Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 19 septembre 2007

Exercices d'entraînement

Thème : Suites et séries de fonctions

1 Étudier (convergence simple, convergence uniforme) la suite d'applications $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^n+1}.$$

2 Déterminer les limites, lorsque l'entier n tend vers l'infini, de :

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^n x}\,\mathrm{d}x \qquad b) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

3 Étudier les convergences (simple, normale, uniforme, absolue) des séries de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ définies par :

a) $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{nx}{1+n^3x^2}.$

b) $f_n : [0\,;+\infty[, \quad x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}.$

4 On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}.$$

a) Montrer que la série d'applications $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $D = [0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

On note S la somme de cette série d'applications.

b) Montrer que S est de classe C^1 sur D et étudier le signe de $S'(x)$ pour $x \in D$.

c) Déterminer les limites de S en 1 et en $+\infty$.

d) Dresser le tableau de variations de S et tracer l'allure de la courbe représentative de S.

* *