suffira de vérifier que si $x \in E_i$ et $y \in E_j$ avec $i \neq j$ alors $\langle x, y\rangle = 0$, or $u(x) = \lambda_i x, u(y) = \lambda_j y$ on aura:

$$\lambda_i\langle x, y\rangle = \lambda_j\langle x, y\rangle$$

d'où $\langle x, y\rangle = 0$.

b) Considérons u, v deux endomorphismes de E. Montrer que si u, v sont diagonalisables et $uv = vu$ alors u et v diagonalisent simultanément. En particulier si u, v sont hermitiens ils diagonalisent simultanément sur une base orthonormée.

aide: Puisque u est diagonalisable E est somme directe de ses sous espaces propres pour u, montrer que si E_i est un sev propre de u correspondant a la valeur propre λ_i alors E_i est stable par v. En effet soit $x \in E_i$ alors $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda_i v(x)$ donc $v(x) \in E_i$. Et la restriction de v à E_i est diagonalisable. Pour terminer on diagonalise v sur chaque espace propre de u,et on aura diagonalisé v sur E. A completer dans le cas orthonormé.

c) Soit u normal on pose

$$u_1 = \frac{u + u^*}{2}, u_2 = \frac{u - u^*}{2i}$$

Montrer que u_1, u_2 sont hermitiens, $u_1 u_2 = u_2 u_1$ et $u = u_1 + i u_2$. Conclure que u est diagonalisable. Traiter les cas particuliers o'ù $M_B u$ est symétrique ou antisymétrique.

aide: c'est une vérification , utiliser la question précedente.

Conséquence importante (cas $K = \mathbb{C}$): u est normal si et seulement si u se diagonalise dans une BON.

d) Traiter les questions précédentes dans le cas $K = \mathbb{R}$.

aide: Dans le cas réel, l'analogue d'endomorphisme hermitien est un endomorphisme symétrique, sa matrice M est symétrique dans une base orthonormée. Soit l'endomorphisme $\tilde{u} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par M alors il est clair que $\tilde{u}$ est hermitien et donc son polynôme minimal est scindé, toutes ses racines sont réelles de multiplicité 1, or $m_u(X) = m_{\tilde{u}}(X)$, ce qui prouve que u est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) , pour montrer que les espaces propres sont orthogonaux entre eux on repète la demonstration donnée en a).

aide: Dans le cas réel, si u est normal par complexification de u, on montre que $\tilde{u}$ est normal et donc son polynôme minimal est scindé, toutes ses racines sont de multiplicité 1, si $\tilde{u}(x) = \lambda x$, λ est non réel, et $\tilde{u}(\bar{x}) = \bar{\lambda}\bar{x}$ alors $y_1 = (x + \bar{x})/2, y_2 = (x - \bar{x})/(2i)$ sont un vecteur réels non nuls orthogonaux et $u(y_1) = a y_1 - b y_2, u(y_2) = b y_1 + a y_2$ avec $\lambda = a + ib$. Donc la matrice de u dans une BON par des blocs de taille ≤ 2. chauqe bloc de taille deux étant de la forme:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } \lambda = a + ib \in Spec(\tilde{u})$$

e) ici $K = \mathbb{C}$. Montrer que si u est normal alors $u^* = P(u)$, où P est un polynôme.

aide: Indication utiliser le polynôme de Lagrange P tel que $P(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$. et faire un calcul matriciel par blocs.

f) ici $K = \mathbb{C}$.Montrer que si u est unitaire alors u est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres ont module 1.

aide: Si u est unitaire, alors u est normal, reste à vérifier que ses valeurs propres ont module 1.

g) ($K = \mathbb{R}$) Montrer que si $u \in O(E)$ alors u est diagonalisable en blocs de taille ≤ 2 dans une base orthonormée. L'écrire.

aide: si $u \in O(E)$ alors u est unitaire. D'après la question d) u est diagonalisable en blocs de taille ≤ 2 dans une base orthonormée. et chaque bloc de taille 2 s'écrira

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } \lambda = \cos\theta + i\sin\theta \in Spec(\tilde{u})$$

g) ($K = \mathbb{R}$) Montrer que si $SO(E)$ est connexe par arcs et $O(E)$ a deux composantes connexes.

aide: Soit

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t\theta & \sin t\theta \\ -\sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix}$$

alors $M(0) = I$, et $M(1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Utiliser la décomposition en blocs et la matrice $M(t)$ pour fabriquer un arc dans $SO(E)$ qui passe par u et par I.