Préparation à l'agrégation interne de mathématiques
Aide à la résolution pour les exercices du mercredi 30 octobre 2007
Jean-Marie Monier

Exercice 1

a) Montrer : $(n-1)\ln 2 \leqslant |a_n| \leqslant n \ln n$.

Réponse : $R = 1$.

b) Transformer l'écriture de a_n, à l'aide d'une expression conjuguée et obtenir $a_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$.

Appliquer ensuite la règle de d'Alembert.

Réponse : $R = 1$.

c) Étudier le comportement de $|a_n z^n|$, pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Réponse : $R = \infty$.

d) règle de d'Alembert.

Réponse : $R = \dfrac{108}{3125}$.

e) Règle de d'Alembert.

Réponse : $R = \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^{2/3}$.

Exercice 2

a) 1) Rayon :

Règle de d'Alembert.

Réponse : $R = 1$.

2) Somme :

Séparer en trois séries entières, toutes de rayon 1.

On connaît $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, d'où, par dérivation, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$, puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$, puis, encore par dérivation, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$.

Réponse : $\forall x \in]-1\,;1[, \quad s(x) = \dfrac{6 - 12x + 8x^2}{(1-x)^3}$.

b) 1) Rayon :

Règle de d'Alembert.

Réponse : $R = 1$.

2) Somme :

Séparer en trois séries entières, toutes de rayon 1.

Réponse : $\forall x \in]-1\,;1[, \quad S(x) = \dfrac{3x - 2x^2}{(1-(x)^2} + \ln(1-x)$.

c) 1) Rayon :
Règle de d'Alembert.

Réponse : $R = 1$.

2) Somme :

Décomposition de $\dfrac{1}{n(n+1)}$ en éléments simples, puis changement d'indice dans une des deux sommations.

Réponse : $\forall x \in]-1\,;1[, \quad S(x) = 1 + \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\ln(1-x)$ et $S(0) = 0$.

d) 1) Rayon :
Règle de d'Alembert.

Réponse : $R = 1$.

2) Somme :
Changement de variable $t = \sqrt{x}$ si $x > 0$, $t = \sqrt{-x}$ si $x < 0$.

Réponse : $S(x) = \dfrac{\operatorname{Argth}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ si $0 < x < 1$, $\quad 1$ si $x = 0$, $\quad \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$ *si* $-1 < x < 0$.

Exercice 3

a) Décomposer en éléments simples. On obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Développer en série entière chaque élément simple, en se ramenant à $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$, pour $u \in]-1\,;1[$.

Réponse : $R = 1$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n - \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^n}{2^n}\right)x^n$.

b) Remarquer : $f(x) = (1+x)(1-x^2)^{-1/2}$.

Réponse : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $a_n = \dfrac{(2p)!}{2^p p!)^2}$ si $n = 2p$ ou si $n = 2p+1$. Et $R = 1$.

c) Utiliser le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \sin x$, en séparant en cas $x \neq 0$, $x = 0$, puis en montrant qu'on peut regrouper les deux résultats.

Réponse : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$, $\quad R = \infty$.

d) Utiliser la dérivée, une décomposition en éléments simples (par les nombres complexes), des développements en série entière de chaque terme, puis primitiver.

Réponse : $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^n \sin(n\alpha)x^n$, $\quad R = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$, $\quad \alpha = \operatorname{Arg}\dfrac{-3+\mathrm{i}}{2}$.

Exercice 4

a) **Réponse :** $a_n = \dfrac{4(-1)^{n+1}}{4n^2-1}, \quad b_n = 0.$

b) Appliquer le théorème de Dirichlet.

Réponse : La série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f.

c) • Appliquer le résultat précédent à $t = 0$, à $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Réponse : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$

• Appliquer le théorème de Parseval.

Réponse : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$

****