Algèbre et Géométrie Complément 11-10-06 Marcel Morales

E désignera un $K-$espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E.
Pour tout $u, v \in \mathrm{End}_K(E)$ on définit le crochet de Lie

$$[u, v] = u \circ v - v \circ u,$$

vérifier que le crochet de Lie $[\ ,\ ] : \mathrm{End}_K(E) \times \mathrm{End}_K(E) \longrightarrow \mathrm{End}_K(E)$, définit une application bilinéaire et antisymétrique et satisfait la relation:

$$[u, [v, w]] + [[v, w], u] + [[w, v], u] = 0 \forall u, v, w \in \mathrm{End}_K(E) .$$

Pour tout $u \in \mathrm{End}_K(E)$ on pose $ad_u : \mathrm{End}_K(E) \longrightarrow \mathrm{End}_K(E)$, le morphisme défini par $ad_u(v) = [u, v]$

1. Démontrer que
$$\forall p \in I\!N\ (ad_u)^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k u^k \circ v \circ u^{p-k}$$
2. Démontrer que si u est nilpotent alors ad_u l'est aussi.
3. Démontrer que si u est diagonalisable alors ad_u l'est aussi.
   A partir de maintenant on suppose que $K = \mathbb{C}$.
4. Démontrer que si $u = d+n$ est la décomposition de Dunford de u alors $ad_u = ad_d + ad_n$ est la décomposition de Dunford de ad_u
5. On considère une sous $K-$ algèbre $A \subset \mathrm{End}_K(E)$, tel que tous ses élements sont diagonalisables.
   a) Montrer que si $u \in A$ et λ est une valeur propre non nulle de ad_u et v un vecteur propre pour λ, alors
   $$\forall p \in I\!N^*, u \circ v^p - v^p \circ u = p\lambda v^p.$$
   En déduire que v est nilpotent.
   b) Soit h la restriction de ad_u à A. Montrer h a une seule valeur propre $\lambda = 0$. En déduire que h est nilpotente.
   c) Montrer que $h = 0$, i.e. A est commutative.
6. Fixons une base B de E. Montrer que l'application $ad : v \mapsto ad_v$ est continue. et que l'application déterminant $\Delta : \mathrm{End}_K(E) \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application continue. En déduire que pour tout entier $r \leq n^2$ l'application $\Delta_r \circ ad$ est continue, où Δ_r est un mineur d'ordre r fixé.
7. Soit $(u_n), n \in I\!N$ une suite d'endomorphismes que converge vers u, et r le rang de ad_u, montrer qu'il existe un entier p_0 tel que si $p > p_0$ alors le rang de ad_{u_p} est supérieur ou égal à r.