Préparation à l'agrégation interne de Mathématiques 2009-2010

Jean-Marie Monier

Corrigé de l'épreuve d'entraînement du 21 novembre 2009

I. Fonction Γ d'Euler

1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue et $\geqslant 0$ sur $]0\,;+\infty[$.
On a $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t \longrightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t \longmapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0\,;1]$ si et seulement si $x-1>-1$, c'est-à-dire $x>0$.
D'autre part, $t^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc l'application $t \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
Finalement, l'application $t \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ si et seulement si $x>0$.

2.a. Soit $x \in]0\,;+\infty[$. On a, pour tout $0<\varepsilon \leqslant T$, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^T t^{(x+1)-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^T t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_\varepsilon^T - \int_\varepsilon^T -xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -T^x\mathrm{e}^{-T} + \varepsilon^x\mathrm{e}^{-\varepsilon} + x\int_\varepsilon^T t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $t \longmapsto t^x\mathrm{e}^{-t}$ et $t \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ sont intégrables sur $]0\,;+\infty[$, et que $T^x\mathrm{e}^{-T} \underset{T \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ (par prépondérance de l'exponentielle sur les puissances) et $\varepsilon^x\mathrm{e}^{-\varepsilon} \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ (car $x>0$), on déduit, en faisant tendre T vers $+\infty$ et ε vers 0 :

$$\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$

2.b. Récurrence sur n.
• Pour $n=0$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!\,.$$

• Si $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour un entier n tel que $n \geqslant 1$, alors, en utilisant 2.a. : $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!\,$.
On conclut :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!}$$

3.a. Notons $F :]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$F(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}.$$

D'après les théorèmes généraux, F, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, ... , $\dfrac{\partial^k F}{\partial x^k}$,... existent et sont continues sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$, et :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\,(x,t) \in]0\,;+\infty[\times]0;+\infty[,\quad \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,.$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a \leqslant 1 \leqslant b$. Notons, pour $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_{[a;b],k} :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall\, t \in]0\,;+\infty[,\ \ \varphi_{[a;b],k}(t) = |\ln t|^k \mathrm{Max}\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right)\mathrm{e}^{-t}.$$

On a alors :

$$\forall\,(x,t) \in [a;b]\times]0\,;+\infty[,\quad \left|\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{[a;b],k}(t),$$

et $\varphi_{[a;b],k}$ est continue, $\geqslant 0$, intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Ceci montre que $F, \dfrac{\partial F}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^k F}{\partial x^k}, \ldots$ vérifient l'hypothèse de domination locale.
D'après un théorème du Cours, il en résulte que Γ est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$ et que :

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ \ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

3.b. On a, pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ et $\Gamma(x+1) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} \Gamma(1) = 0! = 1$, , car Γ est continue en 1.
On conclut :

$$\boxed{\Gamma(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}}$$

3.c. et **3.d.** D'après 3.a. :

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ \ \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t > 0,$$

donc Γ' est strictement croissante, et Γ est convexe.
Puisque $\Gamma(1) = 0! = 1$ et $\Gamma(2) = 1! = 1 = \Gamma(1)$, le théorème de Rolle montre qu'il existe $x_0 \in]1\,;2[$, unique, tel que $\Gamma'(x_0) = 0$.
Comme Γ' est strictement croissante et que $\Gamma'(x_0) = 0$, on a :

$$\begin{cases} \forall\, x \in]0\,;x_0[,\ \ \Gamma'(x) < 0 \\ \forall\, x \in]x_0\,;+\infty[,\ \ \Gamma'(x) > 0 \end{cases}$$

donc Γ est strictement décroissante sur $]0\,;x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0\,;+\infty[$.
Comme Γ est strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$, et que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\Gamma(n) = (n-1)! \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a :

$$\boxed{\Gamma(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

On peut enfin dresser le tableau des variations de Γ et tracer sa courbe représentative.

II. Constante γ d'Euler

1. On a, pour tout entier $n \geqslant 2$: :

$$\sum_{k=2}^{n} w_k = \sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{k}\right) = \left(\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = \int_{1}^{n}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + 1 = \ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + 1.$$

2.a. Puisque $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[n-1\,;n]$, on a : $\forall t \in [n-1\,;n],\ \ \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{n-1}$,

donc : $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n-1}^{n}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n-1}^{n}\frac{1}{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n-1}$, d'où : $0 \leqslant w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

2.b. En utilisant un télescopage : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k \leqslant \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1.$

3. Puisque $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} w_n$ est une série à termes réels $\geqslant 0$ et que les sommes partielles sont majorées (par 1, d'après 2.b.), d'après le lemme fondamental, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} w_n$ converge.

On a donc, en faisant tendre n vers l'infini dans le résultat de 1. : $\displaystyle\lim_{n\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} w_k$, noté γ,

et donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\infty}{o}(1)}$$

III. Fonction ζ de Riemann et fonction T

1. • Pour $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$ (exemple de Riemann), donc ζ est définie sur $]1\,;+\infty[$.

• Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'application $f_n :]1\,;+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{1}{n^x} = \mathrm{e}^{-x\ln n}$ est de classe C^∞ sur $]1\,;+\infty[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]1\,;+\infty[,\ \ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}\,.$$

Soit $a \in]1\,;+\infty[$ fixé. Puisque les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\ln n)^k}{n^a}$ $(k \in \mathbb{N})$ sont convergentes, les séries d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n^{(k)}$ sont normalement convergentes, donc uniformément convergentes, sur $[a\,;+\infty[$.
D'après un théorème du Cours, il en résulte que ζ est de classe C^∞ sur $]1\,;+\infty[$ et que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]1\,;+\infty[,\ \ \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\ln n)^k}{n^x}}$$

2. D'après 1., ζ est de classe C^1 sur $]1\,;+\infty[$ et : $\forall x \in]1\,;+\infty[,\quad \zeta'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x} < 0,$

donc ζ est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

De même, ζ est de classe C^2 sur $]1\,;+\infty[$ et : $\forall x \in]1\,;+\infty[,\quad \zeta''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} > 0,$

donc ζ est convexe sur $]1\,;+\infty[$.

3. • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 0$ (exemple de Riemann alterné), donc : T est définie sur $]0\,;+\infty[$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $g_n :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

Soit $a \in]0\,;+\infty[$ fixé.

Pour tout $x \in [a\,;+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n(x)$ relève du TSCSA (car elle est alternée, son terme général tend vers 0, et la suite de la valeur absolue de son terme général décroît), donc, d'après le cours :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x)\Big| \leqslant |g_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{(n+1)^a},$$

d'où :
$$\Big|\Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k\Big|\Big|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)^a} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci montre que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$.

D'après le théorème du cours sur convergence uniforme et continuité pour les séries de fonctions, on conclut :

$$\boxed{T \text{ est continue sur }]0;+\infty[}$$

4. Soit $x \in]1\,;+\infty[$.

Les séries définissant $\zeta(x)$ et $T(x)$ sont convergentes et, en groupant les termes d'indices pairs ou d'indices impairs :

$$\zeta(x) + T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^x} = 2^{1-x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} = 2^{1-x}\zeta(x),$$

d'où la relation demandée : $\boxed{T(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)}$

5. • D'après 4. : $\quad\forall x \in]1\,;+\infty[,\quad \zeta(x) = \dfrac{T(x)}{2^{1-x} - 1}.$

• D'une part : $\quad 2^{1-x} - 1 = \mathrm{e}^{(1-x)\ln 2} - 1 \underset{x \longrightarrow 1}{\sim} (1-x)\ln 2.$

• D'autre part, puisque T est continue en 1 (cf. 3.), $T(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} T(1)$. Il reste à calculer $T(1)$.

On a, pour tout $N \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{N} (-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{N-1} (-t)^n\,\mathrm{d}t$$
$$= -\int_0^1 \frac{1-(-t)^N}{1-(-t)}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^N}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Et : $$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^N}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^N\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{N+1}}{N+1}\right]_0^1 = \frac{1}{N+1}.$$

D'où : $$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} \underset{N\infty}{\longrightarrow} -\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\big[\ln(1+t)\big]_0^1 = -\ln 2.$$

Ceci montre : $T(1) = -\ln 2 (\neq 0)$. d'où : $\zeta(x) = \dfrac{T(x)}{\mathrm{e}^{(1-x)\ln 2} - 1} \underset{x \longrightarrow 1}{\sim} \dfrac{-\ln 2}{(1-x)\ln 2} = \dfrac{1}{x-1}$.

On conclut : $$\boxed{\zeta(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}}$$

• Comme $\dfrac{1}{x-1} \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} +\infty$, on déduit : $\boxed{\zeta(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} +\infty}$

6. *1)* On a : $$\forall x \in]1\,;+\infty[, \quad \frac{\zeta(x) - (1+2^{-x})}{2^{-x}} = 2^x \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x.$$

Notons, pour tout $n \geqslant 3$: $$h_n : [2\,;+\infty[, \quad x \longmapsto \left(\frac{2}{n}\right)^x.$$

On a : $\forall n \geqslant 3,\ \forall x \in [2\,;+\infty[,\quad |h_n(x)| = \left(\dfrac{2}{n}\right)^x \leqslant \left(\dfrac{2}{n}\right)^2 = \dfrac{4}{n^2}$, donc : $\forall n \geqslant 3,\quad ||h_n||_\infty \leqslant \dfrac{4}{n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n \geqslant 3} ||h_n||_\infty$ converge, donc $\sum_{n \geqslant 3} h_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[2\,;+\infty[$.

D'autre part : $$\forall n \geqslant 3,\quad h_n(x) = \left(\frac{2}{n}\right)^x \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après le théorème du cours sur limite et convergence uniforme pour une série de fonctions, on déduit :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} h_n(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci montre : $\dfrac{\zeta(x) - (1+2^{-x})}{2^{-x}} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc : $\boxed{\zeta(x) = 1 + 2^{-x} + \underset{x \longrightarrow +\infty}{o}(2^{-x}).}$

En particulier : $$\boxed{\zeta(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1}$$

2) On a : $$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \frac{T(x) - (-1+2^{-x})}{2^{-x}} = 2^x \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)^x,$$

donc : $$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \left|\frac{T(x) - (-1+2^{-x})}{2^{-x}}\right| = \left|\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)^x\right| \leqslant \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x.$$

D'après *1)*, il en résulte : $\left|\dfrac{T(x) - (-1+2^{-x})}{2^{-x}}\right| \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc : $\boxed{T(x) = -1 + 2^{-x} + \underset{x \longrightarrow +\infty}{o}(2^{-x})}$

En particulier : $$\boxed{T(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -1}$$

7.

IV. Formule de Gauss et formule de Weierstrass

1. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (et même continue) sur $]0\,;+\infty[$, et intégrable sur $]0\,;+\infty[$ (car nulle sur $[n\,;+\infty[$), $\geqslant 0$, et $f_n(t) \underset{t \longrightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$.

• Montrons que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ vers $f : t \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

Pour $t \in]0\,;+\infty[$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N > t$ (par exemple $N = \mathrm{E}(t) + 1$), et on a, pour tout entier n tel que $n \geqslant N$, $f_n(t) = t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$. Comme $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t}$, il en résulte $f_n(t) \underset{n\infty}{\longrightarrow} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = f(t)$.

• f est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ car continue.

• Montrons que: $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in]0\,;+\infty[,\quad f_n(t) \leqslant f(t).$

On a, pour n, t fixés :

$$f_n(t) \leqslant f(t) \iff \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t} \iff \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant -t \iff \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant -\frac{t}{n}.$$

Or, il est connu que : $\quad \forall\, u \in]-1\,;+\infty[,\quad \ln(1+u) \leqslant u.$

D'où : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad f_n(t) \leqslant f(t).$

Enfin, f est continue par morceaux, $\geqslant 0$, intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Mais: $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t \quad$ et $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

Finalement :

$$\boxed{\int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t \underset{n\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)}$$

2. Récurrence sur n.

• Pour $n = 0$: $\quad \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u^{x-1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x} = \frac{0!}{x}.$

• Supposons la formule vraie pour un entier n fixé.

On a, pour tout ε fixé tel que $0 < \varepsilon \leqslant 1$, en utilisant une intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^1 u^{x-1}(1-u)^{n+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^x}{x}(1-u)^{n+1}\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{u^x}{x}(n+1)(1-u)^n\,\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{\varepsilon^x}{x}(1-\varepsilon)^{n+1} + \frac{n+1}{x}\int_\varepsilon^1 u^x(1-u)^{n+1-1}\,\mathrm{d}u.$$

En faisant tendre ε vers 0^+, on déduit, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{n+1}\,\mathrm{d}u = \frac{n+1}{x}\,\frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n+1)} = \frac{(n+1)!}{x(x+1)\cdots(x+n+1)}.$$

Finalement :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$$

3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant le changement de variable défini par $u = \dfrac{t}{n}$:

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 (nu)^{x-1}(1-u)^n n\,\mathrm{d}u = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u = n^x \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

D'autre part, d'après 1. : $$\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t \underset{n\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$
On conclut :

$$\boxed{\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)}$$

4. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\ln\left(x\,\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right)=\ln x+\gamma x-x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

$$=-x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)+\ln\left(n^{-x}\left(1+\frac{x}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)=-x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)-\ln\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

D'après II.3. : $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après IV.3. : $$\ln\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln\Gamma(x) \quad \text{(on a bien } \Gamma(x)>0\text{)}.$$
D'où :

$$\ln\left(x\,\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} -\ln\Gamma(x),$$

puis, par continuité de l'exponentielle :

$$\boxed{x\,\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\Gamma(x)}}$$

V. Fonction ψ

1. • Soit $x\in[0\,;+\infty[$. Par un développement limité (quand n tend vers l'infini), on a :

$$g_n(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}=\left(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{x}{n}=-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série numérique $\sum_{n\geqslant}\frac{1}{n^2}$ converge, il s'ensuit que $\sum_{n\geqslant 1} g_n(x)$ converge.
Ceci montre que la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$.
• D'après IV. 4. , pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$:

$$\ln x+\gamma x+\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} -\ln\Gamma(x),$$

donc :

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(x) \underset{n\infty}{\longrightarrow} -\ln\Gamma(x)-\ln x-\gamma x,$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)=-\left(\ln\Gamma(x)+\ln x+\gamma x\right).$$

2. On va essayer de dériver la relation qu'on vient d'obtenir.

• Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, g_n est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$.
• Soit $a \in [0\,;+\infty[$. On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [0\,;a],\quad |g_n'(x)| = \frac{x}{n(n+x)} \leqslant \frac{a}{n^2},$$

donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \operatorname*{Sup}_{x\in[0;a]} |g_n'(x)| \leqslant \frac{a}{n^2}.$$

Comme la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, il en résulte que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0\,;a]$.
• D'après 1., la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation pour une série d'applications, et conclure que $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} g_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right)'(x).$$

Comme : $$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = -\left(\ln\Gamma(x) + \ln x + \gamma x\right),$$

on déduit : $$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{x}{n(n+x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n'(x) = -\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x} + \gamma\right),$$

c'est-à-dire : $$\boxed{\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\quad \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}}$$

3. On a vu en I3a : $$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, d'après la définition de ψ : $\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\quad \Gamma'(x) = \Gamma(x)\psi(x)$.
D'après I2b : $\Gamma(1) = 0! = 1$ et $\Gamma(2) = 1! = 1$. Il reste à calculer $\psi(1)$ et $\psi(2)$ en utilisant V2.

• On a : $$\psi(1) = -1 - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

En utilisant une décomposition en éléments simples, on a, pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \underset{\text{télescopage}}{=} 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\infty}{\longrightarrow} 1.$$

D'où : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, puis : $\psi(1) = -1 - \gamma + 1 = -\gamma$, et enfin : $\Gamma'(1) = \Gamma(1)\psi(1) = 1(-\gamma) = -\gamma$.

• On a : $$\psi(2) = -\frac{1}{2} - \gamma + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Et : $$\sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \underset{N\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2},$$

donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \frac{3}{2}$, puis $\psi(2) = \left(-\frac{1}{2} - \gamma\right) + \frac{3}{2} = 1 - \gamma$, et donc : $\Gamma'(2) = \Gamma(2)\psi(2) = 1(1-\gamma) = 1 - \gamma$.

On conclut :

$$\boxed{\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t = -\gamma, \qquad \Gamma'(2) = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t = 1-\gamma}$$

4. *1)* Nous allons utiliser l'expression de ψ comme somme d'une série de fonctions obtenue en V2.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{x}{n(x+n)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x+n}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$, et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f_n'(x) = \frac{1}{(x+n)^2}, \qquad f_n''(x) = -\frac{2}{(x+n)^3}.$$

• Les séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n'$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n''$ convergent normalement (donc uniformément) sur $]0\,;+\infty[$, donc sur tout segment de $]0\,;+\infty[$, car : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad ||f_n'||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n^2} \quad$ et $\quad ||f_n''||_\infty \leqslant \dfrac{2}{n^3}$.

D'après le théorème du cours sur la dérivation pour une série de fonctions, on conclut que ψ est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}, \qquad \psi''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2}{(x+n)^3}.$$

2) • Puisque, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\psi'(x)$ est la somme d'une série convergente de termes tous > 0, on a :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \psi'(x) > 0,$$

donc ψ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

• Puisque, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\psi''(x)$ est la somme d'une série convergente de termes tous $\leqslant 0$, on a :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \ \psi''(x) \leqslant 0,$$

donc ψ est concave sur $]0\,;+\infty[$.

5. Nous allons utiliser une comparaison série/intégrale.

Soit $x \in]0\,;+\infty[$ fixé.

Notons $\varphi : [1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \dfrac{x}{t(x+t)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}$.

L'application φ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et : $\forall t \in [1\,;+\infty[, \quad \varphi'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{(x+t)^2} \leqslant 0,$

donc φ est décroissante.

De plus, comme $\varphi \geqslant 0$ et $\varphi(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{x}{t^2}$, d'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ $(2 > 1)$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, φ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

On a donc, par comparaison série/intégrale : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Et : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}t = \big[\ln t - \ln(x+t)\big]_0^{+\infty} = \left[\ln \frac{t}{x+t}\right]_0^{+\infty} = -\ln \frac{1}{1+x} = \ln(1+x),$

d'où :
$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)} \leqslant 1 + \ln(1+x),$$

et donc :
$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad -\frac{1}{x} - \gamma + \ln(1+x) \leqslant \psi(x) \leqslant -\frac{1}{x} - \gamma + 1 + \ln(1+x).$$

Comme : $\qquad \ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \ln x \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$

les deux encadrants sont équivalents à $\ln x$ et on conclut : $\boxed{\psi(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \ln x}$

• Puisque $\ln x \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il en résulte : $\boxed{\psi(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

VI. Formule des compléments

1. Il est clair que F_x est 2π-périodique et continue (donc continue par morceaux), donc les coefficients de Fourier trigonométriques de F_x existent.
Puisque F_x est paire, les b_n sont nuls.
On a, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_x(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos xt\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(n+x)t+\cos(n-x)t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n+x)t}{n+x}+\frac{\sin(n-x)t}{n-x}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n+x)\pi}{n+x}+\frac{\sin(n-x)\pi}{n-x}\right) \\ &= \frac{(-1)^n\sin\pi x}{\pi}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n-x}\right) = \frac{2(-1)^{n+1}x\sin\pi x}{\pi(n^2-x^2)}. \end{aligned}$$

2. Il est clair que F_x est continue, de classe C^1 par morceaux, et 2π-périodique. D'après le théorème de Dirichlet de convergence normale, la série de Fourier de F_x converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme F_x.
On a donc, pour tout x de $]0\,;1[$ et tout t de $\mathbb{R}$:

$$F_x(t) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nt = \frac{\sin\pi x}{\pi x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n+1}x\sin\pi x}{\pi(n^2-x^2)}\cos nt.$$

En particulier : $\boxed{\forall x\in\,]0\,;1[,\ \forall t\in[-\pi;\pi],\quad \cos xt = \frac{\sin\pi x}{\pi x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n+1}x\sin\pi x}{\pi(n^2-x^2)}\cos n}$

3. En remplaçant t par π dans la formule précédente, on obtient, pour tout x de $]0\,;1[$:

$$\cos\pi x = \frac{\sin\pi x}{\pi x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2x\sin\pi x}{\pi(n^2-x^2)},$$

d'où : $\qquad \frac{1}{\pi x}-\operatorname{cotan}\pi x = \frac{1}{\sin\pi x}\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}-\cos\pi x\right) = \frac{1}{\sin\pi x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x\sin\pi x}{\pi(n^2-x^2)} = \frac{2x}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-x^2}.$

4. Soit $x\in\,]0\,;1[$ fixé.
Notons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $h_n : [0\,;x]\longrightarrow\mathbb{R},\ t\longmapsto h_n(t) = \dfrac{2t}{\pi(n^2-t^2)}$.
• Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, h_n est continue sur $[0\,;x]$
• La série d'applications $\sum_{n\geqslant 1}h_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0\,;x]$, car, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0\,;x]$: $\qquad |h_n(t)| = \dfrac{2t}{\pi(n^2-t^2)} \leq \dfrac{2x}{\pi(n^2-x^2)} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{2x}{\pi n^2}.$

On peut donc appliquer le théorème sur l'intégration pour une série d'applications continues sur un segment. On en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty}h_n$ est continue sur $[0\,;x]$ et que : $\displaystyle\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}h_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x h_n(t)\,\mathrm{d}t.$

D'une part : $$\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{1}{\pi t} - \operatorname{cotan}\pi t\right)\,\mathrm{d}t.$$

Comme, pour tout $\varepsilon \in]0\,;x]$:

$$\int_\varepsilon^x \left(\frac{1}{\pi t} - \operatorname{cotan}\pi t\right)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\pi}\ln t - \frac{1}{\pi}\ln\sin\pi t\right]_\varepsilon^x = \frac{1}{\pi}\ln\frac{\pi x}{\sin\pi x} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{\pi\varepsilon}{\sin\pi\varepsilon} \underset{\varepsilon \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\ln\frac{\pi x}{\sin\pi x},$$

on obtient : $$\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\ln\frac{\pi x}{\sin\pi x} = -\frac{1}{\pi}\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x}.$$

D'autre part, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^x h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2t}{\pi(n^2-t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[-\ln(n^2-t^2)\right]_0^x = \frac{1}{\pi}(-\ln(n^2-x^2)+\ln n^2)$$

$$= \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{n^2}{n^2-x^2}\right) = -\frac{1}{\pi}\ln\left(1-\left(\frac{x}{n}\right)^2\right).$$

On déduit : $$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{\pi}\ln\left(1-\left(\frac{x}{n}\right)^2\right) = -\frac{1}{\pi}\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x},$$

d'où, par continuité de l'exponentielle : $$\boxed{\prod_{k=1}^n \left(1-\left(\frac{x}{k}\right)^2\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin\pi x}{\pi x}}$$

5. D'après la formule de Gauss (IV. 3.) : $$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$

Et : $$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n^x n!}{x(1+x)\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)\cdots\left(n\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)} = \frac{n^x}{x\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right)}.$$

De même : $$\frac{n^{1-x}n!}{(1-x)(2-x)\cdots(n+1-x)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \Gamma(1-x),$$

et : $$\frac{n^{1-x}n!}{(1-x)(2-x)\cdots(n+1-x)} = \frac{n^{1-x}n!}{(n+1)!\left(\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x}{k}\right)\right)\left(1-\frac{x}{n+1}\right)} = \frac{n\,n!}{(n+1)!}\,\frac{n^{-x}}{\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x}{k}\right)}\,\frac{1}{1-\frac{x}{n+1}},$$

donc : $$\frac{n^{-x}}{\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x}{k}\right)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \Gamma(1-x).$$

On déduit, en effectuant le produit : $$\frac{n^x}{x\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right)}\,\frac{n^{-x}}{\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x}{k}\right)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)\Gamma(1-x).$$

Mais : $$\frac{n^x}{x\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right)}\,\frac{n^{-x}}{\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x}{k}\right)} = \frac{1}{x}\left(\prod_{k=1}^n\left(1-\left(\frac{x}{k}\right)^2\right)\right)^{-1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}\frac{\pi x}{\sin\pi x} = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

On conclut : $$\boxed{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}}$$

6. On remplace x par $\frac{1}{2}$ dans la formule précédente : $$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi,$$

d'où, puisque Γ est à valeurs strictement positives : $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Ensuite : $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{[u=t^2]}{=} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Finalement : $$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

7.a. L'application $f : x \longmapsto \ln\sin\pi x$ est continue sur $\left]0\,;\dfrac{1}{2}\right]$, $\leqslant 0$ et $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \ln \pi x$.

Comme $x \longrightarrow \ln \pi x$ est intégrable sur $\left]0\,;\dfrac{1}{2}\right]$, f l'est aussi. De même, $x \longmapsto \ln\cos\pi x$ est intégrable sur $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right[$.

Notons : $$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln\cos\pi x\,\mathrm{d}x.$$

Par le changement de variable $y = \dfrac{1}{2} - x$, on obtient $I = J$. Puis :

$$2I = I + J = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(\sin\pi x + \cos\pi x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2\pi x\right)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(\sin 2\pi x)\,\mathrm{d}x \underset{y=2x}{=} -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\sin\pi y\,\mathrm{d}y.$$

Et : $$\int_0^1 \ln\sin\pi y\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln\sin\pi y\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln\sin\pi y\,\mathrm{d}y \underset{z=y-\frac{1}{2}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \ln\sin\pi y\,\mathrm{d}y + \int_0^{\frac{1}{2}} \ln\cos\pi z\,\mathrm{d}z = I + J = 2I.$$

On obtient ainsi $2I = -\dfrac{1}{2}\ln 2 + I$, d'où : $\boxed{I = J = -\dfrac{1}{2}\ln 2}$

7.b. L'application $\ln\circ\Gamma$ est continue sur $]0\,;1]$, et, puisque $\Gamma(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{1}{x} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} +\infty \neq 1$, $\ln\circ\Gamma(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} -\ln x > 0$; comme $x \longmapsto -\ln x$ est intégrable sur $]0\,;1]$, il en résulte que $\ln\circ\Gamma$ est intégrable sur $]0\,;1]$.

Le changement de variable $t = 1 - x$ donne : $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\Gamma(1-t)\,\mathrm{d}t$,

d'où, à l'aide de la formule des compléments :

$$2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\big(\Gamma(x)\Gamma(1-x)\big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\,\mathrm{d}x = \ln\pi - \int_0^1 \ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant le résultat de la question 7.a., on conclut : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(2\pi)}$

* *