Lycée La Martinière Monplaisir

Jean-Marie Monier

Agrégation interne de Mathématiques 2008-2009

Épreuve du samedi 22 novembre 2008

Si un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale sur sa copie et devra poursuivre sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il (elle) est amené(e) à prendre.

I. Une famille d'applications contractantes

1. Montrer que, pour $x \in [0\,;+\infty[$ fixé, l'application

$$\varphi : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \frac{1}{1+x^2+t^2}$$

est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ et que φ' est bornée, et déterminer le réel $C(x)$ défini par :

$$C(x) = \operatorname*{Sup}_{t\in[0\,;+\infty[} |\varphi'(t)|.$$

2. En déduire, en notant $C = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$:

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ \forall\,(s,t) \in [0\,;+\infty[^2, \quad \left|\frac{1}{1+x^2+s^2} - \frac{1}{1+x^2+t^2}\right| \leqslant \frac{C}{(1+x^2)^{3/2}}|s-t|.$$

II. Une première suite d'applications

On considère la suite réelle $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite d'applications $(u_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions suivantes :

(1) $\lambda_0 = 0$

(2) $\forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad u_0(x) = 0$

(3) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \lambda_n$

(4) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(0) = 0$

(5) pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$

(6) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad u'_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1+x^2+\lambda_n^2}.$

1. Montrer l'existence et l'unicité du couple de suites $((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ défini par les conditions ci-dessus.

2. Calculer $u_1(x)$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$.

3. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad 0 \leqslant \lambda_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}\quad \text{et}\quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}.$

4. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad |u'_{n+1}(x) - u'_n(x)| \leqslant \dfrac{C}{(1+x^2)^{3/2}}|\lambda_n - \lambda_{n-1}|,$

le réel C ayant été défini en I 2.

5. En Déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leqslant C|\lambda_n - \lambda_{n-1}|,$

puis : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leqslant C|\lambda_n - \lambda_{n-1}|.$

6. Démontrer que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
On note λ la limite de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$.
On note u la limite uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0\,;+\infty[$.

8. Établir : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad u_{n+1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}$

et : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad \lambda_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}\,\dfrac{\pi}{2}.$

9. Montrer : $\quad \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{\sqrt{1+\lambda^2}}$

et : $\quad \lambda = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1+\lambda^2}}.$

10. Démontrer : $\quad \lambda = \sqrt{\dfrac{\sqrt{1+\pi^2}-1}{2}}.$

III. Une deuxième suite d'applications

On considère la suite d'applications $(v_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les conditions suivantes :

(1) $\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad v_0(x) = 0$

(2) $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n(0) = 0$

(3) pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$

(4) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad v'_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1+x^2+\big(v_n(x)\big)^2}.$

1. Montrer l'existence et l'unicité de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les conditions précédentes.

2. Calculer $v_1(x)$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(x)$ admet, lorsque x tend vers $+\infty$, une limite finie, notée μ_n.

4. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$.
On note v la limite uniforme de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0\,;+\infty[$.

5. Montrer que v est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\quad v'(x) = \frac{1}{1+x^2+\big(v(x)\big)^2}.$$

IV. Un problème de Cauchy

On considère le problème de Cauchy (C) suivant : $y' = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ et $y(0) = 0$,
où la variable (réelle) est notée x et la fonction inconnue (à valeurs réelles) est notée y.

1. Montrer que (C) admet une solution maximale et une seule, encore notée y.
Que peut-on dire de l'intervalle de définition I de y ?
Que peut-on dire de toute solution de (C), vis-à-vis de la solution maximale y ?

2. Établir que I est symétrique par rapport à 0 et que y est impaire.
On pourra, à cet effet, considérer $J = \{x \in \mathbb{R}\,; -x \in I\}$ et $z : J \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto\ -y(-x)$.
On note dorénavant encore y la restriction de l'application précédente à $I \cap [0\,;+\infty[$.

3. Montrer que y est strictement croissante, à valeurs $\geqslant 0$, majorée.

4. Établir que l'extrémité droite de l'intervalle de définition de y est $+\infty$.

5. Démontrer que y admet en $+\infty$ une limite finie, notée ℓ, et que : $0 < \ell < \dfrac{\pi}{2}$.

6. Montrer que y est de classe C^∞ et concave sur $[0\,;+\infty[$.

7. Tracer l'allure de la courbe représentative de y.
On précisera la demi-tangente en O et la concavité.
Le réel ℓ n'est pas connu.

8. Montrer que y admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 et calculer celui-ci.

9. On note : $\quad w_1 :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto y\Big(\dfrac{1}{x}\Big).$

9.a. Montrer que w_1 est de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[, \quad w_1'(x) = -\frac{1}{1+x^2+x^2\big(w_1(x)\big)^2}.$$

On note : $\quad w : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto w(x) = \begin{cases} w_1(x) & \text{si } \ x \neq 0 \\ \ell & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$

9.b. Montrer que w est de classe $\cancel{C^\infty}$ C^1 sur $[0\,;+\infty[$ et que w est solution, sur $[0\,;+\infty[$, du problème de Cauchy Γ suivant : $\;w' = -\dfrac{1}{1+x^2+x^2w^2}\;$ et $\;w(0) = \cancel{0}\ \ell.$

9.c. Est-ce que w admet un prolongement dérivable à $\mathbb{R}$ qui soit pair ? qui soit impair ?

9.d. Montrer que w admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 et déterminer celui-ci (des coefficients dépendent de ℓ).

9.e. Former un développement asymptotique de $y(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, à la précision $o\Big(\dfrac{1}{x^4}\Big)$.

V. Non-égalité de λ et ℓ

Le réel λ a été défini en II 6.
Le réel ℓ a été défini en IV 5.
L'application y a été définie en IV 1 et 2.

On note $\quad Y : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+\ell^2}}\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{\sqrt{1+\ell^2}}$

et $\;z = y - Y.$

1. Montrer : $\qquad \forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad z'(x) > 0.$

2. En déduire : $\qquad \ell - \dfrac{\pi}{2\sqrt{1+\ell^2}} > 0.$

3. Montrer : $\;\ell \neq \lambda.$
Est-ce que $\;\ell > \lambda,\;$ ou $\;\ell < \lambda$?

* *