Marcel Morales Agrégation Interne Lyon, 4 juin 2008

I)) Déterminer le rang, le noyau N_q et le cône isotrope $I_q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid q(x) = 0\}$ de la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$, par:

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

II) Soient $a < b$ deux nombres réels, et E l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $[a; b]$. On pose

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

1. Montrer que $< \, , \, >$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit $H = \{f \in E \mid f(x) > 0, \forall x \in [a; b]\}$, pour $f \in H$ on pose

$$L(f) = \int_a^b f(x)dx \times \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx.$$

   Déterminer $\inf\{L(f);\ f \in H\}$. Pour quelles fonctions cette quantité est-elle atteinte. (Indication: utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

III) On note par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles à valeurs réelles de degré ≤ 3. Pour $P(t), Q(t) \in E$ on pose:

$$f(P(t), Q(t)) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)\ Q(t)\ t^2\ dt$$

1. Démontrer que f est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire, symétrique sur E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$ de E.
3. Montrer que f définit un produit scalaire sur E.
4. Ecrire la forme quadratique assocée à f
5. Utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour déterminer une base orthonormée de E à partir de la base $\mathcal{E}$.

IV) Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2.

1. Montrer que $q(A) = \det(A)$ définit une forme quadratique sur $M_2(\mathbb{R})$. Donner sa forme polaire et sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le rang, la signature et le cône isotrope de q.
3. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ pour q du sous espace vectoriel $F = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid tr(A) = 0\}$. A-t-on $F \oplus F^\perp = E$.

V) Indiquer pourquoi la matrice suivante A est diagonalisable et déterminer une BON dans laquelle elle est diagonale.

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

VI) Soit A et B les points du plan de coordonnées $(1,0),(0,1)$. Soit Δ la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A.

Déterminer l'équation des coniques passant par A et B qui sont tangentes à la droite Δ et coupent l'axe des ordonnées en deux points $C(0,c); D(0,d)$ d'ordonnées c,d vérifiant $cd=-1$. Discuter la nature de ces coniques.

VII) Soit q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe $e'_1 \in \mathbb{R}^2$, non nul, tel que $q(e'_1)=0$. Montrer qu'il existe un vecteur $e'_2 \in \mathbb{R}^2$ pour lequel $q(e'_2)=0$ et $\{e'_1, e'_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$, dans laquelle on a $q(x) = 2x'_1x'_2$, où (x'_1, x'_2) désigne les coordonnées de x dans cette base.

Soit q_0 définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par $q_0(x) = x_1^2 - x_2^2$. Illuster la question précédente sur q_0.

Déterminer la forme générale de la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, d'un endomorphisme orthogonal relativement à la forme quadratique q_0.

Démontrer que l'ensemble des endomorphismes orthogonaux relativement à q_0 est un groupe.

Illustrer ce groupe par un dessin.

VIII) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et l_1, l_2 deux formes linéiares non nulles sur E. On considère l'application $q: E \to \mathbb{R}$ définie par $q(x) = l_1(x)l_2(x)$.

Montrer que q est une forme quadratique sur E.

1. Si l_1 et l_2 sont linéairement dépendantes, montrer que $N_q = \ker L_1 = \ker L_2$. Déterminer le rang et la signature de q dans ce cas.

2. Si l_1 et l_2 sont linéairement indépendantes, montrer que $N_q = \ker L_1 \cap \ker L_2$. Déterminer le rang et la signature de q dans ce cas.

3. Si l_1 et l_2 sont linéairement indépendantes, montrer qu'il existe une base $\{e'_1, ..., e'_n\}$ de E pour laquelle $l_1(e'_j), l_2(e'_j) = 0$ pour tout $j = 3, ..., n$ et $l_1(e'_2) = 0, l_2(e'_1) = 0$. Déterminer la matrice de q dans cette base.

IX) On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$. soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est:

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Est-ce que f est une transformation orthogonale, est-ce une rotation?

Déterminer l'axe D, soit $P = D^{\perp}$, montrer que $f(P) = P$. Déterminer une BON directe $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\{e'_1, e'_2\}$ est une BON de P. Ecrire la matrice de f dans la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$.