Lycée La Martinière Monplaisir

Jean-Marie Monier

Agrégation interne de Mathématiques 2008-2009

Épreuve du samedi 6 décembre 2008

Si un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale sur sa copie et devra poursuivre sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il (elle) est amené(e) à prendre.

Notations

• n désigne un entier supérieur ou égal à 1

• $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels

• $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ est le groupe multiplicatif des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels, inversibles

• $\mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels, diagonales

• Pour $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ est le spectre de A, ensemble des valeurs propres de A

• I_n est la matrice identité, carrée d'ordre n, neutre pour la multiplication

• Notations analogues pour $\mathbb{C}$ à la place de $\mathbb{R}$.

Le but du problème est la résolution d'exemples d'équations ou de systèmes d'équations dont l'inconnue ou les inconnues sont des matrices carrées.

I. Exemples d'équations matricielles dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$

1. Expliciter, pour chacune des équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des solutions :

$$a)\ X^2 = 0, \qquad b)\ X^2 = -\mathrm{I}_2, \qquad c)\ X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On note ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Expliciter, pour chacune des équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des solutions, et préciser la structure de cet ensemble de solutions et sa dimension :

$$a)\ AX = C, \qquad b)\ XB = C, \qquad c)\ AXB = C.$$

II. Exemples de racines carrées de matrices carrées

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note : $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -1+2a & 2+a \\ -3a & -2-a & 3+4a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ et f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M_a.

1. Déterminer suivant les valeurs de a, le rang de la matrice $M_a - (1+3a)\mathrm{I}_3$.
Quelle valeur propre de M_a a-t-on ainsi mise en évidence ?
Préciser la dimension du sous-espace propre associé.

2. Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M_a, puis déterminer les valeurs propres de M_a.

3.a. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, M_a est trigonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

3.b. Déterminer l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tels que M_a soit diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Dans cette question, on suppose $a = 1$.

4.a. Déterminer $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathbf{D}_3(\mathbb{R})$ telles que $M_1 = PDP^{-1}$, puis déterminer une matrice $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = M_1$.

4.b. Montrer qu'il existe une infinité de $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = M_1$.

5. Dans cette question on suppose $a = 0$ et on note $N = M_0 - \mathrm{I}_3$. Calculer N^2 et en déduire l'existence de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(\alpha \mathrm{I}_3 + \beta N)^2 = M_0$.

6. Dans cette question, on suppose $a = -\dfrac{1}{3}$ et on note $u = f_{-\frac{1}{3}}$.

6.a. Déterminer tous les $W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $M_{-\frac{1}{3}} W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.b. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.c. Déterminer les matrices de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec U.
En déduire que l'équation $X^2 = U$, d'inconnue $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, n'a pas de solution.

6.d. L'équation $X^2 = M_{-\frac{1}{3}}$, d'inconnue $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, a-t-elle une solution ?

III. Équations $AX = C$, $XB = C$

Pour $A, B, C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ fixées, on considère les équations

$$(1) \quad AX = C, \qquad\qquad (2) \quad XB = C,$$

d'inconnue $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, et on note $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$) l'ensemble des solutions de (1) (resp. (2)).

1. Montrer que, si $S_1 \neq \varnothing$, alors $\mathrm{Im}\,(C) \subset \mathrm{Im}\,(A)$.

2. On suppose dans cette question : $\mathrm{Im}\,(C) \subset \mathrm{Im}\,(A)$.

2.a. On note $r = \mathrm{rg}\,(A)$, $J = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
Justifier l'existence de $P, Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PJQ$.

2.b. Montrer que (1) admet au moins une solution, et exprimer au moins une solution de (1) à l'aide de P^{-1}, Q^{-1}, C.

2.c. Quelle est la structure de S_1 ? Quelle est sa dimension ?

3.a. Montrer : $$S_2 \neq \varnothing \iff \mathrm{Ker}\,(B) \subset \mathrm{Ker}\,(C).$$

3.b. On suppose dans cette question : $\mathrm{Ker}\,(B) \subset \mathrm{Ker}\,(C)$.
Quelle est la structure de S_2 ? Quelle est sa dimension ?

4. Dans cette question, on note : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.a. Quel est le rang de A ?

4.b. Déterminer deux matrices P, Q de $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PJQ$, où $J = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.c. Résoudre (1) dans chacun des deux exemples suivants :

$$\alpha) \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \beta) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

IV. Exemples d'équations matricielles faisant intervenir des exponentielles

On rappelle que, pour toute $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} X^k$ est absolument convergente, donc convergente, et que sa somme est notée e^X.
On rappelle que, si $X, Y \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ commutent, alors $\mathrm{e}^X\,\mathrm{e}^Y = \mathrm{e}^Y\,\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{X+Y}$.

A. Équation $\mathrm{e}^X = A$

On considère l'équation (1) $\mathrm{e}^X = A$, pour $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ fixée et $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ inconnue.

1. On suppose ici que A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

1.a. Montrer que (1) admet au moins une solution.

1.b. Montrer que, si $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est solution de (1), alors X commute avec A.

1.c. En déduire que, si, de plus, les valeurs propres de A sont deux à deux distinctes, alors (1) admet une solution et une seule.

2. Résoudre l'équation (1) pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

B. Un exemple de système d'équations

On considère le système d'équations (S) $\begin{cases} X\,\mathrm{e}^Y + \mathrm{e}^X = 0 \\ \mathrm{e}^Y + Y\,\mathrm{e}^X = 0 \end{cases}$

d'inconnue $(X, Y) \in (\mathbf{M}_3(\mathbb{R}))^2$.

1. Montrer que, pour tout $(X, Y) \in (\mathbf{M}_3(\mathbb{R}))^2$, (X, Y) est une solution de (S) si et seulement si :

$$X \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R}), \quad Y = X^{-1}, \quad \text{(E)} \quad X\,\mathrm{e}^{X^{-1}} + \mathrm{e}^X = 0.$$

2 Montrer que, si $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie (E), et si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(X) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(X)$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(X) = \{-1\}$, et il existe $N \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, nilpotente, telle que $X = -\mathrm{I}_3 + N$ et il existe $N' \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, nilpotente, telle que $X^{-1} = -\mathrm{I}_3 + N'$, et que $NN' = N'N = N + N'$.

3. Démontrer que l'ensemble des solutions de (S) est $\{(-\mathrm{I}_3,\ -\mathrm{I}_3)\}$.

* *