Algèbre et Géométrie 26-09-07 Marcel Morales

E désignera un $K-$espace vectoriel de dimension finie.
Rappels:

- Ne pas confondre F sev propre($F \neq 0, F \neq E$), et sev propre de l'endomorphisme u.
- Division euclidienne dans $K[X]$.
- Théorème de Bézout dans $K[X]$.
- $K[X]$ est un anneau intègre a factorisation unique.
- Tout idéal de $K[X]$ est principal.
- Décrire les éléments irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$
- Si $P, Q \in K[X]$ et u est un endomorphisme de E alors $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$, en particulier l'ensemble $\{P(u) \mid P \in K[X]\}$ est une sous algèbre commutative de $End_K(E)$, et pour tout polynôme $P(X)$ l'espace vectoriel $\ker(P(u))$ est invariant par u.

Théorème 0.1 *Lemme des noyaux: Si $P(X) = Q_1(X)Q_2(X)$ et $Q_1(X), Q_2(X)$ sont premiers entre eux alors*

$$\text{Ker } P(u) = \text{Ker } Q_1(u) \oplus \text{Ker } Q_2(u)$$

Théorème 0.2 *Le polynôme caractéristique χ_u est scindé dans K si et seulement si u est triangularisable.*

Indication: La preuve se fait par récurrence sur $n = \dim E$. Soit λ une racine du polynôme caractéristique,, alors $\dim(Im(u - \lambda I_E)) \leq n - 1$, soit F un sous e.v. de E contenant $Im(u - \lambda I_E)$ et tel que $\dim F = n - 1$. Vérifier que F est invariant par u, compléter à une base de$E$ et terminer la preuve.

Théorème 0.3 *Montrer dans le cas où χ_u est scindé dans K, que $\chi_u(u) = 0$.*

Indication: Nous pouvons supposer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de E tel que la matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure, i.e.

$$u(v_i) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{j,i} v_j$$

avec $\alpha_{i,i} = \lambda_i$ pour tout i Montrer par récurrence sur i que

$$(\sqcap_{j=1}^{i}(u - \lambda_i))(v_k) = 0, \forall k = 1, ..., i.$$

Théorème 0.4 *Si $K = \mathbb{C}$ alors tout endomorphisme de E est triangularisable et $\chi_u(u) = 0$.*
Si $K = \mathbb{R}$ alors $\chi_u(u) = 0$.

- L'ensemble $\{P \in K[X]$tel que $P(u) = 0\}$ est un idéal non nul de $K[X]$. Son générateur (unitaire) est appelé le polynôme minimal de u et noté μ_u.
- On suppose $K = \mathbb{C}$. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique,

  Indication: Démontrer que si λ est une racine de $\chi_u(X)$ alors $\mu_u(X)$ est divisible par $X - \lambda$.

  Conclure que si
  $\chi_u(X) = (X - \lambda_1)^{n_1}(X - \lambda_2)^{n_2}...(X - \lambda_k)^{n_k}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $\chi_u(X)$ ($m_i > 0$ pour tout i) alors $\mu_u(X) = (X - \lambda_1)^{m_1}(X - \lambda_2)^{m_2}...(X - \lambda_k)^{m_k}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $\mu_u(X)$ avec $m_i \leq n_i > 0$ pour tout i.
- Si $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ alors $\chi_M(X) = \chi_{M_1}(X)\chi_{M_2}(X)$ et $\mu_M(X) = \text{ppcm}\{\mu_{M_1}(X), \mu_{M_2}(X)\}$

Théorème 0.5 *Avec les notations ci-dessus, soit $F_i = \ker(u - \lambda_i)^{m_i}$, alors F_i est invariant par u et*

- $E = F_1 \oplus ... \oplus F_k$

- *Soit u_i la restriction de u à F_i alors, le polynôme minimal de u_i est $(X-\lambda_i)^{m_i}$ et le polynôme charactéristique de u_i est $(X-\lambda_i)^{n_i}$. En particulier $\dim(F_i)=n_i$ pour tout i.*

Théorème 0.6 *u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et μ_u a toutes ses racines simples.*

- Si $F \subset E$ est une sev stable par u alors μ_{u_1} divise μ_u oú u_1 est la restriction de u á F. En particulier si u est triangularisable alors u_1 est triangularisable. Si u est diagonalisable alors u_1 est diagonalisable
- Si u est un endomorphisme réel, par le choix d'une base, et la matrice M de u dans cette base on peut définir un morphisme complexe $\tilde{u}$ ayant la même matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, d'où $\chi_u(X)=\chi_{\tilde{u}}(X)$ et $\mu_u(X)=\mu_{\tilde{u}}(X)$. Les deux polynômes $\chi_u(X), \mu_u(X)$ sont à coefficients réels.
- Si $\chi_u(X)=Q_1(X)Q_2(X)$ et $Q_1(X), Q_2(X)$ sont premiers entre eux alors
$$E = \text{Ker } Q_1(u) \oplus \text{Ker } Q_2(u),$$
avec $u(\text{Ker } Q_1(u)) \subset \text{Ker } Q_1(u); u(\text{Ker } Q_2(u)) \subset \text{Ker } Q_2(u)$.
- Si $\mu_u(X)=m_1(X)m_2(X)$ et $m_1(X), m_2(X)$ sont premiers entre eux alors
$$E = \text{Ker } m_1(u) \oplus \text{Ker } m_2(u),$$
avec $u(\text{Ker } m_1(u)) \subset \text{Ker } m_1(u); u(\text{Ker } m_2(u)) \subset \text{Ker } m_2(u)$.

Un algorithme pour écrire la matrice de u en blocs de Jordan.

1)a) On suppose que $\mu_u(X)=X^k$ avec $k>0$.

b) Pour $i=1,...,k$ soit $K_i = \text{Ker } u^i$, démontrer que $0 \neq K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_k = E$

c) Montrer par l'absurde que pour tout $1 \leq j < k$ on a $K_j \neq K_{j+1}$.

Indication: Faire d'abord le cas $j=k-1$. Ensuite montrer que si $K_j = K_{j+1}$ pour un $j < k-1$ alors $K_j = K_{j+1} = ... = K_k$.

d) Soit $H_i \subset K_i$ tel que $K_i = K_{i-1} \oplus H_i$, montrer que pour tout $1 \leq s \leq i-1$ le morphisme restriction de u^s à H_i est injectif, que $u^s(H_i) \subset K_{i-s}$ mais $u^s(H_i) \cap K_{i-s-1} = 0$. De plus montrer que si $H_i = G_{i,1} \oplus ... \oplus G_{i,l}$ alors $u(H_i) = u(G_{i,1}) \oplus ... \oplus u(G_{i,l})$.

e) Soit $F_k \subset K_k$ tel que $K_k = K_{k-1} \oplus F_k$. Alors $u(F_k) \subset K_{k-1}$ et $u(F_k) \cap K_{k-2} = 0$, donc $K_{k-1} \supset K_{k-2} \oplus u(F_k)$. Soit F_{k-1} un sev tel que
$$K_{k-1} = K_{k-2} \oplus u(F_k) \oplus F_{k-1}.$$

Définir de façon similaire F_{k-2} puis par récurrence les sev $F_{k-j+1}, j=1,...,k$, tels que :

$(*)_j \quad K_{k-j+1} = K_{k-j} \oplus u^{j-1}(F_k) \oplus u^{j-2}(F_{k-1}) \oplus ... \oplus u(F_{k-j+2}) \oplus (F_{k-j+1})$.

Conclure que
$$E = (F_k \oplus u(F_k) \oplus ... \oplus u^{k-1}(F_k)) \oplus (F_{k-1} \oplus ... \oplus u^{k-2}(F_{k-1})) \oplus (F_{k-2} \oplus ... \oplus u^{k-3}(F_{k-2})) \oplus ... \oplus F_1.$$

On pose $E_j = F_{k-j} \oplus u(F_{k-j}) \oplus ... \oplus u^{k-j-1}(F_{k-j})$,

f-1) Si $\{v_{j,1}, ..., v_{j,l_j}\}$ est une base de F_{k-j} alors pour tout $1 \leq s \leq k-j-1$ $\{u^s(v_{j,1}), ..., u^s(v_{j,l_j})\}$ est une base de $u^s(F_{k-j})$

Pour $i=1,...,l_j$ soit $E_{j,i}$ le sev engendré par $\{v_{j,i}, u(v_{j,i}), ..., u^{k-j-1}(v_{j,i})\}$, vérifier que $E_{j,i}$ est invariant par u et que $E_j = \oplus_{i=1}^{l_j} E_{j,i}$. Ecrire la matrice de la restriction de u à $E_{j,i}$.

f-2) Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$Mat(u,B) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}$$

où A_i est une matrice carrée $k_i \times k_i$, $k = k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_s$ et

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) On suppose que $\mu_u(X) = (X-\lambda)^k$. Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$Mat(u,B) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}$$

où A_i est une matrice carrée $k_i \times k_i$, $k = k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_s$ et

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(Écriture en blocs de Jordan)

3)a) Exemple. Dans cet exemple $K = I\!R$, ou $K = \mathbb{C}$. Soit u un endomorphisme tel que $\mu_u(X) = X^2$, écrire la matrice de u sous forme de blcs de Jordan.

b) Exemple. Dans cet exemple $K = I\!R$, ou $K = \mathbb{C}$. Soit $u : K^4 \longrightarrow K^4$ défini dans la base canonique par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer χ_u, μ_u et montrer l'existence d'une base de K^4 dans laquelle u s'écrira:

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$