Lycée La Martinière Monplaisir

Jean-Marie Monier

Préparation à l'Agrégation Interne de Mathématiques 2009-2010

Épreuve du samedi 21 novembre 2009

Si un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) la signale sur sa copie et devra poursuivre sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il (elle) est amené(e) à prendre.

I. Fonction Γ d'Euler

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$ si et seulement si $x > 0$.

On note $\Gamma :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall\, x \in]0;+\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\ .$$

2.a. Établir : $\qquad \forall\, x \in]0;+\infty[, \quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\,.$

2.b. En déduire : $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!\ .$

3.a. Démontrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in]0;+\infty[, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

3.b. Montrer : $\qquad \Gamma(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}.$

3.c. Dresser le tableau des variations de Γ. On montrera qu'il existe x_0 tel que Γ soit strictement décroissante sur $]0;x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0;+\infty[$, et que $x_0 \in]1;2[$.

3.d. Tracer la courbe représentative de Γ.

II. Constante γ d'Euler

On note pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, $\ w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\ - \frac{1}{n}.$

1. Montrer : $\qquad \forall\, n \geqslant 2, \quad \displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k = 1 + \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$

2. Établir, pour tout $n \geqslant 2$: $\qquad$ **a.** $0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ $\qquad$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k \leqslant 1.$

3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} w_n$ converge.

En notant $\gamma = 1 - \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} w_n\,,$ on a donc : $\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\infty}{o}(1).$

III. Fonction ζ de Riemann et fonction T

On note, pour $x \in]1;+\infty[$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Montrer que ζ est définie et de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$, et exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\zeta^{(k)}$ comme somme d'une série.

2. Étudier les variations et la convexité de ζ.

On note, pour $x \in]0;+\infty[$, $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

3. Montrer que T est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

4. Montrer : $\forall\, x \in]1;+\infty[, \quad T(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$.

5. Montrer : $\zeta(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$ et en déduire la limite de ζ en 1.

6. Montrer : $\zeta(x) = 1 + 2^{-x} + \underset{x \longrightarrow +\infty}{o}(2^{-x})$ et $T(x) = -1 + 2^{-x} + \underset{x \longrightarrow +\infty}{o}(2^{-x})$.
Quelles sont les limites de ζ et de T en $+\infty$?

7. Dresser le tableau de variation de ζ et tracer sa courbe représentative.

IV. Formule de Gauss et formule de Weierstrass

Soit $x \in]0;+\infty[$.

1. Démontrer:

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t \underset{n\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$

Indication: On pourra envisager la suite d'applications $(f_n :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R})_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0;n[\\ 0 & \text{si } t \in [n;+\infty[. \end{cases}$$

2. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \,\mathrm{d}u = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

3. En déduire la formule de Gauss : $\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)$.

4. Établir la formule de Weierstrass : $x\mathrm{e}^{\gamma x} \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\Gamma(x)}$.

V. Fonction ψ

On note $\psi :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

1. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad g_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

Montrer que la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$, et que, pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = -(\ln\Gamma(x) + \ln x + \gamma x).$$

2. Démontrer :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+n)}.$$

3. En déduire :

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t \,\mathrm{d}t = -\gamma \quad \text{et} \quad \Gamma'(2) = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t = 1-\gamma.$$

4. Montrer que ψ est strictement croissante et concave sur $]0\,;+\infty[$.

5. Établir : $\psi(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \ln x$ et en déduire la limite de ψ en $+\infty$.

VI. Formule des compléments

Pour $x \in]0;1[$, on note $F_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique telle que :

$$\forall t \in [-\pi;\pi], \quad F_x(t) = \cos xt.$$

1. Justifier, pour $x \in]0;1[$ fixé, l'existence des coefficients de Fourier trigonométriques de F_x, et les calculer.

2. Étudier la convergence de la série de Fourier de F_x pour $x \in]0;1[$ et déterminer sa somme.

3. En déduire : $$\forall x \in]0;1[, \quad \frac{1}{\pi x} - \operatorname{cotan}\pi x = \frac{2x}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-x^2}.$$

4. Établir : $$\forall x \in]0;1[, \quad \prod_{k=1}^{n}\left(1-\left(\frac{x}{k}\right)^2\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin\pi x}{\pi x}.$$

5. En déduire la formule des compléments :

$$\forall\, x \in]0;1[, \quad \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

6. Déduire de 5. :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

7.a. Calculer les intégrales :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln \sin \pi x\,\mathrm{d}x \quad \text{ et } \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \cos \pi x\,\mathrm{d}x$$

(on pourra faire intervenir l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln \sin \pi x\,\mathrm{d}x$).

7.b. En déduire :

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

$* - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - *$