Algèbre et Géométrie Marcel Morales 06-06-07

Dans ce problème on notera par $\mathbb{C}_\infty$ l'ensemble $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, $Gl(2,\mathbb{C})$ désignera le groupe des matrices inversibles 2×2 à coefficients complexes et $Sl(2,\mathbb{C})$ désignera le groupe des matrices inversibles 2×2 à coefficients complexes de déterminant 1. On définira de même les groupes $Gl(2,\mathbb{R}), Sl(2,\mathbb{R})$. A toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2,\mathbb{C})$ on lui associe une fonction (homographie) $f_M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \neq \infty \text{ ou } z \neq -d/c, \text{ si } c \neq 0 \\ \infty & \text{si } z = -d/c, \text{ et } c \neq 0 \\ a/c & \text{si } z = \infty \text{ et } c \neq 0 \\ \infty & \text{si } z = \infty \text{ et } c = 0 \end{cases}$$

On désignera par Γ l'ensemble

$$\Gamma = \{f_M \ \ /M \in Gl(2,\mathbb{C})\},$$

1. Vérifier que f_M est bijective et que son application réciproque est dans Γ.
2. Vérifier que $f_M = f_N$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $M = \lambda N$
3. Vérifier que $f_M \circ f_N = f_{MN}$, conclure que Γ est un groupe et que l'application $\Phi : M \mapsto f_M$ est un morphisme de groupes,
4. Déterminer $Ker\Phi$.
5. Soit $\Phi' : Sl(2,\mathbb{C}) \to \Gamma$, définie par la restriction de Φ à $Sl(2,\mathbb{C})$, vérifier que Φ' est surjective et déterminer $Ker\Phi'$.
6. (Générateurs de Γ) Montrer que tout élément de Γ peut être obtenu par composition des éléments suivants :
   - $z \mapsto az+b$, $a, b \in \mathbb{C}$.
   - $z \mapsto 1/z$.

   On pourra distinguer deux cas selon que $c = 0$ ou non. Si $c \neq 0$ faire la division euclidienne de $az+b$ par $cz+d$. Interpréter géométriquement ces applications.
7. Montrer que étant donné un ensemble $\{z_1, z_2, z_3\}$ de trois points distincts de $\mathbb{C}_\infty$, il existe une unique application $g \in \Gamma$ telle que $g(z_1) = \infty$, $g(z_2) = 0$, $g(z_3) = 1$.

   On pourra distinguer deux cas :
   - $\infty \notin \{z_1, z_2, z_3\}$. Démontrer que deux homographies coïncidant sur les trois points z_1, z_2, z_3 coïncident sur $\mathbb{C}_\infty$. Vérifier que $g(z) = (\dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2})\dfrac{z - z_2}{z - z_1}$, est vérifie les propriétés demandées.
   - $\infty \in \{z_1, z_2, z_3\}$, soit z_4 un quatrième point dans $\mathbb{C}_\infty$, et s définie par $s(z) = \dfrac{1}{z - z_4}$, vérifier que $\infty \notin \{s(z_1), s(z_2), s(z_3)\}$ et déterminer g.
8. Montrer que étant donné deux ensembles $\{z_1, z_2, z_3\}, \{w_1, w_2, w_3\}$ de trois points distincts de $\mathbb{C}_\infty$ il existe une unique homographie $f \in \Gamma$ telle que $f(z_i) = w_i$ pour $i = 1, 2, 3$.
9. (Birapport de quatre nombres complexes) Considérons quatre points (z_1, z_2, z_3, z_4) de $\mathbb{C}_\infty$, dont les trois points (z_1, z_2, z_3) sont distincts, d'après la question précédente il existe une unique homographie g telle que $g(z_1) = \infty$, $g(z_2) = 0$, $g(z_3) = 1$, on définit le birapport par : $[z_1, z_2, z_3, z_4] = g(z_4)$. On admettra les égalités suivantes (lorsque elles ont un sens) :

   $$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_2, z_1, z_3, z_4]^{-1} = [z_1, z_2, z_4, z_3]^{-1}, [z_1, z_2, z_3, z_4] + [z_1, z_3, z_2, z_4] = 1.$$

   - Démontrer que étant donnés deux ensembles $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}, \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ de quatre points distincts de $\mathbb{C}_\infty$, il existe une homographie $f \in \Gamma$ telle que $f(z_i) = w_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ si et seulement si $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$. Démontrer que dans ce cas f est unique.

   (Cercles dans $\mathbb{C}_\infty$) Les cercles dans $\mathbb{C}_\infty$ sont soient les cercles de rayon non nul dans $\mathbb{C}$ soient $L \cup \{\infty\}$ où L est une droite dans $\mathbb{C}$. Rappelons que un cercle dans $\mathbb{C}$ est déterminé par trois points distincts dans le cercle. De même une droite L dans $\mathbb{C}$ est déterminé par deux points.

En conclusion un cercle dans $\mathbb{C}_\infty$ est déterminé par la donnée de trois points. Nous rappelons aussi que un cercle est donnée par :

$$C = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0\},$$

avec $c \in \mathbb{R}$ et $\mid b \mid^2 - c > 0$, et les droites sont

$$C = \{z \in \mathbb{C} \ / \ bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0\},$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

10. Démontrer que l'image par une similitude d'un cercle dans $\mathbb{C}_\infty$ est un cercle dans $\mathbb{C}_\infty$.
11. Démontrer que l'image par l'inversion d'un cercle dans $\mathbb{C}_\infty$ est un cercle dans $\mathbb{C}_\infty$.
12. Démontrer que l'image par une homographie d'un cercle dans $\mathbb{C}_\infty$ est un cercle dans $\mathbb{C}_\infty$.
13. Démonter que quatre points distincts $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ sont sur un cercle dans $\mathbb{C}_\infty$ si et seulement si le birapport est un nombre réel.

II) Le plan hyperbolique : On notera

$$\mathcal{H}_2 = \{z \in \mathbb{C} \ \ / \ Imz > 0\}$$

Un point du plan hyperbolique est un point de $\mathcal{H}_2$, une droite hyperbolique est soit un demi-cercle contenu dans $\mathcal{H}_2$ de centre un nombre réel, ou l'intersection avec $\mathcal{H}_2$ d'une droite perpendiculaire à la droite d'équation $Imz = 0$. On dira que deux droites hyperboliques sont parallèles si leur intersection est vide,

1. démontrer que par deux points quelconques de $\mathcal{H}_2$, passe une et une seule droite hyperbolique
2. Donner un exemple pour montrer que le postulat d'Euclide est faux pour le plan hyperbolique : Par un point extérieur à une droite hyperbolique peuvent passer une infinité de droites hyperboliques parallèles à celle-ci.
3. On désignera par $\Gamma_{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\Gamma_{\mathbb{R}} = \{f_M \ \ /M \in Gl(2, \mathbb{R}), detM > 0\}$, montrer que si $f \in \Gamma_{\mathbb{R}}, z \in \mathcal{H}_2$ alors $f(z) \in \mathcal{H}_2$, et que $f(\mathcal{H}_2) = \mathcal{H}_2$.
4. Démontrer que si $f \in \Gamma_{\mathbb{R}}$ alors l'image d'une droite hyperbolique est une droite hyperbolique.
5. Distance hyperbolique.
   Soient z_1, z_2 deux points distincts de $\mathcal{H}_2$ et L l'unique droite hyperbolique les contenant.
   (a) Si L est une droite euclidienne d'équation $Re\ z = c$ on pose $v = a, u = \infty, z_1 = c+ia, z_2 = c + ib$. Alors on pose
   $$d_{\mathcal{H}_2}(z_1, z_2) = \mid \ln[u, v, z_1, z_2] \mid .$$
   Déterminer l'homographie g telle que $g(u) = \infty, g(v) = 0, g(z_1) = 1$, et montrer que
   $$d_{\mathcal{H}_2}(z_1, z_2) = \mid \ln(b/a) \mid .$$
   (b) Si L est un demi-cercle euclidien d'équation $\mid z - c \mid = r$ on pose $u = c - r, v = c + r, z_1 = c + re^{i\theta_1}, z_2 = c + re^{i\theta_2}$. Alors on pose
   $$d_{\mathcal{H}_2}(z_1, z_2) = \mid \ln[u, v, z_1, z_2] \mid .$$
   Déterminer l'homographie g telle que $g(u) = \infty, g(v) = 0, g(z_1) = 1$, et montrer que
   $$d_{\mathcal{H}_2}(z_1, z_2) = \mid \ln(\frac{\tan(\frac{\theta_2}{2})}{\tan(\frac{\theta_1}{2})}) \mid .$$
   Vérifier que $d_{\mathcal{H}_2}(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ et que $d_{\mathcal{H}_2}(z_1, z_2) = d_{\mathcal{H}_2}(z_1, z_2)$.
6. Démontrer que les homographies réelles (i.e. $f \in \Gamma_{\mathbb{R}}$) sont des isométries du plan hyperbolique.
7. Rotations de centre i.
   Soit $h(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$, démontrer que $g(\mathcal{H}) = \mathcal{D}$ le disque unitaire ouvert. Déterminer sa fonction réciproque h^{-1}. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mid \alpha \mid = 1$, notons par h_α la rotation de centre l'origine et d'angle α. On pose $\tilde{h}_\alpha = h^{-1} \circ h_\alpha \circ h$. Vérifier que $\tilde{h}_\alpha \in \Gamma_{\mathbb{R}}$.
   Expliquer pourquoi $\tilde{h}_\alpha$ est la rotation de centre i et d'angle α.
8. Dessiner un triangle hyperbolique équilatère, puis un quadrilatère régulier dans $\mathcal{H}$.