Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 27 juin 2007

Exercices de révision

Thème : Séries numériques, séries de fonctions, séries entières

1 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

a) $\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n$ *b)* $(n!)^{-\frac{1}{n}}$ *c)* $\ln \operatorname{sh} \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \ln \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *d)* $\dfrac{\operatorname{Argsh} n}{n(\ln n)^2}$ *e)* $\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ *f)* $\left(\mathrm{C}_{5n}^{2n}\right)^{-1}$.

2 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

a) $\dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$ *b)* $\ln \dfrac{n^2+(-1)^n n}{n^2+2}$.

3 Existence et calcul de : $$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3+8n^2+17n+10}.$$

4 On note, pour tout $\alpha \in [0\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_{\alpha,n} : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_{\alpha,n}(x) = \frac{x^\alpha}{x^2+n^2}.$$

Déterminer l'ensemble des $\alpha \in [0\,;+\infty[$ tels que la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1} f_{\alpha,n}$ converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$.

5 Déterminer le rayon de convergence R et la somme S de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{4n^2-1}$ où x est une variable réelle.

6 Former le développement en série entière en 0 de $f : x \longmapsto \ln(x^2-7x+12)$.

* *