Jean-Marie Monier, lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon

Agrégation interne de mathématiques

Leons d'analyse, type 2 : éléments de réflexion

Les leons suivantes ne sont pas renseignées :

24. Exemples de calculs d'aires et de volumes
29. Exemples d'équations différentielles simples issues des sciences expérimentales ou de l'économie
32. Approximations du nombre π
34. Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes
35. Exemples de modélisation probabiliste
36. Exemples de variables aléatoires et applications.

Mise à jour : octobre 2004

1. Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes

◇ **1.** Étudier la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0\,;+\infty[$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 7u_n}{2}} - 1.$$

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 3.14*c)*.

Exemple de suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Le comportement de la suite dépend de la position de u_0.

◇ **2.** Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. Montrer que l'existence de l'une des deux limites $\lim\limits_{n\infty} \sin n\alpha$, $\lim\limits_{n\infty} \cos n\alpha$ entraîne l'existence de l'autre, et que l'existence des deux entraîne une contradiction. Conclure.

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 3.6.

Exemple de suite divergente bornée. Utilisation de suites extraites.

◇ **3.** Déterminer la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini de :

$$\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}.$$

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 3.8 *d)*.

Utilisation de la moyenne de Césaro ou d'un théorème de sommation des relations de comparaison.

◇ **4.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites réelles définies par $(u_0, v_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \qquad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont la même limite que l'on déterminera.

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 3.12.

Exemple de deux suites réelles mixées.

◇ **5.** Étudier la convergence des trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3, u_0 \geqslant v_0 \geqslant w_0 > 0$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n} \\ \dfrac{1}{w_{n+1}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{w_n}\right). \end{cases}$$

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 3.2.8 *g).*

Exemple de trois suites réelles mixées. On montre la convergence, mais on ne détermine pas les limites.

◇ **6.** Étudier (convergence et limite) la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{nu_n - (n+1)}{(n+2)^2}.$$

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 3.4.5 *j).*

Exemple de suite réelle dans laquelle u_{n+1} dépend de u_n et de n.

◇ **7.** On considère la suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3 + \mathrm{i}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}(3u_n - \mathrm{i}\,\overline{u_n}).$$

Calculer le terme général u_n et étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 3.4.4 *b).*

Exemple de suite complexe faisant intervenir une conjugaison.

◇ **8.** Étudier la convergence de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0\,;1]$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin 2u_n.$$

Source : Cours Analyse MPSI ex. 3.4.6 *i).*

Exemple de suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$. La limite est point fixe d'une certaine application.

2. Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes

◊ **1.** Soient $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers x; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, où $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Démontrer $q_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, puis $|p_n| \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exemple de suites divergeant vers $+\infty$. Utilisation de suites extraites.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 3.3.6 ou Exercices Analyse MPSI ex. 3.7.

◊ **2.** Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. Montrer que l'existence de l'une des deux limites $\lim\limits_{n\infty} \sin n\alpha$, $\lim\limits_{n\infty} \cos n\alpha$ entraîne l'existence de l'autre, et que l'existence des deux entraîne une contradiction.

Exemple de suites divergentes bornées. Utilisation de suites extraites.

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 3.6.

◊ **3.** Étudier la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \int_0^1 |t - u_n|\,\mathrm{d}t.$$

Exemple de suite divergeant vers $+\infty$. Utilisation d'une minoration.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 3.4.6 *h)*.

◊ **4.** Étudier la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{6}{2 + u_n^2}.$$

Exemple de suite bornée ayant deux valeurs d'adhérence distinctes. Utilisation de suites extraites.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 3.4.7.

◇ **5.** Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} n^{-\operatorname{ch}\frac{1}{n}}$.

Exemple de série à temes positifs. Divergence par utilisation d'un équivalent.

Source : Exercices Analyse MP ex. 4.1 *c).*

◇ **6.** Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\big(\ln n + (-1)^n\big)^2}$.

Exemple de série à termes de signes variables. Utilisation d'un développement asymptotique.

Source : Cours Analyse MP ex 4.3.12 *o).*

◇ **7.** Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application injective. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Exemple de série à termes positifs. Divergence par minoration des sommes partielles.

Source : Exercices Analyse MP ex. 4.2.36.

3. Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence

◇ **1.** On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}.$$

a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

Source : Cours Analyse MPSI § 3.4.3 Exemple (1) et Complément C 3.1.

Convergence par décroissance et minoration. Recherche d'un équivalent par utilisation de la moyenne de Césaro ou d'un théorème de sommation de relations de comparaison.

◇ **2.** Étudier la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0\,;+\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2+8).$$

Source : Cours Analyse MPSI § 3.4.3 Exemple (3).

Exemple dans lequel le comportement de la suite dépend de u_0. Utilisation de la monotonie.

◇ **3.** Étudier la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}.$$

Source : Cours Analyse MPSI § 3.4.3 Exemple (4).

Exemple dans lequel la suite n'est pas monotone. Utilisation d'une majoration de type géométrique.

◇ **4.** Étudier la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0\,;+\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2}.$$

Source : Cours Analyse MPSI § 3.4.3 Exemple (5).

Convergence par examen des deux suites extraites d'indices pairs, d'indices impairs.

◇ **5.** Pour quel(s) $u_0 \in \mathbb{C}$ la suite vérifiant :

Suite périodique

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n}$$

est-elle définie? Montrer qu'alors elle est périodique.

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 3.4.2.

◇ **6.** Étudier la suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $0 < |u_0| < 1$ et :

Exemple de suite complexe convergeant vers 0 par majoration géométrique du module.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}.$$

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 3.4.3.

◇ **7.** On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et :

Suite divergente, sauf pour une valeur particulière de u_0.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4u_n - u_n^2.$$

Montrer que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est stationnaire.

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 3.4.4.

◇ **8.** On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 22$, $w_0 = 22$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Introduction d'une suite de matrices; calcul des puissances d'une matrice carrée par réduction de cette matrice.

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n). \end{cases}$$

Calculer u_n, v_n, w_n et étudier la convergence de ces trois suites.

Source : Cours Algèbre MP § 2.5.2 Exemple.

◇ **8.** Étudier la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $(u_1, u_2) \in]0\,;+\infty[^2$ et :

Exemple de suite pour laquelle u_{n+2} dépend de u_{n+1} et de u_n .

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = 1 + \frac{1}{4}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Source : Oral MP*−MP ex. 2.15.

4. Exemples d'étude de la convergence de séries numériques

◇ **1.** Déterminer la nature de la série numérique de terme général :

a) $\ln \dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}$ *b)* $(\ln n)^{-\sqrt{n}}$ *c)* $\left(\dfrac{n+3}{2n-1}\right)^{\ln n}$ *d)* $\dfrac{n^2}{\sqrt{(n-1)!}}$

e) $\operatorname{Arcsin} \dfrac{n+1}{2n+1} - \operatorname{Arcsin} \dfrac{n-1}{2n-1}$ *f)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Source : Cours Analyse MP ex. 4.2.1 *a), d), m), r'), h'), t').*

Exemples de séries numériques à termes réels positifs ou nuls. Majoration, minoration, utilisation d'un équivalent, règle $n^\alpha u_n$, règle de d'Alembert.

◇ **2.** *a)* Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un élément u_n de $\mathbb{R}_+^*$ unique tel que :

$$\int_{u_n}^1 \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t}\,\mathrm{d}t = n.$$

b) Montrer : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = n + \ln u_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et exprimer sa limite par une intégrale.

d) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$?

Source : Cours Analyse MP ex. 4.2.30.

Le terme général de la série est défini indirectement. Utilisation d'un équivalent.

◇ **3.** Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$, où $u_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)^2 u_{n+1} = (n+1)u_n + n.$$

Source : Cours Analyse MP ex. 4.3.5.

Le terme général de la série est défini par une relation du type $u_{n+1} = f(n, u_n)$.

◇ **4.** On note p_n le n-ème nombre premier ($p_1 = 2$). Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Source : Exercices Analyse MP ex. 4.9.

Série à termes réels positifs ou nuls. Divergence par minoration des sommes partielles.

◇ **5.** Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$.

Série alternée. Utilisation du TSCSA.

Source : Cours Analyse MP ex. 4.3.9 *a)*.

◇ **6.** On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}.$$

Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$?

Série alternée. Le terme général de la série est défini indirectement. Utilisation du TSCSA.

Source : Cours Analyse MP ex. 4.3.13.

◇ **7.** Déterminer, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$.

Série à termes réels de signe variable. Utilisation d'un développement asymptotique.

Source : Cours Analyse MP ex. 4.3.12 *z)*.

◇ **8.** Déterminer, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{n!a^n n^n}$.

Utilisation de la formule de Stirling.

Source : Cours Analyse MP ex. 4.3.14 *c)*.

◇ **9.** Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^\alpha}$.

Groupement de termes.

Source : Exercices Analyse MP ex. 4.15.

◇ **10.** Déterminer, pour $\alpha \in \,]0\,;+\infty[$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{\sin n}{n^\alpha}\right)$.

Utilisation du théorème d'Abel.

Source : Cours Analyse MP Complément C 4.7 *3) 4)*.

5. Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique

◊ **1.** Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos n\theta$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin n\theta$ pour $(x,\theta) \in]-1\,;1[\times\mathbb{R}$.

Série se ramenant à la série géométrique.

Source : Cours Analyse MP ex. 4.3.17 *a)*.

◊ **2.** Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$.

Série télescopique; utilisation d'une décomposition en éléments simples.

Source : Exercices Analyse MP ex. 4.3.2 *c)*.

◊ **3.** Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{a}{1+a^2n+a^2n^2}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Série télescopique; utilisation de formules de trigonométrie.

Source : Cours Analyse MP ex. 4.3.17 *i)*.

◊ **4.** Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$.

Série se ramenant à des séries connues.

Source : Exercices Analyse MP ex. 4.3.6 modifié.

◊ **5.** On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad n \not\equiv 0\ [3] \\ -\dfrac{2}{n} & \text{si} \quad n \equiv 0\ [3]. \end{cases}$$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Série se ramenant à l'étude d'une somme de Riemann.

Source : Exercices Analyse MP ex. 4.3.9.

◇ **6.** Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n-2)2^n}$.

Série se ramenant à une série entière en un point intérieur au disque de convergence.

Source : Exercices Analyse MP ex. 6.5.18 *b)*.

◇ **7.** Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

Série se ramenant à une série entière en un point du cercle d'incertitude.

Source : Exercices Analyse MP ex. 6.5.2.

◇ **8.** *a)* Montrer :

Série se ramenant à une intégrale par permutation série et intégrale.

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}.$$

b) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Source : Exercices Analyse MP ex. 6.5.15.

◇ **9.** Existence et calcul de :

Utilisation de séries de Fourier.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6},$$

en utilisant la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, telle que $f(t) = t(\pi - t)$ si $t \in [0\,;\pi]$.

Source : Exercices Analyse MP ex. 7.3.1 *f)*.

6. Exemples de comportement asymptotique de suites; rapidité de convergence ou de divergence

♢ **1.** Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Source : Oral MP*−MP ex. 6.3.

Recherche d'un équivalent du terme général d'une suite divergeant vers $+\infty$; intervention d'intégrales ou utilisation de la formule de Stirling.

♢ **2.** On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1>0$ et :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad u_{n+1}=\ln(1+nu_n).$$

Montrer : $u_n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$.

Source : Oral MP*−MP ex. 6.4.

Recherche d'un équivalent du terme général d'une suite divergeant vers $+\infty$; utilisation d'encadrements.

♢ **3.** Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, on note $f_n :]n\,;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall\, x\in]n\,;+\infty[,\quad f_n(x)=\frac{1}{2x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-k}.$$

Soit $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ fixé.

a) Montrer que l'équation $f_n(x)=\lambda$, d'inconnue $x\in]n\,;+\infty[$, admet une solution unique, notée x_n.

b) Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Source : Oral MP*−MP ex. 6.7

Recherche d'un équivalent d'une solution d'une équation avec paramètre.

♢ **4.** *a)* On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\dfrac{\mathrm{e}^{\,n}}{n}$. Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

b) On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$, et $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$. Former un développement asymptotique de u_n à deux termes, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Source : Oral MP*−MP ex. 10.10.

Développement asymptotique des sommes partielles d'une série dont le terme général tend assez vite vers l'infini. Utilisation de théorèmes de sommation des relations de comparaison.

◇ **5.** Soient $u_0 \in]0\,;+\infty[$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \alpha < \beta$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n \frac{1+\alpha u_n}{1+\beta u_n}.$$

Établir :

a) $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$

b) $u_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\beta-\alpha)n}$

c) $u_n = \dfrac{1}{(\beta-\alpha)n} + \dfrac{\alpha}{(\beta-\alpha)^2}\dfrac{\ln n}{n^2} + o\Big(\dfrac{\ln n}{n^2}\Big).$

Source : Oral MP*−MP ex. 10.12.

Développement asymptotique du terme général d'une suite. Intervention des séries et des théorèmes de sommation des relations de comparaison.

◇ **6.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \in]0\,;\pi[$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

Former un développement asymptotique de u_n à deux termes lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Source : Oral MP*−MP ex. 10.13.

Développement asymptotique du terme général d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Intervention des séries et utilisation de théorèmes de sommation des relations de comparaison.

◇ **7.** Soient I un intervalle fermé non vide de $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant 2$, $f : I \longrightarrow I$ une application de classe C^p, $x_0 \in I$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad x_{n+1} = f(x_n).$$

On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad x_n \neq \ell.$$

On suppose de plus : $\begin{cases} \forall\, k \in \{1,...,p-1\}, & f^{k)}(\ell) = 0 \\ f^{(p)}(\ell) \neq 0. \end{cases}$

Montrer qu'il existe $(\lambda,k) \in \mathbb{R}_+^* \times]0\,;1[$ tel que : $\quad |x_n - \ell| \underset{n\infty}{\sim} \lambda k^{p^n}.$

À cet effet, on pourra considérer la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{p^{n+1}} \ln\Big(\frac{|x_{n+1}-\ell|}{|x_n-\ell|}\Big).$$

Source : Oral MP*−MP ex. 10.30.

Vitesse de convergence dans la méthode du point fixe.

7. Exemples d'évaluation asymtotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes

◊ **1.** Trouver, pour $\alpha \in]1\,;+\infty[$ fixé, un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Recherche d'un équivalent du reste d'une série convergente; comparaison série-intégrale.

Source : Cours Analyse MP § 4.3.8 *2) a)* Exemple.

◊ **2.** Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \sin k}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Recherche d'un équivalent du reste d'une série convergente; utilisation d'un théorème de sommation des relations de comparaison.

Source : Cours Analyse MP § 4.3.9 *1)* Exemple.

◊ **3.** Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{k}\right)^{-k^3}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Recherche d'un équivalent du reste d'une série convergente; utilisation d'un théorème de sommation des relations de comparaison.

Source : Exercices Analyse MP ex. 4.20.

◊ **4.** Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k + (-1)^k}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Recherche d'un équivalent de la somme partielle d'une série divergeant vers $+\infty$; utilisation d'un théorème de sommation des relations de comparaison.

Source : Cours Analyse MP § 4.3.9 *2)* Exemple.

◊ **5.** Montrer :

Comparaison série-intégrale.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\infty}{o}(1),$$

où γ est un réel, appelé constante d'Euler.

Source : Cours Analyse MP § 4.3.7 *2)* Exemple.

◊ **6.** *a)* On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{\mathrm{e}^{n}}{n}$. Trouver un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} a_k$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Développement asymptotique d'une somme partielle de série; utilisation de théorèmes de sommation des relations de comparaison.

b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$, et $u_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Former un développement asymptotique de u_n à deux termes, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Source : Oral MP*−MP ex. 10.10.

8. Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes

♢ **1.** Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$.

Série alternée. Utilisation du TSCSA.

Source : Cours Analyse MP ex. 4.3.9 *a).*

♢ **2.** Déterminer, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$.

Série à termes réels de signe variable. Utilisation d'un développement asymptotique.

Source : Cours Analyse MP ex. 4.3.12 *z).*

♢ **3.** On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{\,-u_n}}{n+1}.$$

Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$?

Série alternée. Le terme général de la série est défini indirectement. Utilisation du TSCSA.

Source : Cours Analyse MP ex. 4.3.13.

♢ **4.** On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ si n est le carré d'un entier, et $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ sinon.

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Utilisation des sommes partielles.

Source : Cours Analyse MP ex. 4.3.10.

♢ **5.** Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^\alpha}$.

Groupement de termes.

Source : Exercices Analyse MP ex. 4.15.

♢ **6.** Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue par morceaux; montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que sa somme est $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Convergence par permutation série-intégrale.

Source : Exercices Analyse MP ex. 4.3.8.

♢ **7.** Montrer que, pour tout $(t,\alpha) \in (\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z})\times\,]0\,;+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}}{n^\alpha}$ converge.

Série à termes complexes; utilisation du théorème d'Abel.

Source : Cours Analyse MP Complément C 4.7 *3) a).*

♢ **8.** Déterminer, pour $\alpha \in\,]0\,;+\infty[$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{\sin n}{n^\alpha}\right)$.

Utilisation du théorème d'Abel.

Source : Cours Analyse MP Complément C 4.7 *3) b) 4).*

♢ **9.** Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série réelle semi-convergente. Montrer que, pour tout $S \in \mathbb{R}$, il existe une permutation φ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_{\varphi(n)}$ converge et ait pour somme S.

Propriété générale, difficile.

Source : Cours Analyse MP ex. 4.3.39

9. Exercices sur les suites de polynômes orthogonaux

♢ **1.** On note E le $\mathbb{R}$-ev des applications polynomiales de $[-1\,;1]$ dans $\mathbb{R}$, et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, E_n le sev de E formé des applications polynomiales de degré $\leqslant n$. On définit une application $< . , . >: E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

Définition d'une suite de polynômes orthogonaux.

$$\forall\,(P,Q) \in E^2, \quad < P\,,\,Q > = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que $< . , . >$ est un produit scalaire sur E et que :

$$\forall\,(P,Q,R) \in E^3, \quad < PQ\,,\,R > = < P\,,\,QR > .$$

b) Établir qu'il existe une suite unique $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements de E, orthonormale pour $< . , . >$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et à coefficient dominant > 0.

c) Montrer :

$$\forall\,n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n \in E_{n-1}^{\perp}.$$

Source : Cours Algèbre MPSI Complément C 10.1.

♢ **2.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \big((\mathrm{X}^2-1)^n\big)^{(n)}$, dérivée n-ème de $(\mathrm{X}^2-1)^n$, et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}\,U_n$, appelé n-ème polynôme de Legendre. Montrer :

Expression des polynômes de Legendre à l'aide d'une dérivée n-ème.

$$\forall\,n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,U_n.$$

Source : Cours Algèbre MPSI Complément C 10.1.

♢ **3.** Établir :

Équation différentielle satisfaite par L_n.

$$\forall\,n \in \mathbb{N}, \quad (1-\mathrm{X}^2)L_n'' - 2\mathrm{X}\,L_n' + n(n+1)L_n = 0.$$

Source : Cours Algèbre MPSI Complément C 10.1.

♢ **4.** Montrer :

Relation de récurrence entre les L_n.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)L_{n+1} = (2n+1)\mathrm{X}\, L_n - nL_{n-1}.$$

Source : Cours Algèbre MPSI Complément C 10.1.

♢ **5.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et admet exactement n zéros deux à deux distincts et situés dans $]-1\,;1[$.

Zéros de L_n.

Source : Cours Algèbre MPSI Complément C 10.1.

♢ **6.** *a)* Démontrer (formule de Christoffel et Darboux) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

Entrelacement des zéros de L_{n-1} et de L_n.

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n}(2k+1)L_k(x)L_k(y) = (n+1)\big(L_{n+1}(x)L_n(y) - L_n(x)L_{n+1}(y)\big).$$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n}(2n+1)\big(L_k(x)\big)^2 = (n+1)\big(L'_{n+1}(x)L_n(x) - L'_n(x)L_{n+1}(x)\big).$$

c) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \dfrac{L_n}{L_{n+1}} \in \mathbb{R}(\mathrm{X})$. Montrer que les coefficients de la décomposition en éléments simples de F_n dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$ sont tous > 0.

d) Établir que les zéros de L_{n-1} et L_n sont entrelacés.

Source : Cours Algèbre MPSI Complément C 10.1.

10. Comparaison sur des exemples de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions d'une variable réelle

◇ **1.** Montrer que la suite de fonctions $\big(f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0\,;+\infty[,\quad f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$, uniformément sur tout $[a\,;+\infty[$, $a \in]0\,;+\infty[$, mais pas uniformément sur $[0\,;+\infty[$.

Suite de fonctions convergeant simplement et non uniformément.

Source : Exercices Analyse MP ex. 5.1.1 *h).*

◇ **2.** Montrer que la suite de fonctions $(f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad f_n(x) = \frac{nx^3}{1 + nx^2}$$

converge uniformément, donc simplement, sur $\mathbb{R}$.

Suite de fonctions convergeant uniformément et simplement.

Source : Cours Analyse MP ex. 5.1.1 *b).*

◇ **3.** Donner des exemples de suites d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues, bornées, intégrables et de carrés intégrables, telles que :

$$\left\{\begin{array}{l} N_1(f_n) \longrightarrow 0 \\ N_2(f_n) \not\longrightarrow 0 \\ N_\infty(f_n) \not\longrightarrow 0 \end{array}\right|,\quad \left\{\begin{array}{l} N_1(g_n) \not\longrightarrow 0 \\ N_2(g_n) \longrightarrow 0 \\ N_\infty(g_n) \not\longrightarrow 0 \end{array}\right|,\quad \left\{\begin{array}{l} N_1(h_n) \not\longrightarrow 0 \\ N_2(h_n) \not\longrightarrow 0 \\ N_\infty(h_n) \longrightarrow 0 \end{array}\right|.$$

Suites de fonctions ayant divers comportements vis-à-vis des normes N_1, N_2, N_∞.

Source : Cours Analyse MP ex. 5.1.25.

◇ **4.** Étudier les convergences simple, absolue, uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

Source : Exercices Analyse MP ex. 5.3.2.

Série de fonctions; comparaison des convergences simple, absolue, uniforme.

◇ **5.** Étudier les convergences simple, uniforme, normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} f_n$, où $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}.$$

Source : Exercices Analyse MP ex. 5.3.1 *f).*

Série de fonctions : convergence uniforme (par comparaison série-intégrale) sans convergence normale.

◇ **6.** Étudier les convergences simple, uniforme, normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$, où $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right).$$

Source : Cours Analyse MP § 5.3.1 Exemple *4).*

Série de fonctions : convergence uniforme (par TSCSA) sans convergence normale.

11. Exemples d'étude de fonctions définies par une série

◊ **1.** *a)* Étudier les convergences de la série $\sum_{n \geqslant 1} f_n$, où $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}.$$

On note S la somme.

b) Montrer que S est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$.

c) Tracer la courbe représentative de S.

Source : Cours Analyse MP ex. 5.3.24.

Utilisation du théorème de dérivation pour une série d'applications, et du TSCSA.

◊ **2.** On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$

a) Étudier les convergences de la série $\sum_{n \geqslant 1} f_n$.

b) On note S la somme.

α) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$.

β) Montrer : $\dfrac{S(x)}{x} \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. L'application S est-elle dérivable en 0?

γ) Établir : $S(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Source : Cours Analyse MP ex. 5.15.

Utilisation du théorème de dérivation pour une série d'applications. Limites en deux temps.

◊ **3.** *a)* Étudier les convergences de la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n$, où $f_n :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x}.$$

b) Montrer que S est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$.

c) Former le développement asymptotique de $S(x)$ à la précision e^{-5x} lorsque x tend vers $+\infty$.

d) Tracer la courbe représentative de S.

Source : Cours Analyse MP ex. 5.3.27.

Utilisation du théorème de dérivation pour une série d'applications. Limites en deux temps. Obtention d'un développement asymptotique.

◇ **4.** *a)* Étudier les convergences de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$, où $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\quad f_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

b) Montrer que S est décroissante et positive.

c) Établir que l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{S(x)}}$ est concave sur $[0\,;+\infty[$.

Source : Cours Analyse MP ex. 5.3.31.

Utilisation du théorème de dérivation pour une série d'applications. Emploi de l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

◇ **5.** On note, pour $x \in]1\,;+\infty[$, $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

a) Montrer : $\zeta(x) \underset{x \,\longrightarrow\, 1^+}{\longrightarrow} +\infty$, $\zeta(x) \underset{x \,\longrightarrow\, +\infty}{\longrightarrow} 1$.

b) Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1\,;+\infty[$ et exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\zeta^{(k)}$ (comme somme d'une série).

c) Étudier les variations et la convexité de ζ.

d) Tracer la courbe représentative de ζ.

Source : Exercices Analyse MP ex.5.26, Cours Analyse MP ex. 5.3.1 *o)* et 5.3.34.

Limite en deux temps. Utilisation du théorème de dérivation pour une série d'applications.

◇ **6.** On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f_n(x) = \operatorname{th}(x+n) - \operatorname{th} n.$$

a) Étudier les convergences de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$. On note S la somme.

b) Montrer que S est croissante et continue.

c) Montrer :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad S(x+1) = S(x) + 1 - \operatorname{th}(x+1).$$

Source : Exercices Analyse MP ex. 5.3.4.

Utilisation d'un télescopage.

12. Exemples de développements en série entière. Applications

◇ **1.** Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}$ est dSE(0) et former son DSE(0); préciser le rayon de convergence R.

Utilisation d'une décomposition en éléments simples.

Source : Cours Analyse MP ex. 6.5.8 *a).*

◇ **2.** Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)$ est dSE(0) et former son DSE(0); préciser le rayon de convergence R.

Obtention du DSE(0) de f à partir de celui de f'.

Source : Cours Analyse MP ex. 6.5.8 *l)*

◇ **3.** Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est dSE(0) et former son DSE(0); préciser le rayon de convergence R.

Linéarisation et division par une puissance de x.

Source : Cours Analyse MP ex. 6.5.8 *n).*

◇ **4.** Montrer que la fonction $f : x \longmapsto (\operatorname{Arcsin} x)^2$ est dSE(0) et former son DSE(0); préciser le rayon de convergence R.

Utilisation d'une équation différentielle.

Source : Cours Analyse MP ex. 6.5.8 *r).*

◇ **5.** Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$ est dSE(0) et former son DSE(0); préciser le rayon de convergence R.

Permutation $\int$ et $\sum$.

Source : Cours Analyse MP ex. 6.5.8 *y).*

◇ **6.** Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{1-x}\,\mathrm{d}x = (-1)^k k! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}}.$$

Permutation $\int$ et $\sum$.

Source : Cours Analyse MP ex. 6.5.18 *b).*

◇ **7.** On note a_n le nombre de parenthésages sur un composé de n éléments $X_1, ..., X_n$ d'un ensemble E muni d'une loi interne. Ainsi:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 5.$$

Utilisation de séries entières pour la résolution d'un problème de dénombrement.

a) Montrer : $\forall\, n \geqslant 2, \quad a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}.$

b) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$. On suppose, dans ce *b)*, que son rayon R est > 0, et on note S sa somme. Montrer :

$$\forall\, x \in]-R\,;R[, \quad \big(S(x)\big)^2 - S(x) + x = 0.$$

c) 1) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\big(1 - \sqrt{1-4x}\big)$ est dSE(0) et calculer son DSE(0).

2) En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \dfrac{1}{n}\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}.$

Le nombre a_n est appelé $(n-1)$-ème nombre de Catalan.

Source : Cours Analyse MP C 6.1.

◇ **8.** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - xy = 0$ développables en série entière en 0.

Solutions dSE(0) d'un équation différentielle.

Source : Cours Analyse MP § 8.4.5 Exemple.

◇ **9.** Soit $\lambda \in]-1\,;1[$. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\lambda x)$$

(on exprimera f comme somme d'une série entière).

Solutions dSE(0) d'une équation fonctionnelle.

Source : Exercices Analyse MP ex. 6.5.25.

13. Exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles

♢ **1.** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - xy = 0,$$

d'inconnue $y : x \in \mathbb{R} \longrightarrow y(x) \in \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable. On exprimera les solutions à l'aide de séries entières.

Source : Cours Analyse MP § 8.4.5 Exemple.

Recherche de solutions développables en série entière. Exemple dans lequel les solutions ne s'expriment pas simplment au moyen des fonctions usuelles.

♢ **2.** On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad (x^2 + x)y'' + (3x + 1)y' + y = 0.$$

a) En cherchant les solutions développables en série entière, trouver une solution simple de (E) (autre que 0).

b) Résoudre (E) sur tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Source : Exercices Analyse MP ex. 8.11.

Recherche de solutions développables en série entière. Exemple dans lequel les solutions s'expriment au moyen des fonctions usuelles.

♢ **3.** On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$xy'' + y' + y = 0,$$

d'inconnue $y : x \longmapsto y(x)$ supposée deux fois dérivable.

a) Montrer que (E) admet une solution et une seule développable en série entière en 0 et prenant la valeur 1 en 0. On notera f cette solution. Calculer le rayon de convergence et les coefficients de cette série entitière.

b) Montrer que, dans $]0\,;2[$, f s'annule une fois et une seule.

Source : Oral MP*−MP ex. 13.7.

Recherche de solutions développables en série entière, avec condition. Étude de la solution.

♢ **4.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$ tel que $|b| < 1$. On considère l'équation différentielle :

Recherche de solutions développables en séries trigonométriques.

$$\text{(E)} \qquad y'' + ay = \frac{1}{1 - b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}},$$

d'inconnue $y : x \in \mathbb{R} \longmapsto y(x) \in \mathbb{C}$ supposée deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur (a,b) pour que (E) admette au moins une solution 2π-périodique. Dans ce cas, montrer que (E) admet une solution 2π-périodique et une seule, et calculer celle-ci (on exprimera le résultat sous forme d'une série).

Source : Oral MP*− MP ex. 14.5.

♢ **5.** Trouver toutes les applications $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

Recherche de solutions développables en séries trigonométriques.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) + y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^3}.$$

On exprimera le résultat à l'aide d'une série.

Source : Oral MP ex. 14.9.

14. Exemples de séries de Fourier et de leurs applications

◇ **1.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique, impaire, telle que :

Développement d'un créneau en série de Fourier. Calcul de certaines sommes de séries.

$$\begin{cases} \forall t \in]0\,;\pi[, \quad f(t) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n\pi) = 0. \end{cases}$$

a) Calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f.

b) Montrer que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f.

c) Calculer les sommes de séries suivantes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}, \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Source : Cours Analyse MP § 7.4 Exemple 1.

◇ **2.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique, paire, telle que : $\quad \forall t \in [0\,;\pi], \quad f(t) = t.$

Développement d'une dent de scie continue en série de Fourier. Calcul de certaines sommes de séries.

a) Calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f.

b) Étudier les convergences de la série de Fourier de f et déterminer sa somme.

c) Calculer les sommes de séries suivantes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Source : Cours Analyse MP § 7.4 Exemple 2.

◇ **3.** Soit $a \in]0\,;+\infty[$. On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} a + \cos t}$.

Calcul d'une intégrale en faisant intervenir des coefficients de Fourier.

a) Calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f.

b) En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{\operatorname{ch} a + \cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi(-1)^n \mathrm{e}^{-na}}{\operatorname{sh} a}.$

Source : Exercices Analyse MP ex. 7.5.

◇ **4.** Montrer : $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$

Calcul d'une intégrale en se ramenant à une série de Fourier.

Source : Cours Analyse MP ex. 7.4.6 et Exercices Analyse MP ex. 7.7.

◊ **5.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 par morceaux, continue, 2π-périodique et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f = 0$. Montrer : $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$.
(*Attention à l'énoncé, selon les éditions*)

Inégalité de Wirtinger.

Source : Exercices Analyse MP ex. 7.6.

◊ **6.** Pour $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $r_{n,k}$ le reste de la division euclidienne de n par k.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} r_{n,k}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.
On admettra : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Recherche d'une limite de suite liée à l'arithmétique.

Source : Exercices Analyse MP ex. 7.11.

◊ **7.** Trouver toutes les applications $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables et telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad y''(x) + y'(x) + y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^3}.$$

On exprimera le résultat à l'aide d'une série.

Recherche de solutions développables en séries trigonométriques, pour une équation différentielle.

Source : Oral MP ex. 14.9.

◊ **8.** La température d'une barre de longueur π, maintenue à ses extrémités à la température 0, est une fonction $u : \varDelta = [0\,;\pi] \times [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $\varDelta$, telle que $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur $\varDelta$, vérifiant :

$$\begin{cases} \forall\,(x,t) \in \varDelta, & \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ \forall\, t \in [0\,;+\infty[, & u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ \forall\, x \in [0\,;\pi], & u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

où $f : [0\,;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 telle que $f(0) = f(\pi) = 0$, donne la température de la barre à l'instant $t = 0$.

Montrer que, pour tout $(x,t) \in \varDelta$: $\displaystyle u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx$,

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(y)\sin ny\,\mathrm{d}y$.

Propagation de la température dans une barre de longueur finie.

Source : Cours Analyse MP C 7.3.

15. Exemples d'applications du théorème des accroissements finis pour une fonction numérique d'une variable réelle

♢ **1.** Soit $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et telle que f' admette une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer :

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Lien entre les comportements de $f'(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 5.2.8.

♢ **2.** Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\deg(P) \geqslant 2$.

a) Montrer que, si les zéros de P sont tous réels et simples, alors il en de même pour P'.

b) Montrer que, si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' l'est aussi.

Utilisation du théorème de Rolle pour des polynômes.

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 5.5.

♢ **3.** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème de Darboux.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 5.2.11.

♢ **4.** Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leqslant x < y < 1$:

$$\frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} < \operatorname{Arcsin} y - \operatorname{Arcsin} x < \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Obtention de certaines inégalités.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 5.3.8 *b).*

$\diamondsuit$ **5.** Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $[a\,;b]$. Montrer qu'il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

Utilisation du théorème de Rolle et du théorème des accroissements finis.

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 5.2.16.

16. Exemples d'encadrement de fonctions numériques; utilisations

◇ **1.** *a)* Montrer que, au voisinage de 0 :

$$-\frac{x^2}{2} - 3x^4 \leqslant \ln\cos x \leqslant -\frac{x^2}{2}.$$

b) En déduire la limite $\lim\limits_{n\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{\sqrt{k}}{n}$.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 5.3.7.

Recherche d'une limite de suite utilisant un encadrement de fonction.

◇ **2.** Calculer la partie principale, quand u tend vers $+\infty$, de :

$$\int_u^{2u} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

Source : Exercices Analyse MP ex. 2.3.23.

Exemple de recherche d'équivalent d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

◇ **3.** Trouver $y \in \mathbb{N}^*$ sachant que $5 + 2y + 2y^2 + 2y^3 + y^4$ est un carré d'entier.

Source : Exercices Algèbre et géométrie MPSI ex. 3.1.2 *b).*

Utilisation d'un encadrement pour des entiers.

◇ **4.** Trouver $\lim\limits_{n\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n} \sin\frac{k}{n^2}$.

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 6.6 *d).*

Encadrement de $\sin x$ en vue d'obtenir la limite d'une suite ressemblant à une somme de Riemann.

$\diamondsuit$ **5.** Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. Déterminer :

$$\lim_{n\infty} n\Big(\int_a^b f - \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)\Big).$$

Utilisation de l'encadrement d'une fonction par deux fonctions en escalier.

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 6.2.21.

17. Exemples d'approximations de fonctions numériques; utilisations

◊ **1.** Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. On suppose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Montrer : $f = 0$.

Source : Cours Analyse MP § 5.2.2 Corollaire.

Approximation par des polynômes; utilisation du premier théorème de Weierstrass.

◊ **2.** On note $E = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $I_1 = [-2\,;-1]$, $I_2 = [1\,;2]$, $N_1 : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $N_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ les normes définies par :

$$\forall\, P \in E, \quad N_1(P) = \operatorname*{Sup}_{x\in I_1} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \operatorname*{Sup}_{x\in I_2} |P(x)|.$$

Soit $(A,B) \in E^2$ quelconque. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E telle que :

$$\begin{cases} P_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} A \quad \text{dans} \quad (E,N_1) \\ \\ P_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} B \quad \text{dans} \quad (E,N_2). \end{cases}$$

Source : Cours Analyse MP exercice 5.2.20.

Un exemple d'une suite ayant deux limites différentes pour deux normes; utilisation du 1er théorème de Weierstrass.

◊ **3.** Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. Montrer :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,xt}\,\mathrm{d}t \underset{x\,\longrightarrow\,+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Source : Cours Analyse MP ex. 5.2.1.

Lemme de Lebesgue pour un segment; utilisation d'une approximation par des fonctions en escalier.

◇ **4.** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et intégrable sur I. Montrer :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,xt}\,\mathrm{d}t \underset{x \,\longrightarrow\, +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Source : Cours Analyse MP ex. 5.2.2.

Lemme de Lebesgue sur un intervalle quelconque; approximation par des fonctions à support borné.

◇ **5.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \,\longrightarrow\, 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+x}}\,\mathrm{d}t.$

Source : Oral MP*−MP ex. 11.7.

Approximation par une suite de fonctions; utilisation du théorème de convergence dominée.

◇ **6.** On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$xy'' + y' + y = 0,$$

d'inconnue $y : x \longmapsto y(x)$ supposée deux fois dérivable.

a) Montrer que (E) admet une solution et une seule développable en série entière en 0 et prenant la valeur 1 en 0. On notera f cette solution. Calculer le rayon de convergence et les coefficients de cette série entitière.

b) Montrer que, dans $]0\,;2[$, f s'annule une fois et une seule.

Source : Oral MP*−MP ex. 13.7.

Approximation d'une fonction par des polynômes, sous forme d'une série entière; utilisation du TSCSA.

18. Exemples d'utilisation de développements limités

♢ **1.** Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{2}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\ln \cos x} \right)$.

Recherche d'une limite, emploi d'un DL.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 8.3.4 *k).*

♢ **2.** Déterminer un équivalent simple, lorsque x tend vers 0, de $(2+\cos x)(2+\mathrm{ch}\, x)-9$.

Recherche d'un équivalent, emploi d'un DL.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 8.3.5 *i).*

♢ **3.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \in]0\,;+\infty[$ et :

Recherche d'un équivalent du terme général d'une suite récurrente.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}.$$

a) Montrer : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{1}{u_n^2}$. Montrer $U_{n+1} - U_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 2$.

c) En déduire : $u_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

Source : Cours Analyse MPSI C 3.1 III *2).*

♢ **4.** Étudier l'intégrabilité, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé, de $f : x \longmapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}} - \left(a + \dfrac{b}{x}\right)$, sur $[1\,;+\infty[$.

Utilisation d'un DL pour étudier une intégrabilité.

Source : Exercices Analyse MP ex. 3.1.1 *h).*

♢ **5.** Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to +\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$.

Étude de convergence pour une intégrale impropre, utilsation d'un DL.

Source : Exercices Analyse MP ex. 3.4.1 *q).*

◊ **6.** Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}.$$

Nature d'une série, utilisation d'un DL pour obtenir un équivalent.

Source : Cours Analyse MP ex. 4.2.1 *a')*.

◊ **7.** Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}.$$

Nature d'une série, utilisation d'un DL.

Source : Exercices Analyse MP ex. 4.3.1 *b)*.

◊ **8.** Étudier l'allure de l'arc paramétré :

$$x=\frac{1}{t}+\ln(2+t),\qquad y=t+\frac{1}{t},$$

au voisinage de son point stationnaire.

Étude d'un point stationnaire.

Source : Cours Géométrie PCSI PC ex. 3.1.3 *j)*.

◊ **9.** Étudier la branche infinie, lorsque $\theta \longrightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-$ de la courbe en polaires d'équation : $\rho=\dfrac{\tan\theta}{\cos 2\theta}$.

Étude de branche infinie pour une courbe en polaires.

Source : Cours Géométrie PCSI PC § 3.2.7 Exemple 1.

19. Exemples d'utilisation d'intégrales pour l'étude de suites et de séries

◇ **1.** On considère la fonction ζ de Riemann définie, pour $x \in]1\,;+\infty[$, par : $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, et on note, pour $x \in]0\,;+\infty[$, $I(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t - \mathrm{E}\,(t)}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}t$.

Utilisation d'une intégrale pour étudier le comportement asymptotique d'une somme de série de fonctions.

a) Établir :

$$\forall\, x \in]1\,;+\infty[, \quad \zeta(x) = \frac{x}{x-1} - xI(x).$$

b) En déduire :

$$(x-1)\zeta(x) \underset{x \longrightarrow 1^+}{\longrightarrow} 1.$$

Source : Cours Analyse MP ex. 5.3.21.

◇ **2.** Déterminer la limite de la suite définie par son terme général :

Utilisation de sommes de Riemann.

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3}, \qquad \Big(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\,\frac{1}{n+k}}\Big) - n.$$

Source : Cours Analyse MPSI ex. 6.2.11 *a), d), h).*

◇ **3.** On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

Utilisation de sommes de Riemann.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{x}.$$

a) Calculer l'abscisse x_n du premier maximum local de f_n sur $]0\,;+\infty[$.

b) Déterminer la limite ℓ de $f_n(x_n)$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Source : Oral MP*−MP ex. 5.7.

♢ **4.** Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Utilisation de la majoration de la méthode des trapèzes.

Source : Oral MP*−MP ex. 6.3.

♢ **5.** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$.

Utilisation des sommes de Riemann pour une fonction intégrable monotone.

Source : Oral MP*−MP ex. 7.9.

♢ **6.** Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge.

Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral.

Source : Oral MP*−MP ex. 10.23.

♢ **7.** Convergence et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$, où :

$$\forall\, n\geqslant 1,\quad u_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Utilisation du remplacement de $\dfrac{1}{k}$ par $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$.

Source : Oral MP*−MP ex. 10.38.

♢ **8.** Établir :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\,x}\ln x\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,n!}.$$

Permutation intégrale-série.

Source : Cours Analyse MP ex. 6.5.18 *a)*.

♢ **9.** Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}f_n$, où :

$$f_n:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto f_n(x)=\frac{x}{(1+n^2x^2)\ln n}.$$

Comparaison série-intégrale pour l'étude du reste d'une série.

Source : Cours Analyse MP ex. 5.3.1 *m)*.

20. Exemples d'utilisation de suites ou de séries pour l'étude d'intégrales

◇ **1.** Pour $x \in]1\,;+\infty[$, calculer l'intégrale de Poisson :

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos t + x^2)\,\mathrm{d}t.$$

Utilisation des sommes de Riemann pour une fonction continue sur un segment.

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 6.8.

◇ **2.** Soient $f, g : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ croissantes et continues par morceaux. Montrer :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\quad \Big(\int_0^x f\Big)\Big(\int_0^x g\Big) \leqslant x\int_0^x fg.$$

Utilisation des sommes de Riemann pour une fonction continue sur un segment.

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 6.2.22.

◇ **3.** *a)* On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{x}\Big(1 - \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n\Big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_1^n \frac{1}{x}\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n\,\mathrm{d}x.$$

Suite convergeant vers une intégrale; utilisation du théorème de convergence dominée.

α) Montrer :

$$I_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

β) Montrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad I_n - J_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

b) En déduire :

$$\int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x}\,\mathrm{d}x = \gamma,$$

où γ est la constante d'Euler.

Source : Cours Analyse MP ex. 5.1.35.

◇ **4.** Montrer :

Permutation intégrale-série.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Source : Exercices Analyse MP ex. 7.7

◇ **5.** On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

Remplacement d'une intégrale par une série à convergence rapide.

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \mathrm{e}^{\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}}.$$

a) Calculer les coefficients de Fourier (exponentiels) de f, et étudier la convergence de la série de Fourier de f.

b) Montrer :

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\,2\cos t}\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}.$$

c) α) Montrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2} \leqslant \frac{2}{\big((n+1)!\big)^2}.$$

β) En déduire une valeur approchée à 10^{-10} près de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\,2\cos t}\,\mathrm{d}t$.

Source : Oral MP*−MP ex. 14.2.

21. Exemples de calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

♢ **1.** Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale de Wallis : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

Source : Cours Analyse MPSI § 6.4.4 Exemple *1)*.

Utilisation d'une intégration par parties pour obtenir une relation de de récurrence sur des intégrales dépendant d'un entier n.

♢ **2.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 (\operatorname{Arcsin} x)^2 \, \mathrm{d}x$.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 9.3.2 *a)*.

Changement de variable et intégration par parties.

♢ **3.** Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x + \sin^4 x + \frac{1}{4}}$.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 9.6.3 *a)*.

Changement de variable.

♢ **4.** Calculer, pour $x \in]1\,;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos t + x^2) \, \mathrm{d}t$.

Source : Exercices Analyse MPSI ex 6.8.

Utilisation de sommes de Riemann pour calculer une intégrale.

♢ **5.** Calculer, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$:

$$\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \, \mathrm{d}x, \quad \int_0^{2\pi} \sin px \cos qx \, \mathrm{d}x, \quad \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \, \mathrm{d}x.$$

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 9.4.8 *b)*.

Utilisation de formules de trigonométrie.

$\diamondsuit$ **6.** Calculer, pour tout $a \in]0\,;+\infty[$: $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Utilisation d'un changement de variable qui échange les bornes.

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 9.4.8 *e)*.

22. Exemples d'étude d'intégrales impropres

◇ **1.** Étudier, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, la nature des intégrales impropres :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Nature d'une intégrale impropre : exemple fondamental.

Source : Exercices Analyse MP ex. 3.21.

◇ **2.** Montrer, pour tout $\alpha \in]0\,;+\infty[$ fixé :

a) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$ si $\alpha > 1$

b) $\displaystyle\int_1^{x} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}$ si $0 < \alpha < 1$.

Équivalent du reste d'une intégrale ou d'une intégrale partielle.

Source : Exercices Analyse MP ex. 3.22.

◇ **3.** *a)* Soit $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge, et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.

Calcul de certaines intégrales impropres.

α) Montrer :

$$\forall\, \varepsilon \in]0\,;+\infty[, \quad \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

β) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge, et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

b) Exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,\mathrm{d}x$, pour $0 < a < b$.

Source : Exercices Analyse MP 3.24.

◇ **4.** Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Calcul d'une intégrale impropre classique.

Source : Exercices Analyse MP ex. 3.25.

◇ **5.** Nature de $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} x^3 \sin(x^8)\,\mathrm{d}x$.

Nature d'une intégrale impropre : utilisation d'un changement de variable.

Source : Exercices Analyse MP ex. 3.4.1 *b).*

◇ **6.** Nature de $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,\mathrm{d}x$ et de $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Nature d'une intégrale impropre : utilisation d'un développement asymptotique.

Source : Exercices Analyse MP ex. 3.4.1 *f).*

◇ **7.** Montrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Limte d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Source : Cours Analyse MP ex. 3.4.4.

23. Exemples d'intégration sur un intervalle

◇ **1.** Étudier l'intégrabilité des applications suivantes, sur l'intervalle indiqué :

Théorème de majoration, utilisation d'un équivalent, exemple de Bertrand.

a) $x \longmapsto \mathrm{e}^{-(\ln x)^2}$, $]0\,;+\infty[$

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}$, $]0\,;+\infty[$.

Source : Exercices Analyse MP ex. 3.1.1 *c), d).*

◇ **2.** Existence et calcul des intégrales suivantes :

Exemples de calcul d'intégrales sur un intervalle quelconque.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 3x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_1^{+\infty} \left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta + \operatorname{ch} x}, \quad \theta \in]-\pi\,;\pi[.$$

Source : Exercices Analyse MP 3.2 *b), e), f), j).*

◇ **3.** Déterminer $\lim\limits_{n\infty} \mathrm{e}^{x^2} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Limite d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Source : Exercices Analyse MPSI ex. 3.15.

◇ **4.** *a)* Soit $f :]0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante, intégrable sur $]0\,;1]$. Montrer :

Sommes de Riemann sur un intervalle quelconque, pour une fonction monotone et intégrable.

$$\lim_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f.$$

b) Application : Trouver : $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$ et $\lim\limits_{n\infty} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \sqrt{\frac{k}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Source : Cours Analyse MP ex. 3.1.9.

◇ **5.** Montrer : $\displaystyle\int_1^x \frac{\operatorname{th} t}{\sqrt{t(t+1)}}\,\mathrm{d}t \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \ln x.$

Source : Cours Analyse MP ex. 3.3.1.

Équivalent d'une intégrale dépendant d'un paramètre aux bornes; utilisation d'un théorème d'intégration des relations de comparaison.

◇ **6.** Établir :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi \ln(1+|x|).$$

Source : Cours Analyse MP ex. 3.5.19.

Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

◇ **7.** Trouver $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+x^n \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x.$

Source : Cours Analyse MP ex. 5.1.27 *f).*

Limite d'une intégrale dépendant d'un paramètre; utilisation du théorème de convergence dominée.

◇ **8.** Montrer : $\displaystyle\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x \underset{n\infty}{\sim} n.$

Source : Cours Analyse MP ex. 5.1.31 *a).*

Équivalent d'une intégrale dépendant d'un paramètre ; utilisation du théorème de convergence dominée.

25. Exemples de calculs d'intégrales multiples

◇ **1.** Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, pour :

Calcul d'une intégrale double dans un cas particulier.

$$D = [0\,;\pi]^2, \qquad f(x,y) = (x+y)\sin x \sin y.$$

Source : Cours Analyse MPSI ex. 12.2.1 *a).*

◇ **2.** Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, pour :

Calcul d'une intégrale double par emboîtement d'intégrales simples.

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,; x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1\big\}, \quad f(x,y) = xy(x+y).$$

Source : Cours Analyse MPSI ex. 12.2.1 *b).*

◇ **3.** Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, pour :

Calcul d'une intégrale double par passage en polaires.

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,; x \geqslant 1,\ x^2+y^2-2x \leqslant 0\big\},$$

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2},$$

en utilisant les coordonnées polaires.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 12.2.4 *i).*

◇ **4.** Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, pour :

Calcul d'une intégrale double par utilisation d'un changement de variables.

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ; y^2-2px \leqslant 0,\ x^2-2py \leqslant 0\big\},$$

$$f(x,y) = \exp\frac{x^3+y^3}{xy},$$

$p \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, en utilisant le changement de variables défini par :

$$x = u^2 v, \qquad y = uv^2.$$

Source : Cours Analyse MPSI ex. 12.2.4 *u).*

◇ **5.** Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a > b$, (E) l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ les foyers de (E), $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, D la partie fermée bornée limitée par (E). Calculer $\displaystyle\iint_D (MF + MF')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où M a pour coordonnées (x,y). On décomposera D en ellipses homofocales à (E), (c'est-à-dire ayant les mêmes foyers que (E)).

Calcul d'une intégrale double en utilisant un changement de variables induit par la nature du domaine.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 12.2.8.

◇ **6.** Calculer $\displaystyle\iiint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, pour :

Calcul direct d'une intégrale triple.

$$D = [0\,;1]^3, \qquad\qquad f(x,y,z) = x^2 y\,\mathrm{e}^{\,xyz}.$$

Source : Cours Analyse MPSI ex. 12.3.1 *a).*

◇ **7.** Calculer $\displaystyle\iiint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, pour :

Calcul d'une intégrale triple par passage en coordonnées cylindriques.

$$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2, \quad f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}},$$

où $\mathbb{R} \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ sont fixés tels que $a > R$.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 12.3.1 *e).*

◇ **8.** Calculer $\displaystyle\iiint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, pour :

Calcul d'une intégrale triple par passage en coordonnées sphériques.

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,; 1 \leqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 4\big\}, \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

où $R \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 12.3.1 *i).*

◇ **9.** Calculer $\displaystyle\iiint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, pour :

Calcul d'une intégrale triple par utilisation d'un changement de variables.

$$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,; x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ ax + by + cz \leqslant d\big\},$$

$$f(x,y,z) = \sqrt{xyz},$$

où $(a,b,c,d) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ est fixé.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 12.3.1 *q).*

26. Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale

◇ **1.** Étudier la fonction f d'une variable réelle définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 6.4.17.

Étude d'une fonction définie par une intégrale, le paramètre étant aux bornes.

◇ **2.** Étudier la fonction f d'une variable réelle définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{x} \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Source : Cours Analyse MP ex. 3.2.15 *a)*.

Étude d'une fonction définie par une intégrale, le paramètre étant aux bornes.

◇ **3.** Étude et représentation graphique de la fonction f d'une variable réelle définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t}\,\mathrm{d}t$.

Source : Cours Analyse MP ex. 3.5.5.

Étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre à l'intérieur.

◇ **4.** Étude et représentation graphique de la fonction f d'une variable réelle définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t(x-t)}}\,\mathrm{d}t$.

Source : Cours Analyse MP ex. 3.5.17 *a)*.

Étude d'une fonction définie par une intégrale sur un intervalle quelconque, le paramètre étant à l'intérieur et aux bornes.

◇ **5.** *a)* Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$. On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre par dérivation sous le signe $\int$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$.

c) En déduire :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x).$$

Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) En déduire :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \pi \ln 2.$$

Source : Cours Analyse MP ex. 3.5.18.

27. Exemples de résolution d'équations différentielles scalaires

◇ **1.** Résoudre l'équation différentielle :

$$2x(1+x)y' + (1+x)y = 1,$$

d'inconnue y à valeurs réelles, sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Source : Cours Analyse MPSI § 10.1.3 6) Exemple.

ED linéaire du 1er ordre avec second membre; raccords.

◇ **2.** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{\,x} + (3x-1)\mathrm{e}^{\,2x} + x - 2,$$

d'inconnue $y : x \in \mathbb{R} \longmapsto y(x) \in \mathbb{R}$, supposée deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 10.2.3 *g).*

ED linéaire du 2ème ordre, à coefficients constants, avec second membre superposition d'exponentielles-polynômes.

◇ **3.** Résoudre l'équatiuon différentielle :

$$(1+x^2)y' - (1+y^2) = 0,$$

d'inconnue y à valeurs réelles.

Source : Cours Analyse MPSI § 10.3.2 3) Exemple.

ED du 1er ordre à variables séparables.

◇ **4.** Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \mathrm{e}^{\,\frac{y}{x}},$$

d'inconnue y à valeurs réelles.

Source : Cours Analyse MPSI § 10.3.3 4) Exemple.

ED du 1er ordre, homogène.

◇ **5.** Résoudre l'équation différentielle :

ED de Bernoulli.

$$xy' + y - xy^3 = 0,$$

d'inconnue y à valeurs réelles.

Source : Cours Analyse MP ex. 8.2.2 *e)*.

◇ **6.** Résoudre l'équation différentielle :

ED de Riccati.

$$y' - \frac{y}{x} + y^2 + \frac{1}{x^2} = 0,$$

d'inconnue y, et où $x \in]0\,;+\infty[$.

Source : Cours Analyse MP ex. 8.2.2 *g)*.

◇ **7.** Résoudre l'équation différentielle :

ED du 2nd ordre, linéaire, à coefficients non constants, sans second membre.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.
On pourra chercher une solution polynomiale.

Source : Exercices Analyse MP ex. 8.9.

◇ **8.** Résoudre l'équation différentielle :

ED du 2nd ordre, linéaire, à coefficients constants, avec second membre; utilisation de la méthode de variation des constantes.

$$y'' - 5y' + 6y = \frac{\mathrm{e}^{\,x}}{\mathrm{ch}^2 x},$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Source : Cours Analyse MP ex. 8.4.3 *d)*.

28. Exemples de résolution de systèmes différentiels

◇ **1.** Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)\tan t + y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t)\tan t, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y) : I = \left] -\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Source : Cours Analyse MP § 8.3.4 2) Exemple.

SD du 1er ordre, linéaire, sans second membre, à coefficients non constants, admettant une solution évidente autre que $(0, 0)$.

◇ **2.** Résoudre le système differentiel :

$$\begin{cases} (t^2 + 1)x' = tx - y + 2t \\ (t^2 + 1)y' = x + ty - 1, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Source : Cours Analyse MP § 8.3.5 2) Exemple.

SD du 1er ordre, linéaire, à coefficients non constants, avec second membre.

◇ **3.** Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y - 4z + t\mathrm{e}^{\,t} - t \\ y' = -2x + 3y + 2z + t\mathrm{e}^{\,t} - 2t + 2 \\ z' = 3x - 3y - 4z - 1 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Source : Cours Analyse MP § 8.3.6 1) *b)* Exemple.

SD du 1er ordre, linéaire, à coefficients constants et à matrice diagonalisable, avec second membre du type exponentielle-polynôme.

$\diamondsuit$ **4.** Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 5x - 3y - 4z \\ y' = -x + y - 2z \\ z' = x - 3y \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Source : Cours Analyse MP § 8.3.6 2) *a)* Exemple.

SD du 1er ordre, linéaire, sans second membre, à coefficients constants, et à matrice non diagonalisable mais trigonalisable.

$\diamondsuit$ **5.** *a)* Diagonaliser, pour $t \in \mathbb{R}$, la matrice suivante, carrée d'ordre 2, à coefficients réels :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 4 - 7t & -6 + 12t \\ 2 - 4t & -3 + 7t \end{pmatrix}.$$

b) Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} y'(x) = (4 - 7\tan x)y(x) - (6 - 12\tan x)z(x) + 5\cos x \\ z'(x) = (2 - 4\tan x)y(x) - (3 - 7\tan x)z(x) + 3\cos x \end{cases}$$

d'inconnues $y, z : \left] -\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R}$ supposées dérivables.

Source : Oral MP*−MP ex. 8.5.

SD du 1er ordre, linéaire, à coefficients variables, avec second membre.

30. Exemples de recherche d'extrémums d'une fonction numérique d'une variable, d'une fonction numérique de deux variables

◊ **1.** Calculer :

$$\operatorname{Sup}\left\{ -x^3 + \frac{75}{4}x\,;\ x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x^4 + 36 \leqslant 13x^2 \right\}.$$

Source : Cours Analyse MPSI ex. 5.3.9.

Recherche d'une borne supérieure pour une fonction d'une variable réelle.

◊ **2.** Trouver tous les réels a tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x \leqslant \mathrm{e}^{\,ax^2}.$$

Source : Oral MP*−MP ex. 4.15.

Détermination de réels par recherche d'extremum d'une fonction d'une variable réelle.

◊ **3.** Déterminer les extremums locaux et globaux de :

$$f : (\mathbb{R}^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Source : Cours Analyse MP ex. 9.3.2 *b).*

Extremum local pour une fonction de deux variables réelles; utilisation de $s^2 - rt$.

◊ **4.** Déterminer les extremums locaux et globaux de :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4.$$

Source : Cours Analyse MP ex. 9.3.2 *a).*

Extremum local pour une fonction de deux variables réelles; exemple dans lequel $s^2 - rt = 0$.

◊ **5.** Déterminer les extremums locaux et globaux de :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 4}{x^2 + y^2 + 2x + 4}.$$

Source : Cours Analyse MP ex. 9.3.2 *h).*

Extremum local ou global pour une fonction de deux variables réelles.

◇ **6.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2(1+y^3)+y^4$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, admet un point critique et un seul, en lequel f admet un minimum local, mais que f n'a pas de minimum global.

Extremum local sans extremum global.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 11.5.3.

◇ **7.** Déterminer les extremums globaux de $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, où :

$$X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,; x \leqslant 0,\ y \leqslant 0,\ x+y \geqslant -3\big\} \quad \text{et} \quad f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x + y.$$

Extremums globaux pour une fonction de deux variables réelles; étude au bord.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 11.5.2.

31. Exemples d'approximations d'un nombre réel

◇ **1.** Montrer que les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

Approximation d'un réel par deux suites adjacentes.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n\, n!}$$

convergent vers le réel e, et que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n < \mathrm{e} < v_n.$$

En déduire que e est irrationnel.

Source : Cours Analyse MPSI § 3.2.2 Exemple *1)*.

◇ **2.** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et :

Suite récurrente convergeant rapidement vers un réel fixé.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a^2}{u_n}\Big).$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers a et qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n - a \leqslant C^{2^{n-1}-1}(u_1 - a)^{2^{n-1}}.$$

Source : Cours Analyse MPSI § 3.4.3 Exemple (2).

◇ **3.** Calculer une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$ à 10^{-8} près.

Valeur approchée d'un réel défini comme somme d'une série relevant du TSCSA.

Source : $\varnothing$.

◇ **4.** *a)* On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^3}$, et $\zeta(3) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exemple d'accélération de la convergence.

α) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer : $R_n \geqslant \dfrac{1}{2(n+1)^2}$.

β) Déterminer le plus petit entier n tel que $R_n \leqslant 10^{-6}$.

b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}$ et $d_n = v_n - u_n$.

α) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} d_k$. Montrer :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \frac{1}{4(n+2)^4} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{4(n-1)^4}.$$

β) Déterminer le plus petit entier n tel que $R_n \leqslant 10^{-6}$.

c) En utilisant, pour $n \geqslant 3$, $w_n = \dfrac{1}{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}$, calculer une valeur approchée de $\zeta(3)$ à 10^{-6} près.

Source : $\varnothing$

◇ **5.** *a)* Montrer, pour toute application continue $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^4 :

Méthode de Simson pour le calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880} \operatorname*{Sup}_{x \in [a\,;b]} |f^{(4)}(x)|.$$

b) En déduire une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{0,1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ à 10^{-6} près.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 5.2.9 à compléter.

33. Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse

♢ **1.** Étudier la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule suivante :

Changement de variable pour l'étude d'une fonction.

$$f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \mathrm{Arcsin}\,2x\sqrt{1-x^2}.$$

Source : Cours Analyse MPSI ex. 7.9.2 *f)*.

♢ **2.** Montrer que la loi $*$ définie par :

Changement de variable pour étudier une loi de composition interne.

$$x * y = x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

est interne dans $[-1\,;1]$ et que $\big([-1\,;1]\,;*\big)$ est un groupe.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 7.9.9.

♢ **3.** Calculer les primitives suivantes :

Changement de variable pour des calculs de primitives.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\cos x \sin^4 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x.$$

Source : Cours Analyse MPSI ex. 9.2.1 *e)*, 9.6.1 *e)*, 9.6.10 *c)*.

♢ **4.** Calculer les intégrales :

Changement de variable pour des calculs d'intégrales.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,3x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Source : Exercices Analyse MP ex. 3.2 *e)*, 3.6.

◊ **5.** Résoudre l'équation différentielle :

$$(t^2+1)^2x'' + 2t(t^2+1)x' + x = (t^2+1)^2,$$

en utilisant le changement de variable défini par $u = \operatorname{Arctan} t$.

Source : Cours Analyse MP ex. 8.4.1 *c)*.

Changement de variable dans une équation différentielle.

◊ **6.** Résoudre l'équation différentielle :

$$x^2y'' + 3xy' + y = 1 + x^2,$$

en utilisant le changement de variable défini par $t = \ln|x|$.

Source : Cours Analyse MPSI ex. 10.2.6 *b) β)*.

Changement de vraiable dans une équation différentielle.

◊ **7.** Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{(2n+1)!}x^n$.

Source : Exercices Analyse MP ex. 6.5.1 *j)*.

Changements de variable pour le calcul de la somme d'une série entière.

◊ **8.** Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0,0)$ pour la fonction f donnée par la formule :

$$f(x,y) = \frac{x^4y^3}{x^6+y^8}.$$

Source : Cours Analyse MP ex. 9.0.1 *c)*.

Changements de variables pour la recherche d'une limite d'une fonction de deux variables.

◊ **9.** On note $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;x+y>0\}$.
Trouver toutes les applications $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telles que :

$$\forall\,(x,y)\in U,\ \ \frac{2x}{x+y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{2y}{x+y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{2\,f(x,y)}{2+x+y} = (2+x+y)\cos\frac{x+y}{2},$$

en utilisant le changement de variables défini par :

$$x = t+tu, \qquad y = t-tu.$$

Source : Oral MP ex. 9.3.

Changement de variables pour la résolution d'une équation aux dérivées partielles.

37. Exemples de problèmes de dénombrement

♢ **1.** Combien y a-t-il de nombres entiers naturels dont l'écriture décimale comporte exactement n chiffres ($n \geqslant 3$) dont deux chiffres 8 exactement?

Dénombrement d'après une écriture décimale.

Source : Cours Algèbre MPSI § 3.5.2 Exemple 2).

♢ **2.** On donne, dans le plan, n droites distinctes en position générale ($n \geqslant 4$).

Dénombrement de points et de droites dans le plan.

a) En combien de points ces droites se coupent-elles?

b) Combien de nouvelles droites sont déterminées par les points d'intersection précédents?

Source : Cours Algèbre MPSI § 3.5.2 Exemple 3).

♢ **3.** Soient E un ensemble fini à n éléments, A une partie de E à p éléments ($0 \leqslant p \leqslant n$). Dénombrer les couples (X, Y) de parties de E telles que :

Dénombrement d'ensembles.

$$X \cup Y = E \quad \text{et} \quad X \cap Y \supset A.$$

Source : Cours Algèbre MPSI § 3.5.2 Exemple 4).

♢ **4.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini à n éléments. Dénombrer les relations antisymétriques dans E.

Dénombrement de relations.

Source : Exercices Algèbre et géométrie MPSI ex. 3.11 *d)*.

◇ **5.** On note a_n le nombre de parenthésages sur un composé de n éléments $X_1, ..., X_n$ d'un ensemble E muni d'une loi interne. Ainsi:

Utilisation d'une série entière et d'une équation algébrique pour un dénombrement.

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 5.$$

a) Montrer : $\forall\, n \geqslant 2, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.

b) On considère la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$. On suppose, dans ce *b)*, que son rayon R est > 0, et on note S sa somme. Montrer :

$$\forall\, x \in]-R\,;R[, \quad \big(S(x)\big)^2 - S(x) + x = 0.$$

c) 1) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\big(1 - \sqrt{1-4x}\big)$ est dSE(0) et calculer son DSE(0).

2) En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{n}\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}$.

Le nombre a_n est appelé $(n-1)$-ème nombre de Catalan.

Source : Cours Analyse MP C 6.1.

◇ **6.** On note $\Pi_0 = 1$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Π_n le nombre de partitions de $\{1, ..., n\}$.

Utilisation d'une série entière et d'une équation différentielle pour un dénombrement.

a) Montrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Pi_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \Pi_k.$$

b) On considère la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\Pi_n}{n!} z^n$. Montrer que son rayon est supérieur ou égal à 1. On note S sa somme.

c) Former une éqution différentielle satisfaite par S et en déduire S sur l'intervalle $]-1\,;1[$.

Source : Oral MP*−MP ex. 13.2

38. Exemples de calculs de la norme d'une application linéaire continue

◇ **1.** On note ℓ^∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé formé des suites réelles bornées $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muni de $||.||_\infty$ définie par $||x||_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$, et on considère l'opérateur de différence $\Delta : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$ défini par $\Delta(x) = y$, où $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad y_n = x_{n+1} - x_n.$$

Montrer $\Delta \in \mathcal{LC}(\ell^\infty)$, et calculer $|||\Delta|||$.

Source : Exercices Analyse MP, ex. 1.12.

Sur un espace de suites. La norme subordonnée est atteinte.

◇ **2.** On note $E = C\big([0\,;1],\mathbb{R}\big)$ et $||.||_1$, $||.||_2$, $||.||_\infty$ les trois normes classiques sur E, définies, pour toute f de E par :

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$||f||_2 = \Big(\int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[0;1]} |f(x)|.$$

Pour $\varphi \in E$, on note $T_\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall\, f \in E,\quad T_\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que T_φ est linéaire continue, et calculer $|||T_\varphi|||$ dans chacun des trois cas.

Source : Exercices Analyse MP ex. 1.13.

Sur un espace de fonctions. Calcul de la norme subordonnée pour des formes linéaires, avec diverses normes sur l'espace de départ.

◊ **3.** Soient E l'espace vectoriel normé des applications continues de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de $||.||_1$, et $T : E \longrightarrow E$ définie par :

Sur un espace de fonctions. La norme subordonnée n'est pas atteinte.

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0\,;1],\quad \big(T(f)\big)(x) = \int_0^x f.$$

Montrer $T \in \mathcal{LC}(E)$ et calculer $|||T|||$.

Source : Exercices Analyse MP ex. 1.2.25.

◊ **4.** Soient $E = C\big([0\,;1],\mathbb{R}\big)$ muni de $||.||_\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Sur un espace de fonctions. La norme subordonnée n'est pas atteinte.

Pour $f \in E$, on note :

$$L_n(f) = \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

Montrer que L_n est linéaire continue et calculer $|||L_n|||$.

Source : Exercices Analyse MP ex. 2.14.

39. Exemples de calculs de la longueur d'un arc de classe C^1

♢ **1.** Calculer la longuer de la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

Calcul de la longueur d'un arc du plan donné en coordonnées cartésiennes.

Source : Cours Géométrie PCSI PC ex. 4.1.2.

♢ **2.** *a)* Tracer la courbe C d'équation polaire :

$$\rho = \frac{1}{\cos^3 \dfrac{\theta}{3}}.$$

Calcul de la longueur d'un arc du plan donné en coordonnées polaires.

b) Calculer l'abscisse curviligne en tout point de C, en prenant pour origine le point de C correspondant à $\theta = 0$.

c) Calculer la longueur L de la courbe C.

Source : Cours Géométrie PCSI PC ex. 4.1.4.

♢ **3.** *a)* Tracer la courbe C de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = (1-t)^2 \mathrm{e}^{\,t} \\ y = 2(1-t)\mathrm{e}^{\,t}. \end{cases}$$

Calcul de la longueur d'un arc du plan donné en coordonnées cartésiennes. Intervention d'une intégrale sur un intervalle quelconque.

b) Calculer l'abscisse curviligne en tout point de C, en prenant pour origine le point de C correspondant à $t = 1$.

c) Calculer la longuer L de la boucle de C. On fera intervenir une intégrale sur $]-\infty\,; 1]$.

Source : Cours Géométrie PCSI PC ex.4.1.3.

◇ **4.** Calculer la longueur de l'arc paramétré :

Calcul de la longueur d'un arc de l'espace.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos at}{\mathrm{ch} t} \\ y = \dfrac{\sin at}{\mathrm{ch} t} \\ z = \mathrm{th}\, t, \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$ est le paramètre et où $a \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

Source : Cours Géométrie PCSI PC ex. 5.1.21.