Préparation à l'agrégation interne de Mathématiques 2008-2009

Jean-Marie Monier

Corrigé de l'épreuve d'entraînement du 22 novembre 2008

I.

1. Par opérations, l'application φ est de classe C^2 (donc C^1) sur $[0\,;+\infty[$, et, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

$$\varphi'(t) = \frac{-2t}{(1+x^2+t^2)^2} = -2t(1+x^2+t^2)^{-2},$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= -2(1+x^2+t^2)^{-2} - 2t(-2)(1+x^2+t^2)^{-3}2t \\ &= 2(1+x^2+t^2)^{-3}\big(-(1+x^2+t^2)+4t^2\big) = 2(1+x^2+t^2)^{-3}\big(3t^2-(1+x^2)\big).\end{aligned}$$

On en déduit le tableau des variations de φ' :

t	0		$\frac{\sqrt{1+x^2}}{3}$		$+\infty$
$\varphi''(t)$		$-$	0	$+$	
$\varphi'(t)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Il en résulte :

$$\begin{aligned}\operatorname*{Sup}_{t\in[0\,;+\infty[} |\varphi'(t)| &= -\varphi'\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{3}}\right) = 2\sqrt{\frac{1+x^2}{3}}\left(1+x^2+\frac{1+x^2}{3}\right)^{-2} \\ &= 2\sqrt{\frac{1+x^2}{3}}\left(\frac{4}{3}(1+x^2)\right)^{-2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{9}{16}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

On conclut :

$$\boxed{C(x) = \frac{3\sqrt{3}}{8}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}}$$

2. Soient $x \in [0\,;+\infty[,\ (s,t) \in [0\,;+\infty[^2$ fixés.
Puisque φ est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à φ sur le segment joignant s et t :

$$\left|\frac{1}{1+x^2+s^2} - \frac{1}{1+x^2+t^2}\right| = |\varphi(s)-\varphi(t)| \leqslant \underbrace{\Big(\operatorname*{Sup}_{u\in[0\,;+\infty[} |\varphi'(u)|\Big)}_{=C(x)}|s-t| = \frac{3\sqrt{3}}{8}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}|s-t|.$$

En notant $C = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, on conclut :

$$\boxed{\forall x \in [0\,;+\infty[,\ \forall (s,t) \in [0\,;+\infty[^2,\quad \left|\frac{1}{1+x^2+s^2} - \frac{1}{1+x^2+t^2}\right| \leqslant \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}|s-t|}$$

II.

1. Récurrence sur n.

• (λ_0, u_0) existe et est unique : $\lambda_0 = 0,\ u_0 = 0$, et on a bien : $u_0(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$.

• Supposons que (λ_n, u_n) existe et est unique, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

L'application $[0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2+\lambda_n^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, donc admet une primitive et une seule qui s'annule en 0, d'où l'existence et l'unicité de $u_{n+1} : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} u_{n+1}(0) = 0 \\ u_{n+1} \text{ est } C^1 \text{ sur } [0\,;+\infty[\\ \forall\, x \in [0\,;+\infty[,\quad u'_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1+x^2+\lambda_n^2}. \end{cases}$$

On a : $$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\quad 0 \leqslant u'_{n+1}(x) = \frac{1}{1+x^2+\lambda_n^2} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Comme $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$, par théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, u'_{n+1} est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, donc :

$$u_{n+1}(X) = \int_0^X u'_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \underset{X \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} u'_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ceci montre l'existence de $\lambda_{n+1} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} u_{n+1}(x)$, l'unicité étant évidente par ailleurs.

Ainsi, il existe (λ_{n+1}, u_{n+1}) unique convenant.

On conclut, par récurrence sur n, à l'existence et l'unicité du couple de suites $\big((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ défini par les conditions de l'énoncé.

De plus, on peut remarquer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0\,;+\infty[,\quad u_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2+\lambda_n^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. On a : $$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\quad u_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\operatorname{Arctan} t]_0^x = \operatorname{Arctan} x.$$

3. • La propriété est évidente pour $n = 0$, puisque $\lambda_0 = 0$ et $u_0 = 0$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2+\lambda_n^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2},$$

puis, en passant à la limite lorsque $x \longrightarrow +\infty$: $0 \leqslant \lambda_{n+1} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

On conclut :
$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0\,;+\infty[,\quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, en utilisant I 2. :

$$|u'_{n+1}(x) - u'_n(x)| = \left| \frac{1}{1+x^2+\lambda_n^2} - \frac{1}{1+x^2+\lambda_{n-1}^2} \right| \leqslant \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} |\lambda_n - \lambda_{n-1}|.$$

5. • On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| = \left| \int_0^x \big(u'_{n+1}(t) - u'_n(t)\big)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x |u'_{n+1}(t) - u'_n(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_0^x \frac{C}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} |\lambda_n - \lambda_{n-1}|\,\mathrm{d}t = C|\lambda_n - \lambda_{n-1}| \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t \leqslant C|\lambda_n - \lambda_{n-1}| \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t}_{\text{notée } J}.$$

Calculons J, par le changement de variable $u = \operatorname{Argsh} t,\ t = \operatorname{sh} u,\ \mathrm{d}t = \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$:

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^3 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\,\mathrm{d}u = [\operatorname{th} u]_0^{+\infty} = 1.$$

On conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leqslant C|\lambda_n - \lambda_{n-1}|.$$

• On déduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, par passage à la limite en faisant tendre x vers $+\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leqslant C|\lambda_n - \lambda_{n-1}|.$$

6. D'après le deuxième résultat de II 5., par récurrence immédiate, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leqslant C^n|\lambda_1 - \lambda_0|.$$

Comme $C = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \in [0\,;1[$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} C^n$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |\lambda_{n+1} - \lambda_n|$ converge. Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ converge absolument, donc converge. D'après le lien suite/série, on conclut :

$$\boxed{\text{La suite } (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$$

7. D'après le premier résultat de II 5., par récurrence immédiate, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad ||u_{n+1} - u_n||_\infty \leqslant C^n|\lambda_1 - \lambda_0|.$$

Comme $C \in [0\,;1[$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} C^n$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} ||u_{n+1} - u_n||_\infty$ converge. Ainsi, la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ est normalement convergente sur $[0\,;+\infty[$, donc uniformément convergente.

D'après le lien suite/série pour la convergence uniforme, on conclut :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [0\,;+\infty[}$$

8. • On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2+\lambda_n^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n^2}} \int_0^x \frac{\mathrm{d}\Big(\dfrac{t}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}\Big)}{1+\Big(\dfrac{t}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}\Big)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n^2}} \operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}.$$

• Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, en faisant tendre x vers $+\infty$, on déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}\,\frac{\pi}{2}.$$

9. • Puisque $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, donc simplement, vers u, on déduit, pour $x \in [0\,;+\infty[$ fixé, en passant à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini, dans le résultat de II 8. :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad u(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

• De même, en passant à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini, dans le deuxième résultat de II 8., on obtient :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,\frac{\pi}{2}.$$

10. On a :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,\frac{\pi}{2} \iff \lambda^2(1+\lambda^2) = \frac{\pi^2}{4} \iff 4\lambda^4 + 4\lambda^2 = \pi^2$$

$$\iff (2\lambda^2+1)^2 = \pi^2+1 \iff 2\lambda^2+1 = \sqrt{\pi^2+1} \iff \lambda = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\pi^2}-1}{2}},$$

car $\lambda \geqslant 0$.

III.

1. Récurrence sur n.

• v_0 existe et est unique : $v_0 = 0$, $v_0(0) = 0$, v_0 est C^1 sur $[0\,;+\infty[$.

• Supposons que v_n existe et est unique.

L'application $[0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2+\big(v_n(x)\big)^2}$ est continue (car v_n est C^1, donc C^0), donc admet une primitive et une seule s'annulant en 0, d'où l'existence et l'unicité de l'application $v_{n+1} : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $v_{n+1}(0) = 0$ et que :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad v'_{n+1}(x) = \frac{1}{1+x^2+\big(v_n(x)\big)^2}.$$

Ceci montre l'existence et l'unicité de v_{n+1} convenant.

On conclut, par récurrence sur n, qu'il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unique convenant.

De plus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad v_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2+\big(v_n(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. On a, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$: $\ v_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Arctan} x.$

3. • On a : $v_0(x) = 0 \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $v_0(x)$ admet une limite finie $\mu_0 = 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
On a :

$$\forall t \in [0\,;+\infty[,\quad 0 \leqslant \frac{1}{1+t^2+\big(v_n(t)\big)^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

Comme l'application $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, par théorème de majoration pour des fonctions $\geqslant 0$, l'application continue $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+\big(v_n(t)\big)^2}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

Il en résulte :

$$v_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2+\big(v_n(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+\big(v_n(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t,\quad \text{notée } \mu_{n+1}.$$

Ainsi, $v_{n+1}(x)$ admet une limite finie lorsque $x \longrightarrow +\infty$.
On a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(x)$ admet une limite finie, notée μ_n, lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

4. *1)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

• On a, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}|v'_{n+1}(x) - v'_n(x)| &= \left|\frac{1}{1+x^2+\big(v_n(x)\big)^2} - \frac{1}{1+x^2+\big(v_{n-1}(x)\big)^2}\right| \\ &\leqslant \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}|v_n(x) - v_{n-1}(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}||v_n - v_{n-1}||_\infty.\end{aligned}$$

• D'où, en intégrant de 0 à x, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}|v_{n+1}(x) - v_n(x)| &= \left|\int_0^x \big(v'_{n+1}(t) - v'_n(t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |v'_{n+1}(t) - v'_n(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \Big(\int_0^x \frac{C}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t\Big)||v_n - v_{n-1}||_\infty \leqslant C\underbrace{\Big(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t\Big)}_{=1,\ cf. II5.}||v_n - v_{n-1}||_\infty.\end{aligned}$$

Il en résulte, en passant à la borne supérieure lorsque x décrit $[0\,;+\infty[$:

$$||v_{n+1} - v_n||_\infty \leqslant C||v_n - v_{n-1}||_\infty.$$

2) On termine comme en II 7., et on conclut que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$.

5. • On a vu :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad |v'_{n+1}(x) - v'_n(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}||v_n - v_{n-1}||_\infty \leqslant C||v_n - v_{n-1}||_\infty,$$

d'où, en passant à la borne supérieure lorsque x décrit $[0\,;+\infty[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad ||v'_{n+1} - v'_n||_\infty \leqslant C||v_n - v_{n-1}||_\infty.$$

Puisque la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||v_n - v_{n-1}||_\infty$ converge (cf. la solution de III 4.), par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||v'_{n+1} - v'_n||_\infty$ converge. Il en résulte, comme en III 4., que la suite $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$.

• Puisque :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \text{ est } C^1 \text{ sur } [0\,;+\infty[\\ (v'_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [0\,;+\infty[\\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement (car uniformément) sur } [0\,;+\infty[, \end{cases}$$

d'après un théorème du cours, v est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$.
De plus, on a, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v'_{n+1}(x) = \frac{1}{1 + x^2 + \big(v_n(x)\big)^2},$$

donc, en faisant tendre l'entier n vers l'infini, puisque $v_n(x) \underset{n\infty}{\longrightarrow} v(x)$ et $v'_n(x) \underset{n\infty}{\longrightarrow} v'(x)$ (car la convergence uniforme entraîne la convergence simple), on conclut :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad v'(x) = \frac{1}{1 + x^2 + \big(v(x)\big)^2}.$$

IV.

1. L'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^2$, et $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, donc, d'après le théorème de Cauchy et Lipschitz (non linéaire) le problème de Cauchy (C) admet une solution maximale et une seule, encore notée y, l'intervalle de définition de y est ouvert, et toute solution de (C) est restriction de y.

2. Notons $J = \{x \in \mathbb{R}\,;\, -x \in I\}$ le symétrisé de I, et $z : J \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto z(x) = -y(-x)$.
L'application z est dérivable sur J (par composition, puisque y est dérivable sur I), on a $z(0) = -y(0) = 0$, et, pour tout $x \in J$:

$$z'(x) = y'(-x) = \frac{1}{1 + (-x)^2 + \big(y(-x)\big)^2} = \frac{1}{1 + x^2 + \big(z(x)\big)^2}.$$

Ceci montre que z est solution de (C) sur J.
Il en résulte que z est restriction de la solution maximale y, c'est-à-dire :

$$J \subset I \qquad \text{et} \qquad \forall x \in J,\quad z(x) = y(x).$$

• En notant $I =]\alpha\,;\beta[$ où $-\infty \leqslant \alpha < 0 < \beta \leqslant +\infty$, on a :

$$J \subset I \iff]-\beta\,;-\alpha[\subset]\alpha\,;\beta[\iff \big(\alpha \leqslant -\beta \quad \text{et} \quad -\alpha \leqslant \beta\big) \iff \beta = -\alpha.$$

On déduit : $I =]-\alpha\,;\alpha[$, donc I est symétrique par rapport à 0.

• Et : $\forall x \in I,\ \ y(x) = z(x) = -y(-x)$, donc y est impaire.

3. • L'application y est dérivable sur l'intervalle I et :

$$\forall x \in I,\ \ y'(x) = \frac{1}{1 + x^2 + \big(y(x)\big)^2} > 0,$$

donc y est strictement croissante sur I.

• On a de plus $y(0) = 0$, donc y est à valeurs $\geqslant 0$ (sur $I \cap [0\,;+\infty[$).

• On a, pour tout $x \in I \cap [0\,;+\infty[$:

$$y'(x) = \frac{1}{1 + x^2 + \big(y(x)\big)^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2},$$

d'où, en intégrant, pour tout $x \in I \cap [0\,;+\infty[$:

$$y(x) = y(0) + \int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Arctan} x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

ce qui montre que y est majorée.

4. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $b \in]0\,;+\infty[$ tel que : $I \cap [0\,;+\infty[= [0\,;b[$.
Puisque y est croissante et majorée, y admet en b^- une limite finie, notée L.
Considérons l'application

$$Y : [0\,;b] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \begin{cases} y(x) & \text{si} \quad x \neq b \\ L & \text{si} \quad x = b. \end{cases}$$

Puisque y est continue sur $[0\,;b[$ et que $y(x) \underset{x \longrightarrow b^-}{\longrightarrow} L$, Y est continue sur $[0\,;b]$.
D'autre part, Y, qui coïncide avec y sur $[0\,;b[$, est dérivable sur $[0\,;b[$ et :

$$\forall x \in [0\,;b[,\ \ Y'(x) = y'(x) = \frac{1}{1 + x^2 + \big(y(x)\big)^2}.$$

Puisque y est continue sur $[0\,;b[$ (car dérivable), par opérations, Y' est continue sur $[0\,;b[$, donc Y est de classe C^1 sur $[0\,;b[$.
Enfin :

$$y'(x) = \frac{1}{1 + x^2 + \big(y(x)\big)^2} \underset{x \longrightarrow b^-}{\longrightarrow} \frac{1}{1 + b^2 + L^2},$$

donc Y' admet en b^- une limite finie.
D'après le théorème limite de la dérivée, on déduit que Y est de classe C^1 sur $[0\,;b]$ et que $Y'(b) = \dfrac{1}{1 + b^2 + L^2}$.
Mais alors, Y est solution de (C) sur $[0\,;b]$, ce qui contredit la maximalité de y.

Ce raisonnement par l'absurde montre que l'extrémité droite de I n'est pas un réel, donc est $+\infty$.

5. Puisque y est croissante et majorée, y admet en $+\infty$ une limite finie notée ℓ.
De plus, comme on l'a vu en 3., pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$0 \leqslant y(x) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

On déduit, par passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$: $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

On a, par exemple : $\ell \geqslant y(1) > 0$, donc $\ell > 0$.
Si $\ell = \dfrac{\pi}{2}$, alors, en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'encadrement obtenu plus haut, on déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+\big(y(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

contradiction, car l'application $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{1+t^2+\big(y(t)\big)^2}$ est continue, à valeurs $\geqslant 0$ et n'est pas l'application nulle.
On a donc $\ell \neq \dfrac{\pi}{2}$.
Finalement :

$$\boxed{0 < \ell < \frac{\pi}{2}}$$

6. *1)* Récurrence.

• Puisque y est dérivable, donc continue, $\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ est continue, donc y' est continue, y est C^1.

• Si y est C^n, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ est C^n, y' est C^n, y est C^{n+1}.

On conclut :

$$\boxed{y \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } [0\,;+\infty[}$$

2) Ainsi, y est C^2 et : $y'' = -\dfrac{2x+2yy'}{(1+x^2+y^2)^2} \leqslant 0$, car $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y' \geqslant 0$.
On conclut que y est concave sur $[0\,;+\infty[$.

7. On a : $y'(0) = \dfrac{1}{1+0^2+0^2} = 1$.

8. Puisque y est de classe C^∞ sur $[0\,;+\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$), d'après le théorème de Taylor-Young, y admet un développement limité à tout ordre, y' aussi, et on passe du premier au second par dérivation terme à terme.

En particulier, y admet un $DL_5(0)$. De plus, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, et y est impaire (sur $\mathbb{R}$).

Le $DL_5(0)$ de y est donc de la forme :

$$y(x) = x + ax^3 + bx^5 + \underset{x \longrightarrow 0}{o}(x^5), \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2,$$

et on a :

$$y'(x) = 1 + 3ax^2 + 5bx^4 + o(x^4).$$

On reporte dans l'équation différentielle, présentée plutôt sous forme d'un produit que d'un quotient :

$$\begin{aligned}
& y' = \frac{1}{1+x^2+y^2} \\
\iff\quad & (1+x^2+y^2)y' = 1 \\
\iff\quad & \Big(1 + x^2 + \big(x + ax^3 + bx^5 + o(x^5)\big)^2\Big)\big(1 + 3ax^2 + 5bx^4 + o(x^4)\big) = 1 \\
\iff\quad & \big(1 + 2x^2 + 2ax^4 + o(x^4)\big)\big(1 + 3ax^2 + 5bx^4 + o(x^4)\big) = 1 \\
\iff\quad & 1 + (3a+2)x^2 + (5b+8a)x^4 + o(x^4) = 0 \\
\iff\quad & \begin{cases} 3a+2 = 0 \\ 5b+8a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\dfrac{2}{3} \\[2ex] b = \dfrac{16}{15}. \end{cases}
\end{aligned}$$

en utilisant l'unicité du $DL_4(0)$ de l'application nulle.

On conclut que y admet le $DL_5(0)$ suivant :

$$\boxed{y(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + \underset{x \longrightarrow 0}{o}(x^5)}$$

9.a. Puisque $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$ et à valeurs dans $]0\,;+\infty[$ et que y est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$, par composition, w_1 est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$:

$$w_1'(x) = -\frac{1}{x^2}y'\Big(\frac{1}{x}\Big) = -\frac{1}{x^2}\,\frac{1}{1 + \Big(\dfrac{1}{x}\Big)^2 + \Big(y\Big(\dfrac{1}{x}\Big)\Big)^2} = -\frac{1}{x^2 + 1 + x^2\big(w_1(x)\big)^2}.$$

9.b. Puisque $w(x) = w_1(x) = y\Big(\dfrac{1}{x}\Big) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} \ell = w(0)$, w est continue en 0.

L'application w est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$

On a :
$$w'(x) = -\frac{1}{x^2 + 1 + x^2\big(w(x)\big)^2} \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} -1.$$

Il en résulte, d'après le théorème limite de la dérivée, que w est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ et que $w'(0) = -1$.

Ainsi, w est C^1 sur $[0\,;+\infty[$, $w(0)=\ell$, et :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\quad w'(x) = -\frac{1}{x^2+1+x^2\big(w(x)\big)^2}.$$

Il s'ensuit que w est solution sur $[0\,;+\infty[$ du problème de Cauchy (Γ) suivant :

$$w' = -\frac{1}{x^2+1+x^2w^2} \qquad \text{et} \qquad w(0)=\ell.$$

9.c. Supposons que w admette un prolongement dérivable W à $\mathbb{R}$, qui soit pair ou impair.
Puisque $w(0)=\ell\neq 0$, W n'est pas impaire, et donc, d'après notre hypothèse, W est paire.
Puisque W est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$, W' est impaire, donc $W'(0)=0$, contradiction avec $w'(0)=-1$.
On conclut que w n'admet aucun prolongement dérivable à $\mathbb{R}$ qui soit pair ou impair.

9.d. Puisque w est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et vérifie $w' = -\dfrac{1}{1+x^2+x^2w^2}$, comme en IV 6., w est de classe C^∞ sur $[0\,;+\infty[$.
D'après le théorème de Taylor-Young, w admet donc un développement limité à tout ordre, w' aussi, et on passe du premier au second par dérivation terme à terme. En particulier, w admet un $DL_4(0)$. De plus, $w(0)=\ell$ et $w'(0)=-1$. Il existe donc $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$w(x) = \ell - x + \alpha x^2 + \beta x^3 + \delta x^4 + \underset{x\,\longrightarrow\,0}{o}(x^4)$$

et on a :

$$w'(x) = -1 + 2\alpha x + 3\beta x^2 + 4\gamma x^3 + o(x^3).$$

On reporte dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}
& w' = -\frac{1}{1+x^2+x^2w^2}\\
\Longleftrightarrow\quad & (1+x^2+x^2w^2)w' + 1 = 0\\
\Longleftrightarrow\quad & \Big(1+x^2+x^2\big(\ell^2-2\ell x+o(x)\big)\Big)\big(-1+2\alpha x+3\beta x^2+4\gamma x^3+o(x^3)\big)+1=0\\
\Longleftrightarrow\quad & \big(1+(1+\ell^2)x^2-2\ell x^3+o(x^3)\big)\big(-1+2\alpha x+3\beta x^2+4\gamma x^3+o(x^3)\big)+1=0\\
\Longleftrightarrow\quad & 2\alpha x + \big(3\beta-(1+\ell^2)\big)x^2 + \big(4\gamma+2\alpha(1+\ell^2)+2\ell\big)x^3 + o(x^3) = 0\\
\Longleftrightarrow\quad & \begin{cases} 2\alpha = 0\\ 3\beta-(1+\ell^2)=0\\ 4\gamma+2\alpha(1+\ell^2)+2\ell=0\end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\alpha=0,\quad \beta=\frac{1+\ell^2}{3},\quad \gamma=-\frac{\ell}{2}\Big).
\end{aligned}$$

On conclut au développement limité à l'ordre quatre en 0 suivant de w :

$$\boxed{w(x) = \ell - x + \frac{1+\ell^2}{3}x^3 - \frac{\ell}{2}x^4 + \underset{x\,\longrightarrow\,0}{o}(x^4)}$$

9.e. On a alors, en utilisant la définition de w :

$$y(x) = w\Big(\frac{1}{x}\Big) = \ell - \frac{1}{x} + \frac{1+\ell^2}{3}\frac{1}{x^3} - \frac{\ell}{2}\frac{1}{x^4} + \underset{x\,\longrightarrow\,+\infty}{o}\Big(\frac{1}{x^4}\Big).$$

V.

1. Puisque y est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ (cf. IV 6.) et que Y est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ (par opérations), $z = y - Y$ est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ par différence, et, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$z'(x) = y'(x) - Y'(x) = \frac{1}{1 + x^2 + \big(y(x)\big)^2} - \frac{1}{\sqrt{1+\ell^2}} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+\ell^2}}}{1 + \Big(\dfrac{x}{\sqrt{1+\ell^2}}\Big)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2 + \big(y(x)\big)^2} - \frac{1}{1 + x^2 + \ell^2} = \frac{\ell^2 - \big(y(x)\big)^2}{\Big(1 + x^2 + \big(y(x)\big)^2\Big)(1 + x^2 + \ell^2)}.$$

On a vu en IV 3. et 5. que y est $\geqslant 0$, strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, de limite ℓ en $+\infty$, donc :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad 0 \leqslant y(x) < \ell,$$

d'où :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad \ell^2 - \big(y(x)\big)^2 > 0$$

et donc :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad z'(x) > 0.$$

2. D'après 1., z est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. D'autre part : $z(0) = 0$.

Enfin, d'après IV 5., $y(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell$, et $Y(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{1+\ell^2}} \dfrac{\pi}{2}$, donc :

$$z(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell - \frac{\pi}{2\sqrt{1+\ell^2}}.$$

Il en résulte :

$$\ell - \frac{\pi}{2\sqrt{1+\ell^2}} > 0.$$

3. • D'après II 9., on a : $\lambda = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1+\lambda^2}}$, d'où nécessairement : $\ell \neq \lambda$.

• Considérons l'application $\psi : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto t - \dfrac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}$.

L'application ψ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

$$\psi'(t) = 1 - \frac{\pi}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)(1+t^2)^{-3/2}2t = 1 + \frac{\pi t}{2}(1+t^2)^{-3/2} > 0.$$

Ainsi, ψ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Comme $\psi(\ell) > 0$ (cf. 2.) et $\psi(\lambda) = 0$ (cf. II 10), on conclut finalement :

$$\boxed{\ell > \lambda}$$

* *