Exercices d'Algèbre et Géométrie   Marcel Morales

Pour le 07-06-06 et le 14-06-06

K désignera un corps commutatif, E un $K-$espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ le dual de E

Rappels et résultats utiles dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappel : Un idéal $I \subset A$ d'un anneau commutatif A est un sous groupe additif, tel que pour tout $a \in A, x \in I$ on ait $ax \in I$.

Exemples :

- Si $A = \mathbb{Z}$ alors $I = n\mathbb{Z}$, plus généralement dans un anneau quelconque, un idéal de la forme $I = xA$ est un idéal principal.
- Dans $A = \mathbb{Z}[t]$ l'idéal engendré par 3 et t n'est pas principal.
- Tout idéal de $K[X]$ est principal.
- Théorème de Bezout dans $K[X]$.
- $K[X]$ est un anneau intègre à factorisation unique.

Exercices.

- Quel sont les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$?
- Montrer que tout sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit cyclique soit dense dans $\mathbb{R}$.
- Montrer que l'application $\varphi \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{S}^1$, définie par $\varphi(t) = e^{it}$ est un morphisme continu de groupes.
- Montrer que l'ensemble des points $(\cos n, \sin n), n \in \mathbb{Z}$ du plan est un ensemble dense du cercle $\mathcal{S}^1$. En déduire que l'ensemble $\{\cos n; n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans l'intervalle $[0; 1]$
- Vérifier que l'ensemble des racines $n-$ièmes de l'unité est un sous groupe de $\mathcal{S}^1$ de cardinal n.
- Montrer que pgcd $(t^n - 1, t^m - 1) = t^{\text{pgcd } (n,m)} - 1$ dans $\mathbb{C}[t]$; et dans $\mathbb{R}$?
  Donner une interprétation géométrique de ce résultat en utilisant des polygones réguliers.
  Donner une interprétation géométrique de ce résultat en utilisant le langage des groupes.

Groupes opérant sur un ensemble.

Définition 0.1 *Soit G un groupe et X un ensemble. On dit que G opère à gauche sur X, s'il y a une application*

$$\Phi : G \times X \longrightarrow X$$

$$(g, x) \longmapsto g \bullet x$$

tel que

- $\forall x \in X$ *:*$e \bullet x = x$*, où* e *est l'élément neutre de* G.
- $\forall x \in X$ *et* $\forall g, g' \in G$ *:* $g' \bullet (g \bullet x) = (g'g) \bullet x$

Cela revient à dire que il existe un morphisme de groupes

$$\Theta : G \longrightarrow S(X)$$

$$g \longrightarrow (x \to g \bullet x)$$

où $S(X)$ est le groupe symétrique de X, i.e. le groupe des toutes les bijections de X sur X.

Définition 0.2 *Orbite de x :* $G \bullet x = \{g \bullet x; g \in G\} \subset X$

Groupe d'isotropie de x : $G_x = \{g \in G; g \bullet x = x\}$

- *L'opération de G sur X est simple si* $G_x = \{e\}$, $\forall x \in X$.
- *L'opération de G sur X est transitive si* $G \bullet x = X$, $\forall x \in X$.
- *L'opération de G sur X est simplement transitive si* $\forall x, y \in X$ *il existe un unique* $g \in G$ *tel que* $g \bullet x = y$.

1) Action du tore $G = \mathbb{R}^*$ sur $X = \mathbb{R}^2$ $\lambda \bullet (x,y) = (\lambda x, \lambda^{-1} y)$. Déterminer les groupes d'isotropie G_p pour tout $p \in X$ et les orbites $G \bullet x$

2) Action du tore $G = \mathbb{C}^*$ sur $X = \mathbb{C}^2$ $\lambda \bullet (x,y) = (\lambda^3 x, \lambda^2 y)$. Déterminer les groupes d'isotropie G_p pour tout $p \in X$ et les orbites $G \bullet x$

3) Action du tore $G = \mathbb{C}^*$ sur $X = \mathbb{C}^2$ $\lambda \bullet (x,y) = (\lambda^n x, \lambda^m y)$. Déterminer les groupes d'isotropie G_p pour tout $p \in X$ et les orbites $G \bullet x$

4) Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension n, et $X = \mathcal{B}$, l'ensemble des bases (non ordonnées) de E. On note $G = GL(E)$ le groupe des applications vectorielles bijectives de E dans E. $GL(E)$ opère sur $\mathcal{B}$ de la façon suivante $f \bullet \{v_1, ..., v_n\} = \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$. Vérifier que cette opération est bien définie. Déterminer les groupes d'isotropie G_p pour tout $p \in X$ et les orbites $G \bullet x$.

5) On pose

$$O(2) = \{R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

Alors $G = O(2)$ opère sur $X = \mathbb{R}^2$ par multiplication à gauche. Déterminer les groupes d'isotropie G_p pour tout $p \in X$ et les orbites $G \bullet x$.

Espaces vectoriels, endomorphismes.

Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme de E dans E. Pour tout polynôme $P(X) \in K[X]; P(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_n$, on pose

$$P(u) = a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + ... + a_n I.$$

Théorème 0.3 *Théorème de Cayley Hamilton : pour $K = \mathbb{C}$ ou $K = \mathbb{R}$, soit $\chi_u(X) = \det(XI - U)$ alors $\chi_u(u) = O$*

1) Vérifier que si $P(X), Q(X) \in K[X]$ alors $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$

2) Fixons u. Vérifier que l'application $\varphi_u P(X) \longmapsto P(u)$ est un morphisme de l'anneau des polynômes dans l'anneau des endomorphismes de E, dont le noyau $\ker \varphi_u$ est un idéal non nul. On appelle polynôme minimal de u le générateur de $\ker \varphi_u$

3) Etude des isométries de $\mathbb{R}^3$. Soit u une isométrie de $\mathbb{R}^3$, i.e. une application linéaire tel que $\| u(v) \| = \| v \|$ pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$.

Montrer que le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ a au moins une racine réelle λ et que $| \lambda | = 1$.

4) Si $\det u > 0$ alors u a forcément une valeur propre égale à 1. Soit v_0 un vecteur propre pour u pour la valeur propre 1, alors $\mathbb{R}v_0$ est un axe de rotation, le plan P orthogonal à $\mathbb{R}v_0$ est globalement invariant par u et la restriction u_P est une isométrie du plan P. Ecrire la matrice de u dans une base orthonormée.

5) Si $\det u < 0$ alors u a forcément une valeur propre égale à -1. Soit v_0 un vecteur propre pour u pour la valeur propre -1, alors $\mathbb{R}v_0$ est globalement invariante par u, le plan P orthogonal à $\mathbb{R}v_0$ est globalement invariant par u et la restriction u_P est une isométrie du plan P. Ecrire la matrice de u dans une base orthonormée.

6) On considère la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Montrer que M est orthogonale, est-elle diagonalisable ?