Préparation à l'agrégation interne de mathématiques
Aide à la résolution pour les exercices du mercredi 27 juin 2007
Jean-Marie Monier

Exercice 1

a) Utiliser une expression conjuguée pour déduire $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Réponse : converge.

b) $u_n \geqslant \left(\frac{1}{n^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{n}$.

Réponse : diverge.

c) Utiliser un développement limité pour obtenir $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{6n}$.

Réponse : diverge.

d) Montrer d'abord $\operatorname{Argsh} n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$.

Puis : $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}$ et exemple de Bertrand, à redémontrer par comparaison série-intégrale.

Réponse : diverge.

e) Montrer d'abord : $\operatorname{Arccos} x \underset{x \longrightarrow 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$. Puis : $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{\sqrt{6}}{n^{3/2}}$.

Réponse : converge.

f) Utiliser la règle de d'Alembert.

Réponse : converge.

Exercice 2

a) Appliquer le TSCSA. Pour montrer que la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_n$ décroît à partir d'un certain rang, utiliser la fonction $x \in [1\,;+\infty[\longmapsto \frac{\ln x}{x}$.

Réponse : converge.

b) À l'aide de développements limités, obtenir :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{5}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Réponse : converge.

Exercice 3

1) Existence : $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$.

2) Calcul de la somme :

Factoriser le polynôme $Q = \mathrm{X}^3 + 8\mathrm{X}^2 + 17\mathrm{X} + 10$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, en remarquant que -1 est racine, puis décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{Q}$ en éléments simples. On obtient :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\mathrm{X}+1} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{\mathrm{X}+2} + \frac{1}{12}\,\frac{1}{\mathrm{X}+5}.$$

Former ensuite une somme partielle $\sum_{n=0}^{N} u_n$, et télescoper, puis faire tendre N vers l'infini.

Réponse : $S = \dfrac{23}{144}$.

Exercice 4

Soit $\alpha \in [0\,;+\infty[$. Calculer $f'_{\alpha,n}(x)$. Séparer en cas $\alpha > 2$, $\alpha = 2$, $\alpha < 2$.
Pour $\alpha > 2$ et pour $\alpha = 2$, obtenir que la série ne converge pas uniformément sur $[0\,;+\infty[$.

Pour $\alpha < 2$, étudier les variations de $f_{\alpha,n}$.
Si $\alpha < 1$, conclure à la convergence normale, donc uniforme, sur $[0\,;+\infty[$.

Si $\alpha \geqslant 1$, minorer convenablement le reste $R_n(x)$ pour conclure que la série ne converge pas uniformément sur $[0\,;+\infty[$.

Réponse : $\sum_n f_{\alpha,n}$ converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$ si et seulement si $0 \leqslant \alpha < 1$.

Exercice 5

1) Rayon : Règle de d'Alembert.

Réponse : $R = 1$.

2) Somme :

Soit $x \in]-1\,;1[$. Décomposer $\dfrac{1}{4n^2-1}$ en éléments simples et obtenir :

$$S(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x-1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}.$$

Pour calculer cette dernière somme, séparer en cas $0 < x < 1$, $x = 0$, $-1 < x < 0$ et utiliser le changement de variable $t = \sqrt{x}$ ou $t = \sqrt{-x}$.

Réponse : $$S(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}\operatorname{Argth}\sqrt{x} & \text{si } \ 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } \ x = 0 \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x-1}{2\sqrt{-x}}\operatorname{Arctan}\sqrt{-x} & \text{si } \ -1 < x < 0. \end{cases}$$

Exercice 6

Factoriser $x^2 - 7x + 12$, utiliser la formule fondamentale sur le logarithme (sur des nombres *strictement positifs*) et les développements en série entière du Cours. Préciser le rayon du DSE obtenu.

Réponse : $f(x) = \ln 12 - \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{3^n} + \dfrac{1}{4^n}\right)x^n$, $\quad R = 3$.

****