Marcel Morales Agrégation Interne Lyon, 10 juin 2009

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

II) Soit $V = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = \{X^2 - 3X + 1, X^2 + 3X - 4, 2X^2 + 2X - 4\}$. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de V et donner les coordonnées $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du polynôme $aX^2 + bX + c$ par rapport à $\mathcal{B}$.

III) Soit E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1; 1]$, à valeurs réelles, et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = f(0) + f'(0)$.

- Montrer que φ est une forme linéaire.
- On pose $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2$; montrer que $\mathcal{B} = \{f_0, f_1, f_2\}$ est une famille libre de E.
- On pose F le sous espace vectoriel engendré par $\{f_0, f_1, f_2\}$ et on note encore par φ la restriction de φ à F. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ et le noyau de φ.

IV) Dans $\mathbb{R}^5$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, 3, -2, 2, 3), v_2 = (1, 4, -3, 4, 2), v_3 = (2, 3, -1, -2, 9),$$

et $F = Vect\{v_1, v_2, v_3\}$.

- Déterminer la dimension de F.
- Déterminer trois formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ telles que $F = \ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2 \cap \ker \varphi_3$.
- Plus généralement, soit F un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension k, montrer que $F = \ker \varphi_1 \cap ... \cap \ker \varphi_{n-k}$ pour certaines formes linéaires, préciser.

V) a) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1),$$

vérifier qu'ils forment une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ duale de $\mathcal{E}$ dans la base canonique de $(\mathbb{R}^3)^*$.

b)Dans $\mathbb{R}^n$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 1, ..., 1), v_2 = (0, 1, 1, ..., 1), v_3 = (0, 0, 1, ..., 1), ..., v_n = (0, 0, 0, ..., 0, 1)$$

vérifier qu'ils forment une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^n$. Déterminer la base de $(\mathbb{R}^n)^*$ duale de $\mathcal{E}$ dans la base canonique de $(\mathbb{R}^n)^*$.

VI) Appliquer la réduction de Gauss, déterminer le rang, le noyau N_q et le cône isotrope $I_q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid q(x) = 0\}$ de la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$, par:

$$q(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_2x_3 + 4x_3^2.$$

Donner l'expression de la forme polaire φ de q. Déduire une base orthogonale pour φ.

VII) On note par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t\}$. Vérifier que $\dim E = 4$. On notera $\mathcal{B}$ la base ci-dessus. Déterminer les coordonnées de $\sin^2 t, \cos^2 t$ dans cette base.

Pour $P(t), Q(t) \in E$ on pose:

$$f(P(t), Q(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(t)\ Q(t)\ \cos t\ dt$$

1. Démontrer que f est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire, symétrique sur E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de E.
3. Déterminer le noyau et le rang de f
4. Ecrire la forme quadratique associée à f. Déterminer le cône isotrope $I(q)$ de q.
5. Soit $F = \mathbb{R}1$. Déterminer l'espace orthogonal $F^\perp$ par rapport à f. A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

VIII) Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2.

1. Montrer que $q(A) = \det(A)$ définit une forme quadratique sur $M_2(\mathbb{R})$. Donner sa forme polaire et sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le rang, la signature et le cône isotrope de q.
3. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ pour q du sous espace vectoriel $F = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid tr(A) = 0\}$. A-t-on $F \oplus F^\perp = E$.

IX) Soit A et B les points du plan de coordonnées $(1,0), (-1,0)$. Soit Δ la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A.

Déterminer l'équation des coniques passant par A et B qui sont tangentes à la droite Δ et coupent l'axe des ordonnées en deux points $C(0,c); D(0,d)$ d'ordonnées c, d vérifiant $cd = -1$. Discuter la nature de ces coniques.

X) Soit q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe $e_1' \in \mathbb{R}^2$, non nul, tel que $q(e_1') = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $e_2' \in \mathbb{R}^2$ pour lequel $q(e_2') = 0$ et $\{e_1', e_2'\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$, dans laquelle on a $q(x) = 2x_1'x_2'$, où (x_1', x_2') désigne les coordonnées de x dans cette base.

Soit q_0 définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par $q_0(x) = x_1^2 - x_2^2$. Illuster la question précédente sur q_0.

Déterminer la forme générale de la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, d'un endomorphisme orthogonal relativement à la forme quadratique q_0.

Démontrer que l'ensemble des endomorphismes orthogonaux relativement à q_0 est un groupe.

Illustrer ce groupe par un dessin.