Préparation à l'agrégation interne de mathématiques
Aide à la résolution pour les exercices du mercredi 19 septembre 2007
Jean-Marie Monier

Exercice 1

1) Convergence simple :

Fixer $x \in [0\,;+\infty[$.

Réponse : $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.S.} f$, où $f(x) = 1$ si $0 < x < 1$, $f(x) = 1/2$ si $x = 1$, $f(x) = 0$ si $x > 1$.

2) Convergence uniforme :

Former $||f_n - f||_\infty$ sur $[0\,;1[$, sur $[0\,;a]$ pour $a \in [0\,;1[$ fixé, sur $]1\,;+\infty[$, sur $[b\,;+\infty[$ pour $b \in]1\,;+\infty[$ fixé.

Réponse : $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout $[0\,;a]$ ($a \in [0\,;1[$ fixé), et sur tout $[b\,;+\infty[$ ($b \in]1\,;+\infty[$ fixé), et $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0\,;1[$ ni sur $]1\,;+\infty[$.

Exercice 2

Utiliser le théorème de convergence dominée.

Réponse : *a)* $I_n \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{\pi}{4}$, *b)* $I_n \xrightarrow[n\infty]{} \ln 2$.

Exercice 3

a) 1) Convergence simple :

Si $x \neq 0$, alors $f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}\,\dfrac{1}{n^2}$.

Examiner le cas $x = 0$.

Réponse : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$.

2) Convergence normale :

- Montrer, pour tout $n \geqslant 1$: $||f_n||_\infty = f_n\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big) \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
- Pour tout $a \in]0\,;+\infty[$ fixé, à partir d'un certain rang, $\dfrac{1}{n^{3/2}} \leqslant a$, puis $||f_n||_\infty^{[a\,;+\infty[} = f_n(a)$.

Réponse : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0\,;+\infty[$, mais converge normalement sur tout $[a\,;+\infty[$, $a > 0$ fixé.

3) Convergence uniforme :

Minorer convenablement le reste.

Réponse : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0\,;+\infty[$, mais converge uniformément sur tout $[a\,;+\infty[, a > 0$ fixé.

b) 1) Convergence simple :

Pour $x \in [0\,;+\infty[$ fixé, appliquer le TSCSA.

Réponse : $\displaystyle\sum_n f_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$.

2) Convergence absolue :

Réponse : $\displaystyle\sum_n f_n$ ne converge absolument sur aucune partie non vide de $[0\,;+\infty[$.

3) Convergence normale :

Réponse : $\displaystyle\sum_n f_n$ ne converge normalement sur aucune partie non vide de $[0\,;+\infty[$.

4) Convergence uniforme :

Pour $x \in [0\,;+\infty[$ fixé, comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ relève du TSCSA, majorer convenablement $|R_n(x)|$.

Réponse : $\displaystyle\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 4

a) Pour $x \in D$ fixé, séparer en cas $x < 1,\ x > 1$, et majorer convenablement $f_n(x)$, qui est par ailleurs $\geqslant 0$.

b) Appliquer le théorème du Cours pour dériver la somme d'une série d'applications. On montrera, entre autres, que $\displaystyle\sum_n f'_n$ converge normalement sur tout segment de $[0\,;1[$ et tout segment de $]1\,;+\infty[$.

On obtient :

$$\forall x \in D, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}.$$

En déduire le signe de $S'(x)$, en séparant en cas $x < 1,\ x > 1$.

c) • *Étude en 1 :*

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2n}$, et que la série numérique $\displaystyle\sum_{n,\geqslant 1} \frac{1}{2n}$ est divergente et à termes $\geqslant 0$, revenir aux définitions. Conclure : $S(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} +\infty$.

• *Étude en $+\infty$:*

Appliquer un théorème du Cours pour permuter intégrale et série. Conclure : $S(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

d) Finir l'étude.

****