Lycée La Martinière Monplaisir

Jean-Marie Monier

Préparation à l'Agrégation Interne de Mathématiques 2009-2010

Épreuve du samedi 12 décembre 2009

Si un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) la signale sur sa copie et devra poursuivre sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il (elle) est amené(e) à prendre.

Notations

- n désigne un entier naturel non nul
- $\mathbf{M}_{n,1}$ est l'espace vectoriel réel des matrices réelles à n lignes et une colonne
- $\mathbf{M}_n$ est l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n
- I_n désigne la matrice identité de $\mathbf{M}_n$
- Pour $M \in \mathbf{M}_{n,1}$ ou $M \in \mathbf{M}_n$, ${}^{\mathrm{t}}M$ désigne la transposée de M
- $\mathbf{GL}_n$ est le groupe multiplicatif des matrices carrées réelles d'ordre n inversibles
- $\mathbf{A}_n$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n$ formé des matrices antisymétriques
- $\mathbf{S}_n$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n$ formé des matrices symétriques
- $\mathbf{S}_n^+$ est l'ensemble des matrices de $\mathbf{S}_n$ symétriques positives, c'est-à-dire l'ensemble des $S \in \mathbf{S}_n$ telles que : $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}, \quad {}^{\mathrm{t}}XSX \geqslant 0$
- $\mathbf{S}_n^{++}$ est l'ensemble des matrices de $\mathbf{S}_n$ symétriques définies positives, c'est-à-dire l'ensemble des $S \in \mathbf{S}_n$ telles que : $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}, \quad {}^{\mathrm{t}}XSX > 0$
- $\mathbf{O}_n$ est le groupe orthogonal, ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n orthogonales
- Pour $M \in \mathbf{M}_n$, $\mathrm{Ker}\,(M)$ désigne le noyau de M : $\mathrm{Ker}\,(M) = \{X \in \mathbf{M}_{n,1}\,;\, MX = 0\}$
- Pour $M \in \mathbf{M}_n$, $\mathrm{Im}\,(M)$ désigne l'image de M : $\mathrm{Im}\,(M) = \{MX\,;\, X \in \mathbf{M}_{n,1}\}$
- Pour $M \in \mathbf{M}_n$, $\mathrm{Sp}\,(M)$ désigne le spectre réel de M, ensemble des valeurs propres réelles de M
- Pour $M \in \mathbf{M}_n$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(M)$, $\mathrm{SEP}\,(M, \lambda)$ désigne le sous-espace propre pour M associé à la valeur propre λ de M
- Pour $(d_1, ..., d_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{diag}\,(d_1, ..., d_n)$ désigne la matrice carrée d'ordre n, diagonale, dont les termes diagonaux sont, dans l'ordre, $d_1, ..., d_n$
- Pour $A, B \in \mathbf{M}_n$, on dit que A et B commutent si et seulement si : $AB = BA$.

I. Commutant d'une matrice carrée réelle

On définit, pour toute $A \in \mathbf{M}_n$, le commutant $\Gamma(A)$ de A dans $\mathbf{M}_n$ par :

$$\Gamma(A) = \{M \in \mathbf{M}_n\,;\, AM = MA\},$$

et on note $\Pi(A)$ l'ensemble des polynômes en A : $\Pi(A) = \{P(A)\,;\, P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\}$.

1.a. Montrer que, pour toute $A \in \mathbf{M}_n$, $\Gamma(A)$ et $\Pi(A)$ sont des sous-algèbres de $\mathbf{M}_n$ et que : $\Pi(A) \subset \Gamma(A)$.

1.b. Pour $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2$, déterminer $\Gamma(A)$ et $\Pi(A)$. Que constate-t-on ?

2. Montrer, pour toute $A \in \mathbf{M}_n$: $\qquad 1 \leqslant \dim(\Gamma(A)) \leqslant n^2 \quad$ et $\quad 1 \leqslant \dim(\Pi(A)) \leqslant n$.

3. Montrer, pour toute $A \in \mathbf{M}_n$: $\qquad \Gamma(A) = \mathbf{M}_n \iff A \in \mathbb{R}\mathrm{I}_n$.

4. On suppose, dans cette question seulement, que A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n$. On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de A deux à deux distinctes ($1 \leqslant p \leqslant n$) et, pour tout $k \in \{1, ..., p\}$, $\omega_k = \dim(\mathrm{SEP}(A, \lambda_k))$.

4.a. *1)* Démontrer : $\qquad \dim(\Gamma(A)) = \sum_{k=1}^{p} \omega_k^2$.

4.a. *2)* Quelles sont les valeurs possibles pour $\dim(\Gamma(A))$ lorsque $n = 4$?

4.b. En déduire que, si $A \notin \mathbb{R}\mathrm{I}_n$, alors : $\dim(\Gamma(A)) \leqslant n^2 - 2n + 2$.

4.c. Établir : $\dim(\Gamma(A)) = n \iff \Big(p = n \text{ et } (\forall k \in \{1, ..., p\}, \ \omega_k = 1)\Big)$.

II. Relation d'ordre dans $\mathbf{S}_n$

1. Soit $S \in \mathbf{S}_n$.
Montrer : **1.a.** $S \in \mathbf{S}_n^+ \iff \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ $\qquad$ **1.b.** $S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

2. Établir les propriétés suivantes :

1) $\forall M \in \mathbf{M}_n, \ {}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^+$ $\qquad$ *2)* $\forall S \in \mathbf{S}_n, \ S^2 \in \mathbf{S}_n^+$ $\qquad$ *3)* $\forall A \in \mathbf{A}_n, \ -A^2 \in \mathbf{S}_n^+$
4) $\forall M \in \mathbf{M}_n, \ ({}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^{++} \iff M \in \mathbf{GL}_n)$
5) $\mathbf{S}_n^{++} = \mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n$ $\qquad$ *6)* $\forall S \in \mathbf{S}_n^{++}, \ S^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++}$
7) $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \ \forall S \in \mathbf{S}_n^+, \ \alpha S \in \mathbf{S}_n^+$ $\qquad$ *8)* $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall S \in \mathbf{S}_n^{++}, \ \alpha S \in \mathbf{S}_n^{++}$
9) $\forall M \in \mathbf{M}_n, \ \forall S \in \mathbf{S}_n^+, \ {}^{\mathrm{t}}MSM \in \mathbf{S}_n^+$ $\qquad$ *10)* $\forall P \in \mathbf{GL}_n, \ \forall S \in \mathbf{S}_n^{++}, \ {}^{\mathrm{t}}PSP \in \mathbf{S}_n^{++}$
11) $\forall S_1 \in \mathbf{S}_n^+, \ \forall S_2 \in \mathbf{S}_n^+, \ S_1 + S_2 \in \mathbf{S}_n^+$ $\qquad$ *12)* $\forall S_1 \in \mathbf{S}_n^+, \ \forall S_2 \in \mathbf{S}_n^{++}, \ S_1 + S_2 \in \mathbf{S}_n^{++}$
13) $\forall S_1 \in \mathbf{S}_n^+, \ \forall S_2 \in \mathbf{S}_n^+, \ (S_1 + S_2 = 0 \iff S_1 = S_2 = 0)$.

On définit dans $\mathbf{S}_n$ une relation, notée $\leqslant$, par :

$$\forall S_1, \ S_2 \in \mathbf{S}_n, \ (S_1 \leqslant S_2 \iff S_2 - S_1 \in \mathbf{S}_n^+).$$

3. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre dans $\mathbf{S}_n$, non totale dès que $n \geqslant 2$.

4. Montrer les propriétés suivantes :

1) $\forall S_1, \ S_2, \ S_3, \ S_4 \in \mathbf{S}_n, \ \left(\begin{cases} S_1 \leqslant S_2 \\ S_3 \leqslant S_4 \end{cases} \implies S_1 + S_3 \leqslant S_2 + S_4\right)$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \ \forall S_1, S_2 \in \mathbf{S}_n, \ (S_1 \leqslant S_2 \implies \alpha S_1 \leqslant \alpha S_2)$

3) $\forall M \in \mathbf{M}_n, \ \forall S_1, \ S_2 \in \mathbf{S}_n, \ (S_1 \leqslant S_2 \implies {}^{\mathrm{t}}MS_1M \leqslant {}^{\mathrm{t}}MS_2M)$.

5. Montrer les propriétés suivantes :

1) $\forall S \in \mathbf{S}_n, \ (S^2 \leqslant S \iff 0 \leqslant S \leqslant \mathrm{I}_n)$ $\qquad$ *2)* $\forall S \in \mathbf{S}_n^{++}, \ (S \leqslant \mathrm{I}_n \iff \mathrm{I}_n \leqslant S^{-1})$

3) $\forall C \in \mathbf{M}_{n,1}, \ C\,{}^{\mathrm{t}}C \leqslant ({}^{\mathrm{t}}CC)\mathrm{I}_n$ $\qquad$ *4)* $\forall M \in \mathbf{M}_n, \ ({}^{\mathrm{t}}MM \leqslant \mathrm{I}_n \iff M\,{}^{\mathrm{t}}M \leqslant \mathrm{I}_n)$

5) $\forall A, B \in \mathbf{S}_n^{++}, \ (A + B)^{-1} \leqslant \dfrac{1}{4}(A^{-1} + B^{-1})$.

III. Racine carrée dans $\mathbf{S}_n^+$

1.a. Démontrer que, pour toute $S \in \mathbf{S}_n^+$, il existe $R \in \mathbf{S}_n^+$ unique telle que : $R^2 = S$. Cette matrice R est appelée la racine carrée de S dans $\mathbf{S}_n^+$ et est notée $S^{1/2}$.

1.b. Montrer : $\quad \forall\, S \in \mathbf{S}_n^{++},\ \ (S^{1/2} \in \mathbf{S}_n^{++} \quad \text{et} \quad (S^{1/2})^{-1} = (S^{-1})^{1/2}).$
On note, pour toute $S \in \mathbf{S}_n^{++}$: $S^{-1/2} = (S^{1/2})^{-1}$.

1.c. Montrer : $$\forall\, S \in \mathbf{S}_n^+,\quad S^{1/2} \leqslant \frac{1}{2}(\mathrm{I}_n + S),$$
où la relation $\leqslant$ dans $\mathbf{S}_n$ a été définie dans la partie II.

1.d. Montrer : $$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, S \in \mathbf{S}_n^+,\ \ (\alpha S)^{1/2} = \alpha^{1/2} S^{1/2}.$$

2. Établir : $$\forall\, S \in \mathbf{S}_n^+,\ \exists\, P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \ S^{1/2} = P(S).$$
À cet effet, on pourra faire intervenir un polynôme d'interpolation.

3.a. Démontrer : $$\forall\, S \in \mathbf{S}_n^+,\ \ \Gamma(S) = \Gamma(S^{1/2}),$$
où $\Gamma(.)$ désigne le commutant d'une matrice carrée, défini dans la partie I.

3.b. En déduire que, pour toutes $A, B \in \mathbf{S}_n^+$, si A et B commutent, alors A, B, $A^{1/2}$, $B^{1/2}$ commutent toutes entre elles.

4. On se propose, dans cette question, de montrer que l'application $\mathbf{S}_n^{++} \longrightarrow \mathbf{S}_n^{++},\ S \longmapsto S^{-1}$ est décroissante.
Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^{++}$ telles que $A \leqslant B$.

4.a. Montrer : $B^{-1/2} A B^{-1/2} \leqslant \mathrm{I}_n$.

4.b. Déduire : $\mathrm{I}_n \leqslant B^{1/2} A^{-1} B^{1/2}$.

4.c. Conclure : $B^{-1} \leqslant A^{-1}$.

5.a. Montrer, pour toute $S \in \mathbf{S}_n^+$ et toute $X \in \mathbf{M}_{n,1}$: $\qquad {}^{\mathrm{t}}XSX = 0 \iff SX = 0.$

5.b. Montrer : $$\forall\, S_1,\, S_2 \in \mathbf{S}_n^+,\ \ S_1 \leqslant S_2 \implies \begin{cases} \mathrm{Ker}\,(S_1) \supset \mathrm{Ker}\,(S_2) \\ \mathrm{Im}\,(S_1) \subset \mathrm{Im}\,(S_2). \end{cases}$$

5.c. Montrer, pour toute $A \in \mathbf{M}_n$: $\qquad \mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A).$

5.d. Établir : $$\forall\, A, B \in \mathbf{M}_n,\ \ \mathrm{Im}\,(A) + \mathrm{Im}\,(B) = \mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A + B\,{}^{\mathrm{t}}B).$$

6. Est-ce que l'application $\mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathbf{S}_n^+,\ \ S \longmapsto S^2$ est croissante ?
À cet effet, on pourra considérer, pour $n = 2$, les deux matrices : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. On se propose, dans cette question, de montrer que l'application $\mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathbf{S}_n^+,\ A \longmapsto A^{1/2}$ est croissante.
Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^+$ telles que : $A \leqslant B$. On note $C = B^{1/2} - A^{1/2}$.

7.a. Établir : $$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}\,(C),\ \forall\, X \in \mathrm{SEP}\,(C, \lambda),\ \ \lambda\,{}^{\mathrm{t}}X(B^{1/2} + A^{1/2})X \geqslant 0.$$

7.b. En déduire $\lambda \geqslant 0$, en séparant en cas selon que ${}^{\mathrm{t}}X(B^{1/2} + A^{1/2})X$ est nul ou non.

7.c. Conclure.

8. Démontrer que l'application $\mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathbf{S}_n^+,\ \ S \longmapsto S^{1/2}$ est concave.

IV. Décompositions polaires dans $\mathbf{GL}_n$, dans $\mathbf{M}_n$

1.a. Démontrer : $\forall A \in \mathbf{GL}_n,\ \exists !(\Omega, S) \in \mathbf{O}_n \times \mathbf{S}_n^{++},\quad A = \Omega S.$
Cette égalité s'appelle la décomposition polaire de A dans $\mathbf{GL}_n$.

1.b. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, déterminer explicitement la décomposition polaire de A dans $\mathbf{GL}_2$.

2. Établir que $\mathbf{GL}_n$ est dense dans $\mathbf{M}_n$.

3.a. Démontrer : $\forall A \in \mathbf{M}_n,\ \exists (\Omega, S) \in \mathbf{O}_n \times \mathbf{S}_n^{+},\quad A = \Omega S.$
Cette égalité s'appelle une décomposition polaire de A dans $\mathbf{M}_n$.

3.b. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer explicitement deux décompositions polaires de A dans $\mathbf{M}_2$, différentes.

4. Soient $A, B \in \mathbf{M}_n$ telles que : ${}^{\mathrm{t}}AA = {}^{\mathrm{t}}BB$. Montrer : $\exists\, \Omega \in \mathbf{O}_n,\quad B = \Omega A.$

V. Comparaison des valeurs propres de deux matrices symétriques

On note, pour tout $S \in \mathbf{S}_n$, $\lambda_{\mathrm{Min}}(S)$ (resp. $\lambda_{\mathrm{Max}}(S)$) la plus petite (resp. grande) valeur propre de S.

1.a. Démontrer, pour toute $S \in \mathbf{S}_n$:

$$\lambda_{\mathrm{Min}}(S) = \underset{X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}}{\mathrm{Min}} \frac{{}^{\mathrm{t}}XSX}{{}^{\mathrm{t}}XX}, \qquad \lambda_{\mathrm{Max}}(S) = \underset{X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}}{\mathrm{Max}} \frac{{}^{\mathrm{t}}XSX}{{}^{\mathrm{t}}XX}.$$

1.b. En déduire : $\forall\, S \in \mathbf{S}_n,\quad \lambda_{\mathrm{Min}}(S)\mathrm{I}_n \leqslant S \leqslant \lambda_{\mathrm{Max}}(S)\mathrm{I}_n.$

2. Soient $A, B \in \mathbf{S}_n$ telles que $A \leqslant B$.
On note $\lambda_i(A)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, les valeurs propres de A, comptées avec leurs ordres de multiplicité et rangées en décroissant, c'est-à-dire : $\lambda_1(A) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(A)$, et de même pour B.
On note $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A))$ et $\Omega \in \mathbf{O}_n$ telle que $A = \Omega D \Omega^{-1}$, $C = \Omega^{-1} B \Omega$.

2.a. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixé.
On note D_i la matrice carrée d'ordre i, extraite de D en prenant les i premières lignes et les i premières colonnes, et on note C_i la matrice carrée d'ordre i, extraite de C en prenant les i premières lignes et les i premières colonnes.

1) Montrer : $D_i \leqslant C_i$.

2) Établir : $\lambda_i(A) = \lambda_{\mathrm{Min}}(D_i) \leqslant \lambda_{\mathrm{Min}}(C_i) \leqslant \lambda_i(C) = \lambda_i(B).$

2.b. Conclure : $A \leqslant B \implies (\forall\, i \in \{1, \ldots, n\},\quad \lambda_i(A) \leqslant \lambda_i(B)).$

∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗