Préparation à l'agrégation interne de Mathématiques 2009-2010

Jean-Marie Monier

Corrigé de l'épreuve d'entraînement du 12 décembre 2009

I.

1.a. Soit $A \in \mathbf{M}_n$.

1) • $\Gamma(A) \neq \varnothing$, car $0 \in \Gamma(A)$.

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $M, N \in \Gamma(A)$: $A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN = \alpha MA + NA = (\alpha M + N)A$,
donc : $\alpha M + N \in \Gamma(A)$.

• On a, pour toutes $M, N \in \Gamma(A)$: $A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A$,
donc : $MN \in \Gamma(A)$.

• $\mathrm{I}_n \in \Gamma(A)$, car : $A\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n A$.

On conclut : $\boxed{\Gamma(A) \text{ est une sous-algèbre (unitaire) de } \mathbf{M}_n}$

2) • $\Pi(A) \neq \varnothing$, car $0 = 0(A) \in \Pi(A)$.

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$: $\alpha P(A) + Q(A) = (\alpha P + Q)(A) \in \Pi(A)$.

• On a, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$: $P(A)Q(A) = (PQ)(A) \in \Pi(A)$.

• $\mathrm{I}_n = 1(A) \in \Pi(A)$.

On conclut : $\boxed{\Pi(A) \text{ est une sous-algèbre (unitaire) de } \mathbf{M}_n}$

3) On a, pour tout $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$: $AP(A) = \mathrm{X}(A)P(A) = (\mathrm{X}P)(A) = (P\mathrm{X})(A) = P(A)A$, donc : $P(A) \in \Gamma(A)$.
On conclut : $\boxed{\Pi(A) \subset \Gamma(A)}$

1.b. Il est clair que, pour $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2$, on a : $\Gamma(A) = \mathbf{M}_2$ et $\Pi(A) = \mathbb{R}\mathrm{I}_2$.

On constate, sur cet exemple, que $\Pi(A)$ et $\Gamma(A)$ peuvent être différents.

2. Soit $A \in \mathbf{M}_n$.

• Il est clair que, $\mathrm{I}_n = 1(A) \in \Pi(A) \subset \Gamma(A)$, donc : $1 \leqslant \dim\big(\Pi(A)\big)$ et $1 \leqslant \dim\big(\Gamma(A)\big)$, et il est clair que $\Gamma(A) \subset \mathbf{M}_n$, donc $\dim\big(\Gamma(A)\big) \leqslant \dim(\mathbf{M}_n) = n^2$.

• D'après le cours (théorème de Cayley-Hamilton par exemple), il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que : $A^n = P(A)$.
Il en résulte, par récurrence immédiate : $\forall\, k \geqslant n,\quad A^k \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, A, ..., A^{n-1})$.
On déduit, par linéarité : $\Pi(A) \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n, A, ..., A^{n-1})$. D'où : $\dim\big(\Pi(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n, A, ..., A^{n-1})\big) \leqslant n$.

3. Soit $A \in \mathbf{M}_n$.

1) Il est clair que, si $A \in \mathbb{R}\,\mathrm{I}_n$, alors A commute avec toute matrice carrée d'ordre n, donc $\Gamma(A) = \mathbf{M}_n$.

2) Réciproquement, supposons $\Gamma(A) = \mathrm{M}_n$.
Notons $A = \big((A)_{ij}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Considérons les matrices élémentaires E_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, définies par : $\mathrm{E}_{ij} = (\delta_{ui}\delta_{vj})_{1 \leqslant u,v \leqslant n}$, où δ désigne le symbole de Kronecker.
Puisque $\Gamma(A) = \mathbf{M}_n$, on a : $\forall\,(i,j) \in \{1, ..., n\}^2,\quad \mathrm{E}_{ij}A = A\mathrm{E}_{ij}$.

Mais, pour tout $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$ fixé, on a pour tout $(u,v) \in \{1,...,n\}^2$:

$$(\mathrm{E}_{ij}A)_{uv} = \sum_{w=1}^{n} (\mathrm{E}_{ij})_{uw}(A)_{wv} = \sum_{w=1}^{n} \delta_{ui}\delta_{wj}(A)_{wv} = \delta_{ui}(A)_{jv}$$

et :

$$(A\mathrm{E}_{ij})_{uv} = \sum_{w=1}^{n} (A)_{uw}(\mathrm{E}_{ij})_{wv} = \sum_{w=1}^{n} (A)_{uw}\delta_{wi}\delta_{vj} = (A)_{ui}\delta_{vj}.$$

Ainsi : $\quad \forall\,(u,v) \in \{1,...,n\}^2, \quad \delta_{ui}(A)_{jv} = (A)_{ui}\delta_{vj}.$

En particulier, en remplaçant u par i : $\forall\,(i,j) \in \{1,...,n\}^2, \ \forall\,v \in \{1,...,n\}, \quad (A)_{jv} = (A)_{ii}\delta_{vj}.$

Si $i \neq j$, en prenant $v = i$, on déduit $(A)_{ji} = 0$, et, en prenant $v = j$, on déduit $(A)_{jj} = (A)_{ii}$.

Ceci montre que les termes de A hors diagonale sont tous nuls et que les termes diagonaux de A sont tous égaux.

On déduit : $A \in \mathbb{R}\mathrm{I}_n$.

On conclut : $\quad \boxed{\Gamma(A) = \mathbf{M}_n \iff A \in \mathbb{R}\,\mathrm{I}_n}$

4.a. *1)* Par hypothèse, en notant $D = \mathrm{diag}\,(\lambda \mathrm{I}_{\omega_1}, ..., \lambda_p \mathrm{I}_{\omega_p})$, matrice diagonale par blocs, il existe $P \in \mathbf{GL}_n$ telle que : $A = PDP^{-1}$.

• Soit $M \in \mathbf{M}_n$. Notons $N = P^{-1}MP$, de sorte que : $M = PNP^{-1}$. On a ainsi :

$$M \in \Gamma(A) \iff AM = MA \iff PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \iff ND = DN \iff N \in \Gamma(D).$$

Notons $f : \Gamma(A) \longrightarrow \Gamma(D), \quad M \longmapsto P^{-1}MP$, qui est correctement définie, comme on vient de le voir.

On a vu que $\Gamma(A)$ et $\Gamma(D)$ sont des espaces vectoriels. L'application f est linéaire, car :

$$\forall\,\alpha \in \mathbb{R}, \ \forall\,M_1, M_2 \in \Gamma(A), \quad f(\alpha M_1 + M_2) = P^{-1}(\alpha M_1 + M_2)P = \alpha P^{-1}M_1P + PM_2P^{-1} = \alpha f(M_1) + f(M_2).$$

L'application $g : \Gamma(D) \longrightarrow \Gamma(A), \quad N \longmapsto PNP^{-1}$ est correctement définie, est aussi linéaire, et il est clair que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{\Gamma(A)} \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_{\Gamma(D)}.$$

Ainsi, f est un isomorphisme d'espaces vectoriels et g est son isomorphisme réciproque. Il en résulte :

$$\dim\big(\Gamma(A)\big) = \dim\big(\Gamma(D)\big).$$

• Soit $N \in \mathbf{M}_n$. Décomposons N en blocs, $N = \big((N)_{rs}\big)_{1 \leqslant r,s \leqslant p}$, selon les dimensions $\omega_1, ..., \omega_p$. On a :

$$\begin{aligned} N \in \Gamma(D) &\iff ND = DN \iff \forall\,(r,s) \in \{1,...,p\}^2, \quad \sum_{t=1}^{p} (N)_{rt}(D)_{ts} = \sum_{t=1}^{p} (D)_{rt}(N)_{ts} \\ &\iff \forall\,(r,s) \in \{1,...,p\}^2, \quad (N)_{rs}\lambda_s \mathrm{I}_{\omega_s} = \lambda_r \mathrm{I}_{\omega_r}(N)_{rs} \iff \forall\,(r,s) \in \{1,...,p\}^2, \quad \lambda_s(N)_{rs} = \lambda_r(N)_{rs} \\ &\iff \forall\,(r,s) \in \{1,...,p\}^2, \quad (\lambda_s - \lambda_r)(N)_{rs} = 0 \iff \forall\,(r,s) \in \{1,...,p\}^2, \quad \big(r \neq s \implies (N)_{rs} = 0\big). \end{aligned}$$

Ainsi, $\Gamma(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales par blocs, selon les dimensions $\omega_k, \ 1 \leqslant k \leqslant p$:

$$\Gamma(D) = \left\{ \begin{pmatrix} N_{11} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & N_{pp} \end{pmatrix} ; N_{11} \in \mathbf{M}_{\omega_1}, ..., N_{pp} \in \mathbf{M}_{\omega_p} \right\}.$$

Il est clair alors que : $\quad \dim\big(\Gamma(D)\big) = \sum_{k=1}^{p} \dim\left(\mathbf{M}_{\omega_k}\right) = \sum_{k=1}^{p} \omega_k^2,$

d'où finalement, si A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n$: $\quad \boxed{\dim\big(\Gamma(A)\big) = \sum_{k=1}^{p} \omega_k^2}$

4.a. *2)* Lorsque $n = 4$, les valeurs possibles sont les suivantes, à l'ordre près de $\omega_1, ..., \omega_p$:

- $p = 4, \;\; \omega_1 = 1, \; \omega_2 = 1, \; \omega_3 = 1, \; \omega_4 = 1, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \omega_k^2 = 4$
- $p = 3, \;\; \omega_1 = 2, \; \omega_2 = 1, \; \omega_3 = 1, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \omega_k^2 = 6,$
- $p = 2, \quad \begin{cases} \omega_1 = 2, \; \omega_2 = 2, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \omega_k^2 = 8 \\ \omega_1 = 3, \; \omega_2 = 1, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \omega_k^2 = 10 \end{cases}$
- $p = 1, \;\; \omega_1 = 4, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \omega_k^2 = 16.$

Finalement, lorsque $n = 4$ et que A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n$:

$$\boxed{\text{Les valeurs possibles de } \dim\big(\Gamma(A)\big) \text{ sont : } \; 4, \, 6, \, 8, \, 10, \, 16}$$

4.b. Soit $A \in \mathbf{M}_n$, diagonalisable, telle que : $A \notin \mathbb{R}\mathrm{I}_n$. On a alors $p \neq 1$, c'est-à-dire : $p \geqslant 2$, d'où :

$$\dim\big(\Gamma(A)\big) = \sum_{k=1}^{p} \omega_k^2 = \omega_1^2 + \sum_{k=2}^{p} \omega_k^2 \leqslant \omega_1^2 + \Big(\sum_{k=2}^{p} \omega_k\Big)^2 = \omega_1^2 + (n - \omega_1)^2.$$

L'application $f : \{1, ..., n-1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto x^2 + (n-x)^2$ est dérivable et, pour tout $x \in \{1, ..., n-1\}$: $f'(x) = 4x - 2n$, d'où le tableau des variations de f :

x	1		$n/2$		$n-1$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1 + (n-1)^2$	$\searrow$		$\nearrow$	$(n-1)^2 + 1$

D'où : $\forall x \in \{1, ..., n-1\}, \;\; f(x) \leqslant 1 + (n-1)^2 = n^2 - 2n + 2$, et donc : $\dim\big(\Gamma(A)\big) \leqslant n^2 - 2n + 2$.

On conclut : $\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonalisable dans } \mathbf{M}_n \text{ et si } A \notin \mathbb{R}\,\mathrm{I}_n, \text{ alors : } \dim\big(\Gamma(A)\big) \leqslant n^2 - 2n + 2}$

4.c. • Si $p = n$ et $\big(\forall k \in \{1, ..., p\}, \; \omega_k = 1\big)$, alors : $\dim\big(\Gamma(A)\big) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \omega_k^2 = \sum_{k=1}^{p} 1^2 = p = n.$

• Réciproquement supposons : $\dim\big(\Gamma(A)\big) = n$.
Puisque les ω_k sont tous $\geqslant 1$, on a : $\quad \forall k \in \{1, ..., p\}, \;\; \omega_k^2 \geqslant \omega_k$.

D'où : $n = \dim\big(\Gamma(A)\big) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \omega_k^2 \geqslant \sum_{k=1}^{p} \omega_k = n$, d'où nécessairement : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \omega_k^2 = \sum_{k=1}^{p} \omega_k,$

puis : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \underbrace{(\omega_k^2 - \omega_k)}_{\geqslant 0} = 0$, et donc : $\forall k \in \{1, ..., p\}, \;\; \omega_k^2 = \omega_k,$

et enfin, puisque les ω_k sont tous non nuls : $\forall k \in \{1, ..., p\}, \; \omega_k = 1,$

puis : $n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \omega_k = \sum_{k=1}^{p} 1 = p.$

On conclut : $p = n$ et $\forall k \in \{1, ..., p\}, \;\; \omega_k = 1$.

Finalement, si A est diagonalisable, alors : $\boxed{\dim\big(\Gamma(A)\big) = n \iff \Big(p = n \;\text{ et }\; \big(\forall k \in \{1, ..., p\}, \;\; \omega_k = 1\big)\Big)}$

II.

1.a. Soit $S \in \mathbf{S}_n$.

1) Supposons $S \in \mathbf{S}_n^+$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(S)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}$ tel que : $SX = \lambda X$.

On a alors : $0 \leqslant {}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}X(SX) = {}^{\mathrm{t}}X(\lambda X) = \lambda\,{}^{\mathrm{t}}XX = \lambda \underbrace{||X||_2^2}_{>0}$, donc : $\lambda \geqslant 0$.

Ceci montre : $S \in \mathbf{S}_n^+ \implies \mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+$.

2) Réciproquement, supposons $\mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+$.

D'après le théorème spectral, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n$, $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n,) \in \mathbf{D}_n$ (ensemble des matrices diagonales) telles que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}$. On a : ${}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}X(\Omega D \Omega^{-1})X = ({}^{\mathrm{t}}X\Omega)D(\Omega^{-1}X) = {}^{\mathrm{t}}(\Omega^{-1}X)D(\Omega^{-1}X)$.

Notons $Y = \Omega^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a : ${}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}YDY = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\geqslant 0} y_i^2 \geqslant 0$, et donc : $S \in \mathbf{S}_n^+$.

On conclut : $\boxed{\text{Pour toute } S \in \mathbf{S}_n : \quad S \in \mathbf{S}_n^+ \iff \mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+}$

1.b. Soit $S \in \mathbf{S}_n$.

1) Supposons $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(S)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}$ tel que : $SX = \lambda X$.

On a alors : $0 < {}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}X(\lambda X) = \lambda({}^{\mathrm{t}}XX) = \lambda \underbrace{||X||_2^2}_{>0}$, donc : $\lambda > 0$.

Ceci montre : $S \in \mathbf{S}_n^{++} \implies \mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

2) Réciproquement, supposons $\mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème spectral, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n$, $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n,) \in \mathbf{D}_n$ (ensemble des matrices diagonales) telles que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}$. On a : ${}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}X(\Omega D \Omega^{-1})X = ({}^{\mathrm{t}}X\Omega)D(\Omega^{-1}X) = {}^{\mathrm{t}}(\Omega^{-1}X)D(\Omega^{-1}X)$.

Notons $Y = \Omega^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a : ${}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}YDY = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{>0} y_i^2 \geqslant 0$.

Si $\big(\forall\, i \in \{1, ..., n\},\quad y_i = 0\big)$, alors $Y = 0$ donc $X = \Omega Y = 0$, exclu.

Ainsi, il existe $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $y_{i_0} \neq 0$, et on déduit : ${}^{\mathrm{t}}XSX \geqslant \lambda_{i_0} y_{i_0}^2 > 0$.

Ceci montre : $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

On conclut : $\boxed{\text{Pour toute } S \in \mathbf{S}_n : \ S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+^*}$

2. *1)* Soit $M \in \mathbf{M}_n$. On a : ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}MM) = {}^{\mathrm{t}}M\,{}^{\mathrm{t}}{}^{\mathrm{t}}M = {}^{\mathrm{t}}MM$, donc : ${}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n$, et on a :

$$\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}, \quad {}^{\mathrm{t}}X({}^{\mathrm{t}}MM)X = ({}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}M)(MX) = {}^{\mathrm{t}}(MX)(MX) = ||MX||_2^2 \geqslant 0,$$

donc : ${}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^+$.

On conclut : $\boxed{\forall\, M \in \mathbf{M}_n, \quad {}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^+}$

2) En appliquant *1)* à $M = S$, on obtient : $\boxed{\forall\, S \in \mathbf{S}_n, \quad S^2 \in \mathbf{S}_n^+}$

3) En appliquant *1)* à $M = A$, on obtient : $\boxed{\forall\, A \in \mathbf{A}_n, \quad -A^2 \in \mathbf{S}_n^+}$

4) Soit $M \in \mathbf{M}_n$. On sait déjà, d'après *1)* : ${}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^+$.

• Supposons ${}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^{++}$. Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}$ tel que $MX = 0$.

On a : $0 = ||MX||_2^2 = {}^{\mathrm{t}}X({}^{\mathrm{t}}MM)X$, donc, puisque ${}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^{++}$, il s'ensuit $X = 0$. Ceci montre : $M \in \mathbf{GL}_n$.

• Réciproquement, supposons $M \in \mathbf{GL}_n$. On a, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}$: ${}^{\mathrm{t}}X({}^{\mathrm{t}}MM)X = ||MX||_2^2 > 0$, car $MX \neq 0$, vu que M est inversible et que X est non nul.

Ceci montre : ${}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^{++}$.

On conclut : $\boxed{\forall\, M \in \mathbf{M}_n, \quad \big({}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^{++} \iff M \in \mathbf{GL}_n\big)}$

5) D'abord, il est clair que $\mathbf{S}_n^{++}$ et $\mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n$ sont inclus dans $\mathbf{S}_n$. On a, pour toute $S \in \mathbf{S}_n$:

$$S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+^* \iff \begin{cases} \mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+ \\ 0 \notin \mathrm{Sp}\,(S) \end{cases} \iff \begin{cases} S \in \mathbf{S}_n^+ \\ S \in \mathbf{GL}_n \end{cases} \iff S \in \mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n.$$

On conclut : $\boxed{\mathbf{S}_n^{++} = \mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n}$

6) Soit $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

D'après *5)*, S est inversible, et, d'après le cours : ${}^{\mathrm{t}}(S^{-1}) = ({}^{\mathrm{t}}S)^{-1} = S^{-1}$, donc $S^{-1} \in \mathbf{S}_n$, et enfin, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}$: ${}^{\mathrm{t}}XS^{-1}X = ({}^{\mathrm{t}}XS^{-1})S(S^{-1}X) > 0$, car $S \in \mathbf{S}_n^{++}$ et $S^{-1}X \neq 0$.

On conclut : $\boxed{\forall\, S \in \mathbf{S}_n^{++}, \quad S^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++}}$

7) Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $S \in \mathbf{S}_n^+$. Déjà : $\alpha S \in \mathbf{S}_n$. Et : $\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}$, ${}^{\mathrm{t}}X(\alpha S)X = \underbrace{\alpha}_{\geqslant 0}(\underbrace{{}^{\mathrm{t}}XSX}_{\geqslant 0}) \geqslant 0$. D'où : $\alpha S \in \mathbf{S}_n^+$.

On conclut : $\boxed{\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, S \in \mathbf{S}_n^+, \quad \alpha S \in \mathbf{S}_n^+}$

8) Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $S \in \mathbf{S}_n^{++}$. On a vu en *7)* : $\alpha S \in \mathbf{S}_n^+$.

D'autre part, en utilisant *5)* : $\det(\alpha S) = \underbrace{\alpha^n}_{>0}\underbrace{\det(S)}_{\neq 0} \neq 0$, donc, toujours d'après *5)* : $\alpha S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

On conclut : $\boxed{\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, S \in \mathbf{S}_n^{++}, \quad \alpha S \in \mathbf{S}_n^{++}}$

9) Soient $M \in \mathbf{M}_n$, $S \in \mathbf{S}_n^+$. On a : ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}MSM) = {}^{\mathrm{t}}M\,{}^{\mathrm{t}}S\,{}^{\mathrm{t}}{}^{\mathrm{t}}M = {}^{\mathrm{t}}MSM$, donc : ${}^{\mathrm{t}}MSM \in \mathbf{S}_n$.

Et, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}$: ${}^{\mathrm{t}}X({}^{\mathrm{t}}MSM)X = {}^{\mathrm{t}}(MX)S(MX) \geqslant 0$, donc : ${}^{\mathrm{t}}MSM \in \mathbf{S}_n^+$.

On conclut : $\boxed{\forall\, M \in \mathbf{M}_n,\ \forall\, S \in \mathbf{S}_n^+, \quad {}^{\mathrm{t}}MSM \in \mathbf{S}_n^+}$

10) Soient $P \in \mathbf{GL}_n$, $S \in \mathbf{S}_n^{++}$. D'après *9)*, on a déjà : ${}^{\mathrm{t}}PSP \in \mathbf{S}_n^+$.

De plus : $\det({}^{\mathrm{t}}PSP) = \det({}^{\mathrm{t}}P)\det(S)\det(P) = \underbrace{\det(S)}_{>0}\underbrace{\big(\det(P)\big)^2}_{>0} > 0$, donc, d'après *5)* : ${}^{\mathrm{t}}PSP \in \mathbf{S}_n^{++}$.

On conclut : $\boxed{\forall\, P \in \mathbf{GL}_n,\ \forall\, S \in \mathbf{S}_n^{++}, \quad {}^{\mathrm{t}}PSP \in \mathbf{S}_n^{++}}$

11) Soient $S_1, S_2 \in \mathbf{S}_n^+$.

On a $S_1 + S_2 \in \mathbf{S}_n$ et : $\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}$, ${}^{\mathrm{t}}X(S_1+S_2)X = \underbrace{{}^{\mathrm{t}}XS_1X}_{\geqslant 0} + \underbrace{{}^{\mathrm{t}}XS_2X}_{\geqslant 0} \geqslant 0$, donc : $S_1 + S_2 \in \mathbf{S}_n^+$.

On conclut : $\boxed{\forall\, S_1 \in \mathbf{S}_n^+,\ \forall\, S_2 \in \mathbf{S}_n^+, \quad S_1 + S_2 \in \mathbf{S}_n^+}$

12) Soient $S_1 \in \mathbf{S}_n^+$, $S_2 \in \mathbf{S}_n^{++}$.

On a $S_1 + S_2 \in \mathbf{S}_n$ et : $\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}$, ${}^{\mathrm{t}}X(S_1+S_2)X = \underbrace{{}^{\mathrm{t}}XS_1X}_{\geqslant 0} + \underbrace{{}^{\mathrm{t}}XS_2X}_{>0} > 0$, donc : $S_1 + S_2 \in \mathbf{S}_n^{++}$.

On conclut : $\boxed{\forall\, S_1 \in \mathbf{S}_n^+,\ \forall\, S_2 \in \mathbf{S}_n^{++}, \quad S_1 + S_2 \in \mathbf{S}_n^{++}}$

13) Soient $S_1,\ S_2 \in \mathbf{S}_n^+$.

Il est clair que, si $S_1 = S_2 = 0$, alors $S_1 + S_2 = 0$.

Réciproquement, supposons $S_1 + S_2 = 0$. On a, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}$: $0 = {}^{\mathrm{t}}X(S_1 + S_2)X = \underbrace{{}^{\mathrm{t}}XS_1X}_{\geqslant 0} + \underbrace{{}^{\mathrm{t}}XS_2X}_{\geqslant 0}$,

d'où nécessairement : ${}^{\mathrm{t}}XS_1X = 0$ et ${}^{\mathrm{t}}XS_2X = 0$.

Puisque $\big(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1},\quad {}^{\mathrm{t}}XSX = 0\big)$, la forme quadratique représentée par S_1 dans la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}$ est la forme nulle, donc $S_1 = 0$, et de même $S_2 = 0$.

On conclut : $\boxed{\forall S_1 \in \mathbf{S}_n^+,\ \forall S_2 \in \mathbf{S}_n^+,\quad \big(S_1 + S_2 = 0 \iff S_1 = S_2 = 0\big)}$

3. • *Réflexivité :*

On a : $\forall S \in \mathbf{S}_n,\quad S - S = 0 \in \mathbf{S}_n^+$, donc : $\forall S \in \mathbf{S}_n,\quad S \leqslant S$, donc $\leqslant$ est réflexive.

• *Antisymétrie :*

Soient $S_1,\ S_2 \in \mathbf{S}_n$ telles que $S_1 \leqslant S_2$ et $S_2 \leqslant S_1$.

On a alors $S_2 - S_1 \in \mathbf{S}_n^+$ et $S_1 - S_2 \in \mathbf{S}_n^+$ et : $(S_2 - S_1) + (S_1 - S_2) = 0$. D'après 2.*13)*, on déduit $S_2 - S_1 = 0,\ S_2 = S_1$.

Ainsi, $\leqslant$ est antisymétrique.

• *Transitivité :*

Soient $S_1,\ S_2,\ S_3 \in \mathbf{S}_n$ telles que $S_1 \leqslant S_2$ et $S_2 \leqslant S_3$.

On a alors $S_2 - S_1 \in \mathbf{S}_n^+$ et $S_3 - S_2 \in \mathbf{S}_n^+$, donc, d'après *11)* : $S_3 - S_1 = (S_3 - S_2) + (S_2 - S_1) \in \mathbf{S}_n^+$, et donc : $S_1 \leqslant S_3$.

Ceci montre que $\leqslant$ est transitive.

• *Non-totalité :*

Si $n \geqslant 2$, en notant $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $S_1 \in \mathbf{S}_2,\ S_2 \in \mathbf{S}_2,\ S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathbf{S}_2^+$ car $\mathrm{Sp}\,(S_2 - S_1) \not\subset \mathbb{R}_+$, et $S_1 - S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathbf{S}_2^+$, donc on n'a ni $S_1 \leqslant S_2$ ni $S_2 \leqslant S_1$.

Ainsi, l'ordre $\leqslant$ n'est pas total dans $\mathbf{S}_2$.

En complétant les matrices précédentes par des termes tous nuls, pour atteindre la taille n, on conclut que l'ordre $\leqslant$ n'est pas total, pour tout $n \geqslant 2$.

On peut remarquer que, pour $n = 1$, l'ordre $\leqslant$ dans $\mathbf{S}_1$ est l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, qui est total.

Finalement : $\boxed{\leqslant \text{ est une relation d'ordre sur } \mathbf{S}_n\text{, non totale dès que } n \geqslant 2}$

4. *1)* Soient $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4 \in \mathbf{S}_n$. On a :

$$\begin{cases} S_1 \leqslant S_2 \\ S_3 \leqslant S_4 \end{cases} \iff \begin{cases} S_2 - S_1 \in \mathbf{S}_n^+ \\ S_4 - S_3 \in \mathbf{S}_n^+ \end{cases} \implies (S_2 - S_1) + (S_4 - S_3) \in \mathbf{S}_n^+$$

$$\iff (S_2 + S_4) - (S_1 + S_3) \in \mathbf{S}_n^+ \iff S_1 + S_3 \leqslant S_2 + S_4.$$

On conclut : $\boxed{\forall S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4 \in \mathbf{S}_n,\quad \left(\begin{cases} S_1 \leqslant S_2 \\ S_3 \leqslant S_4 \end{cases} \implies S_1 + S_3 \leqslant S_2 + S_4\right)}$

Autrement dit, l'ordre $\leqslant$ sur $\mathbf{S}_n$ est compatible avec l'addition.

2) Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+,\ S_1,\ S_2 \in \mathbf{S}_n$. On a :

$$S_1 \leqslant S_2 \iff S_2 - S_1 \in \mathbf{S}_n^+ \implies \alpha(S_2 - S_1) \in \mathbf{S}_n^+ \iff \alpha S_2 - \alpha S_1 \in \mathbf{S}_n^+ \iff \alpha S_1 \leqslant \alpha S_2.$$

On conclut : $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \forall S_1,\ S_2 \in \mathbf{S}_n,\quad \big(S_1 \leqslant S_2 \implies \alpha S_1 \leqslant \alpha S_2\big)}$

Autrement dit, l'ordre $\leqslant$ sur $\mathbf{S}_n$ est compatible avec la multiplication par des réels $\geqslant 0$.

3) Soient $M \in \mathbf{M}_n,\ S_1,\ S_2 \in \mathbf{S}_n$ telles que $S_1 \leqslant S_2$, c'est-à-dire $S_2 - S_1 \in \mathbf{S}_n^+$.

On a alors ${}^{\mathrm{t}}MS_1M \in \mathbf{S}_n,\ {}^{\mathrm{t}}MS_2M \in \mathbf{S}_n$ et : ${}^{\mathrm{t}}MS_2M - {}^{\mathrm{t}}MS_1M = {}^{\mathrm{t}}M(S_2 - S_1)M \in \mathbf{S}_n^+$, donc : ${}^{\mathrm{t}}MS_1M \leqslant {}^{\mathrm{t}}MS_2M$.

On conclut : $\boxed{\forall M \in \mathbf{M}_n,\ \forall S_1,\ S_2 \in \mathbf{S}_n,\ \ \big(S_1 \leqslant S_2 \implies {}^{\mathrm{t}}MS_1M \leqslant {}^{\mathrm{t}}MS_2M\big)}$

5. *1)* Soit $S \in \mathbf{S}_n$. D'après le théorème spectral, il existe $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{D}_n$ et $\Omega \in \mathbf{O}_n$ telles que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$. On a alors : $\mathrm{I}_n - S = \Omega(\mathrm{I}_n - D)\Omega^{-1}$ et $S - S^2 = \Omega(D - D^2)\Omega^{-1}$. D'après 1.a., on a donc :

$$\begin{aligned} S^2 \leqslant S &\iff \forall k \in \{1, ..., n\},\ \ \lambda_k - \lambda_k^2 \geqslant 0 \iff \forall k \in \{1, ..., n\},\ \ 0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1 \\ &\iff \big(\forall k \in \{1, ..., n\},\ \ \lambda_k \geqslant 0\big) \ \text{ et } \ \big(\forall k \in \{1, ..., n\},\ \ \lambda_k \leqslant 1\big) \\ &\iff \big(S \in \mathbf{S}_n^+ \ \text{ et } \ \mathrm{I}_n - S \in \mathbf{S}_n^+\big) \iff \big(0 \leqslant S \ \text{ et } \ S \leqslant \mathrm{I}_n\big) \iff 0 \leqslant S \leqslant \mathrm{I}_n. \end{aligned}$$

2) Soit $S \in \mathbf{S}_n^{++}$. D'après le théorème spectral, il existe $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{D}_n$ et $\Omega \in \mathbf{O}_n$ telles que $S = \Omega D \Omega^{-1}$, et, d'après 1.b., on a : $\forall k \in \{1, ..., n\},\ \lambda_k > 0$.

Alors : $\quad \mathrm{I}_n - S = \Omega(\mathrm{I}_n - D)\Omega^{-1} \quad$ et $\quad S^{-1} - \mathrm{I}_n = \Omega(D^{-1} - \mathrm{I}_n)\Omega^{-1}$,

d'où :

$$\begin{aligned} S \leqslant \mathrm{I}_n &\iff \mathrm{I}_n - S \in \mathbf{S}_n^+ \iff \forall k \in \{1, ..., n\},\ \ 1 - \underbrace{\lambda_k}_{>0} \geqslant 0 \\ &\iff \forall k \in \{1, ..., n\},\ \ \lambda_k^{-1} \geqslant 1 \iff S^{-1} - \mathrm{I_n} \in \mathbf{S}_n^+ \iff \mathrm{I}_n \leqslant S^{-1}. \end{aligned}$$

On conclut : $\boxed{\forall S \in \mathbf{S}_n^{++},\ \ \big(S \leqslant \mathrm{I}_n \iff \mathrm{I}_n \leqslant S^{-1}\big)}$

3) Soit $C \in \mathbf{M}_{n,1}$. On a d'abord : $C\,{}^{\mathrm{t}}C \in \mathbf{S}_n$ et $({}^{\mathrm{t}}CC)\mathrm{I}_n \in \mathbb{R}\mathrm{I}_n \subset \mathbf{S}_n$. Et, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}$:

$${}^{\mathrm{t}}X\big(({}^{\mathrm{t}}CC)\mathrm{I}_n - C\,{}^{\mathrm{t}}C\big)X = {}^{\mathrm{t}}X\underbrace{{}^{\mathrm{t}}CC}_{\in\mathbb{R}}X - {}^{\mathrm{t}}XC\,{}^{\mathrm{t}}CX = ({}^{\mathrm{t}}CC)\,{}^{\mathrm{t}}XX - {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}CX)({}^{\mathrm{t}}CX) = ||C||_2^2||X||_2^2 - (C\,|\,X)^2 \geqslant 0,$$

d'après l'inégalité de Cauchy et Schwarz dans $\mathbf{M}_{n,1}$ usuel.

On a donc : $({}^{\mathrm{t}}CC)\mathrm{I}_n - C\,{}^{\mathrm{t}}C \in \mathbf{S}_n^+$, c'est-à-dire : $C\,{}^{\mathrm{t}}C \leqslant ({}^{\mathrm{t}}CC)\mathrm{I}_n$.

On conclut : $\boxed{\forall C \in \mathbf{M}_{n,1},\ \ C\,{}^{\mathrm{t}}C \leqslant ({}^{\mathrm{t}}CC)\mathrm{I}_n}$

4) Soit $M \in \mathbf{M}_n$. Remarquons d'abord que, d'après II 2. *1)* : ${}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^+$ et $M\,{}^{\mathrm{t}}M \in \mathbf{S}_n^+$.

• Montrons que ${}^{\mathrm{t}}MM$ et $M\,{}^{\mathrm{t}}M$ ont le même spectre.

$*$ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,({}^{\mathrm{t}}MM)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}$ tel que : ${}^{\mathrm{t}}MM = \lambda X$.

On a alors : $(M\,{}^{\mathrm{t}}M)MX = M({}^{\mathrm{t}}MM)X = M(\lambda X) = \lambda MX$.

Si $MX \neq 0$, alors λ est valeur propre de $M\,{}^{\mathrm{t}}M$.

Supposons $MX = 0$. Alors : $\lambda X = {}^{\mathrm{t}}MMX = {}^{\mathrm{t}}M0 = 0$, donc $\lambda = 0$.

Ainsi, 0 est valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}MM$, donc $\det\,({}^{\mathrm{t}}MM) = 0$.

Mais : $\det\,(M\,{}^{\mathrm{t}}M) = \det\,(M)\det\,({}^{\mathrm{t}}M) = \det\,({}^{\mathrm{t}}M)\det\,(M) = \det\,({}^{\mathrm{t}}MM) = 0$,

donc 0 est aussi valeur propre de $M\,{}^{\mathrm{t}}M$.

On a montré : $\quad \mathrm{Sp}\,({}^{\mathrm{t}}MM) \subset \mathrm{Sp}\,(M\,{}^{\mathrm{t}}M)$.

$*$ En appliquant ce résultat à ${}^{\mathrm{t}}M$ à la place de M, on obtient : $\mathrm{Sp}\,(M\,{}^{\mathrm{t}}M) \subset \mathrm{Sp}\,({}^{\mathrm{t}}MM)$.

On conclut : $\quad \mathrm{Sp}\,({}^{\mathrm{t}}MM) = \mathrm{Sp}\,(M\,{}^{\mathrm{t}}M)$.

• On a, en notant $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}MM$ (et de $M\,{}^{\mathrm{t}}M$, comme on vient de le voir) :

$${}^{\mathrm{t}}MM \leqslant \mathrm{I}_n \iff \mathrm{I}_n - {}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^+ \iff \forall k \in \{1, ..., n\},\ \ 1 - \lambda_k \geqslant 0 \iff \mathrm{I}_n - M\,{}^{\mathrm{t}}M \in \mathbf{S}_n^+ \iff M\,{}^{\mathrm{t}}M \leqslant \mathrm{I}_n.$$

Finalement : $\boxed{\forall M \in \mathbf{M}_n,\ \ \big({}^{\mathrm{t}}MM \leqslant \mathrm{I}_n \iff M\,{}^{\mathrm{t}}M \leqslant \mathrm{I}_n\big)}$

5) Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^{++}$. Remarquons d'abord que, d'après 2. *5)* et *12)*, on a :

$$A + B \in \mathbf{S}_n^{++}, \quad A \in \mathbf{GL}_n, \quad B \in \mathbf{GL}_n, \quad A + B \in \mathbf{GL}_n,$$

donc A^{-1}, B^{-1}, $(A+B)^{-1}$ existent, et, d'après 2. *6)*, ce sont des éléments de $\mathbf{S}_n^{++}$.
On a, en utilisant les propriétés vues en 2. :

$$\begin{aligned}
(A+B)^{-1} \leqslant \frac{1}{4}(A^{-1}+B^{-1}) &\iff 4(A+B)^{-1} \leqslant A^{-1}+B^{-1} \\
&\iff (A+B)\big(4(A+B)^{-1}\big)(A+B) \leqslant (A+B)(A^{-1}+B^{-1})(A+B) \\
&\iff 4(A+B) \leqslant (2\mathrm{I}_n + AB^{-1} + BA^{-1})(A+B) \\
&\iff 4(A+B) \leqslant 3(A+B) + AB^{-1}A + BA^{-1}B \iff A+B \leqslant AB^{-1}A + BA^{-1}B \\
&\iff 0 \leqslant (AB^{-1} - BA^{-1})(A-B) \iff 0 \iff (A-B)(A^{-1}+B^{-1})(A-B) \quad (*) .
\end{aligned}$$

Comme $A^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++}$ et $B^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++}$, on a $A^{-1}+B^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{S}_n^{+}$, puis $(A-B)(A^{-1}+B^{-1})(A-B) \in \mathbf{S}_n^{+}$, ce qui montre que l'inégalité $(*)$ est vraie, et enfin, par équivalences logiques successives, l'inégalité voulue est vraie.

On conclut : $$\boxed{\forall A, B \in \mathbf{S}_n^{++}, \quad (A+B)^{-1} \leqslant \frac{1}{4}(A^{-1}+B^{-1})}$$

III.

1.a. Soit $S \in \mathbf{S}_n^{+}$.
Puisque $S \in \mathbf{S}_n^{+} \subset \mathbf{S}_n$, d'après le théorème spectral, il existe $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{D}_n$ et $\Omega \in \mathbf{O}_n$ telles que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$, et, d'après 1.a. : $\forall\, k \in \{1, ..., n\}, \quad \lambda_k \geqslant 0$.

1) Existence :
Notons $\Delta = \mathrm{diag}\,(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ et $R = \Omega \Delta \Omega^{-1}$. On a :
- ${}^{\mathrm{t}}R = {}^{\mathrm{t}}(\Omega\Delta\Omega^{-1}) = {}^{\mathrm{t}}\Omega^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\Delta\,{}^{\mathrm{t}}\Omega = \Omega\Delta\Omega^{-1}$, donc : $R \in \mathbf{S}_n$
- $\mathrm{Sp}\,(R) = \big\{\sqrt{\lambda_k}\,;k \in \{1, ..., n\}\big\} \subset \mathbb{R}_+$, et on a vu $R \in \mathbf{S}_n$, donc : $R \in \mathbf{S}_n^{+}$
- $R^2 = (\Omega\Delta\Omega^{-1})^2 = \Omega\Delta^2\Omega^{-1} = \Omega D \Omega^{-1} = S$.

Ainsi, R convient.

2) Unicité :
Soit R convenant. Notons $A = \Omega^{-1}R\Omega$, de sorte que : $R = \Omega A \Omega^{-1}$. On a :

$$R^2 = S \iff (\Omega A \Omega^{-1})^2 = \Omega D \Omega^{-1} \iff \Omega A^2 \Omega^{-1} = \Omega D \Omega^{-1} \iff A^2 = D.$$

En particulier, A commute avec D, puisque : $AD = AA^2 = A^2A = DA$.
D'après la solution de I. 4. a. *1)*, en notant $D = \mathrm{diag}\,(\mu_1\mathrm{I}_{\omega_1}, ..., \mu_p\mathrm{I}_{\omega_p})$, où $\mu_1, ..., \mu_p$ sont deux à deux distincts, la matrice de A est de la forme $A = \mathrm{diag}\,(A_1, ..., A_p)$.
De plus, A est symétrique, car : ${}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}(\Omega R \Omega^{-1}) = {}^{\mathrm{t}}\Omega\,{}^{\mathrm{t}}R\,{}^{\mathrm{t}}\Omega^{-1} = \Omega^{-1}R\Omega = A$, donc $A_1, ..., A_p$ sont symétriques.
Comme $A = {}^{\mathrm{t}}\Omega R \Omega$ et que $R \in \mathbf{S}_n^{+}$, d'après II.2.*9)*, on a : $A \in \mathbf{S}_n^{+}$.
Par restriction d'une forme quadratique positive, il s'ensuit : $\forall\, k \in \{1, ..., n\}, \quad A_k \in \mathbf{S}_{\omega_k}^{+}$.
Soit $k \in \{1, ..., n\}$. D'après le théorème spectral, il existe $D_k \in \mathbf{D}_{\omega_k}$ et $\Omega_k \in \mathbf{O}_{\omega_k}$ telles que : $A_k = \Omega_k D_k \Omega_k^{-1}$. Comme $A_k^2 = \mu_k \mathrm{I}_{\omega_k}$, on a : $\Omega_k D_k^2 \Omega_k^{-1} = \mu_k \mathrm{I}_{\omega_k}$, d'où : $D_k^2 = \Omega_k^{-1}(\mu_k\mathrm{I}_{\omega_k})\Omega_k = \mu_k\mathrm{I}_{\omega_k}$, puis, comme il ne s'agit que de matrices diagonales et que les coefficients diagonaux de D_k sont tous $\geqslant 0$, on a : $D_k = \sqrt{\mu_k}\,\mathrm{I}_{\omega_k}$.
On a donc : $A = \Delta$, définie en *1)*, puis : $R = \Omega\Delta\Omega^{-1}$, ce qui montre l'unicité de R.

Finalement : $$\boxed{\forall\, S \in \mathbf{S}_n^{+}, \ \exists! R \in \mathbf{S}_n^{+}, \quad R^2 = S}$$

On note : $R = S^{1/2}$.

1.b. Soit $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

• Puisque $S^{1/2} \in \mathbf{S}_n^{+}$, on a : $\mathrm{Sp}\,(S^{1/2}) \subset \mathbb{R}_+$.

De plus : $0 \neq \det(S) = \det\big((S^{1/2})^2\big) = \big(\det(S^{1/2})\big)^2$, donc : $\det(S^{1/2}) \neq 0$, d'où : $0 \notin \mathrm{Sp}\,(S^{1/2})$.

Il en résulte : $\mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+^*$ puis, d'après II.1.b. : $S^{1/2} \in \mathbf{S}_n^{++}$.

• On a : $\big((S^{1/2})^{-1}\big)^2 = \big((S^{1/2})^2\big)^{-1} = S^{-1}$ et $(S^{1/2})^{-1} \in \mathbf{S}_n^{+}$, donc, par unicité de $(S^{-1})^{1/2}$, on déduit : $(S^{1/2})^{-1} = (S^{-1})^{1/2}$.

On conclut : $$\boxed{\forall\, S \in \mathbf{S}_n^{++}, \quad \big(S^{1/2} \in \mathbf{S}_n^{++} \quad \text{et} \quad (S^{1/2})^{-1} = (S^{-1})^{1/2}\big)}$$

1.c. Soit $S \in \mathbf{S}_n^{+}$. On a : $\dfrac{1}{2}(\mathrm{I}_n + S) - S^{1/2} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{I}_n + S - 2S^{1/2}) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{I}_n - S^{1/2})^2 \in \mathbf{S}_n^{+}$,

donc : $$\boxed{\forall\, S \in \mathbf{S}_n^{+}, \quad S^{1/2} \leqslant \tfrac{1}{2}(\mathrm{I}_n + S)}$$

1.d. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $S \in \mathbf{S}_n^{+}$. Alors, $\alpha^{1/2}S^{1/2} \in \mathbf{S}_n^{+}$ et : $(\alpha^{1/2}S^{1/2})^2 = (\alpha^{1/2})^2(S^{1/2})^2 = \alpha S$,
donc, par unicité de $(\alpha S)^{1/2}$: $\alpha^{1/2}S^{1/2} = (\alpha S)^{1/2}$.

On conclut : $$\boxed{\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, S \in \mathbf{S}_n^{+}, \quad (\alpha S)^{1/2} = \alpha^{1/2}S^{1/2}}$$

2. Soit $S \in \mathbf{S}_n^{+}$. D'après le théorème spectral, il existe $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{D}_n$ et $\varOmega \in \mathbf{O}_n$ telles que : $S = \varOmega D \varOmega^{-1}$, et on a : $\forall\, k \in \{1, ..., n\}, \quad \lambda_k \geqslant 0$.

On a : $$\forall\, (k, \ell) \in \{1, ..., n\}^2, \quad \big(\lambda_k = \lambda_\ell \implies \sqrt{\lambda_k} = \sqrt{\lambda_\ell}\big).$$

D'après le cours sur l'interpolation, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] \subset \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que : $\forall\, k \in \{1, ..., n\}, \quad \sqrt{\lambda_k} = P(\lambda_k)$.

On a alors, en notant $\varDelta = \mathrm{diag}\,(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$: $\varDelta = \mathrm{diag}\,\big(P(\lambda_1), ..., P(\lambda_k)\big) = P\big(\mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)\big) = P(D)$,

puis, par changement de base, d'après le cours : $\varOmega\varDelta\varOmega^{-1} = \varOmega P(D)\varOmega^{-1} = P(\varOmega D \varOmega^{-1})$, donc : $S^{1/2} = P(S)$.

On conclut : $$\boxed{\forall\, S \in \mathbf{S}_n^{+},\ \exists\, P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad S^{1/2} = P(S)}$$

Remarquons que P dépend de S.

3.a. Soit $S \in \mathbf{S}_n^{+}$.

• Puisque $S = (S^{1/2})^2$, S est un polynôme en $S^{1/2}$. Il en résulte que toute matrice qui commute avec $S^{1/2}$ commute avec S, donc : $\Gamma(S^{1/2}) \subset \Gamma(S)$.

• Puisque $S^{1/2}$ est un polynôme en S (cf 2.), toute matrice qui commute avec S commute avec $S^{1/2}$, donc : $\Gamma(S) \subset \Gamma(S^{1/2})$.

Finalement : $$\boxed{\forall\, S \in \mathbf{S}_n^{+}, \quad \Gamma(S) = \Gamma(S^{1/2})}$$

3.b. Soient $A, B \in \mathbf{S}_+$ telles que A et B commutent.
Alors, A commute avec B, donc $A \in \Gamma(B) = \Gamma(B^{1/2})$, donc A commute avec $B^{1/2}$.
Et il est clair que A commute avec $A^{1/2}$.
De même, en appliquant le résultat précédent à (B, A) à la place de (A, B), B commute avec A et avec $A^{1/2}$.
Enfin, puisque $A^{1/2}$ commute avec B, on a : $A^{1/2} \in \Gamma(B) = \Gamma(B^{1/2})$, donc $A^{1/2}$ commute avec $B^{1/2}$.
Finalement, A, B, $A^{1/2}$, $B^{1/2}$ commutent toutes entre elles.

4. Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^{++}$ telles que $A \leqslant B$.

4.a. D'après 1. : $B^{-1/2} \in \mathbf{S}_n^{++}$, donc, comme $A \leqslant B$, d'après II.4.*3)* : $B^{-1/2}AB^{-1/2} \leqslant B^{-1/2}BB^{-1/2} = \mathrm{I}_n$.

4.b. Puisque $B^{-1/2}AB^{-1/2} \in \mathbf{S}_n^{++}$ et que $B^{-1/2}AB^{-1/2} \leqslant \mathrm{I}_n$, d'après II.5.*2)* : $\mathrm{I}_n \leqslant (B^{-1/2}AB^{-1/2})^{-1} = B^{1/2}A^{-1}B^{1/2}$.

4.c. D'après II.4.*3)*, on déduit : $B^{-1} = B^{-1/2}\mathrm{I}_n B^{-1/2} \leqslant B^{-1/2}(B^{1/2}A^{-1}B^{1/2})B^{-1/2} = A^{-1}$.

On conclut : $\boxed{\text{L'application } \mathbf{S}_n^{++} \longrightarrow \mathbf{S}_n^{++},\ \ S \longmapsto S^{-1} \text{ est décroissante}}$

5.a. Soient $S \in \mathbf{S}_n^+$ et $X \in \mathbf{M}_{n,1}$.

• Si $SX = 0$, alors : ${}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}X0 = 0$.

• Réciproquement, supposons ${}^{\mathrm{t}}XSX = 0$.
Alors : $0 = {}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}X(S^{1/2})^2X = ({}^{\mathrm{t}}XS^{1/2})(S^{1/2}X) = {}^{\mathrm{t}}(S^{1/2}X)(S^{1/2}X) = ||S^{1/2}X||_2^2$,
donc : $S^{1/2}X = 0$, puis : $SX = S^{1/2}(S^{1/2}X) = S^{1/2}0 = 0$.

On conclut : $\boxed{\forall\, S \in \mathbf{S}_n^+,\ \forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1},\ \ \big(SX = 0 \iff {}^{\mathrm{t}}XSX = 0\big)}$

5.b Soient $S_1, S_2 \in \mathbf{S}_n^+$ telles que $S_1 \leqslant S_2$. Notons $S = S_2 - S_1 \in \mathbf{S}_n^+$, de sorte que : $S_2 = S + S_1$.

1) Soit $X \in \mathrm{Ker}\,(S_2)$. On a alors $S_2X = 0$, donc ${}^{\mathrm{t}}XS_2X = 0$. Mais : ${}^{\mathrm{t}}XS_2X = {}^{\mathrm{t}}X(S+S_1)X = \underbrace{{}^{\mathrm{t}}XSX}_{\geqslant 0} + \underbrace{{}^{\mathrm{t}}XS_1X}_{\geqslant 0}$.

Il en résulte : ${}^{\mathrm{t}}XS_1X = 0$, puis, d'après 5.a. : $S_1X = 0$, donc $X \in \mathrm{Ker}\,(S_1)$.
On a montré : $\mathrm{Ker}\,(S_2) \subset \mathrm{Ker}\,(S_1)$.

2) • Montrons d'abord : $\forall\, S \in \mathbf{S}_n,\ \ \mathrm{Im}\,(S) = \big(\mathrm{Ker}\,(S)\big)^{\perp}$.

$*$ Soit $Y \in \mathrm{Im}\,(S)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}$ tel que $Y = SX$.
On a, pour tout $Z \in \mathrm{Ker}\,(S)$: $(Y \mid Z) = {}^{\mathrm{t}}YZ = {}^{\mathrm{t}}(SX)Z = {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}SZ = {}^{\mathrm{t}}X\underbrace{SZ}_{=0} = 0$, donc : $Y \in \big(\mathrm{Ker}\,(S)\big)^{\perp}$.

Ceci montre : $\mathrm{Im}\,(S) \subset \big(\mathrm{Ker}\,(S)\big)^{\perp}$.

On a, d'après le théorème du rang : $\dim \mathrm{Im}\,(S) = n - \dim \mathrm{Ker}\,(S) = \dim \big(\mathrm{Ker}\,(S)\big)^{\perp}$.

On conclut : $\mathrm{Im}\,(S) = \big(\mathrm{Ker}\,(S)\big)^{\perp}$.

• D'où ici, en utilisant le résultat précédent sur les noyaux : $\mathrm{Im}\,(S_1) = \big(\mathrm{Ker}\,(S_1)\big)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\,(S_2)\big)^{\perp} = \mathrm{Im}\,(S_2)$.

On conclut : $\boxed{\forall\, S_1,\, S_2 \in \mathbf{S}_n^+,\ \ S_1 \leqslant S_2 \implies \begin{cases} \mathrm{Ker}\,(S_1) \supset \mathrm{Ker}\,(S_2) \\ \mathrm{Im}\,(S_1) \subset \mathrm{Im}\,(S_2) \end{cases}}$

5.c. Soit $A \in \mathbf{M}_n$.

• Soit $Y \in \mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}$ tel que $Y = (A\,{}^{\mathrm{t}}A)X = A({}^{\mathrm{t}}AX)$, donc $Y \in \mathrm{Im}\,(A)$.
Ceci montre : $\mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A) \subset \mathrm{Im}\,(A)$.

• D'autre part, montrons $\mathrm{Ker}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{Ker}\,({}^{\mathrm{t}}A)$.

$*$ Soit $X \in \mathrm{Ker}\,({}^{\mathrm{t}}A)$. Alors : $(A\,{}^{\mathrm{t}}A)X = A({}^{\mathrm{t}}AX) = 0$, donc : $X \in \mathrm{Ker}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A)$.
Ceci montre : $\mathrm{Ker}\,({}^{\mathrm{t}}A) \subset \mathrm{Ker}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A)$.

$*$ Réciproquement, soit $X \in \mathrm{Ker}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A)$.
On a alors : $||\,{}^{\mathrm{t}}AX||_2^2 = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}AX)({}^{\mathrm{t}}AX) = {}^{\mathrm{t}}X(A\,{}^{\mathrm{t}}AX) = 0$, donc ${}^{\mathrm{t}}AX = 0$, d'où $X \in \mathrm{Ker}\,({}^{\mathrm{t}}A)$.
Ceci montre : $\mathrm{Ker}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A) \subset \mathrm{Ker}\,({}^{\mathrm{t}}A)$.
On obtient : $\mathrm{Ker}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{Ker}\,({}^{\mathrm{t}}A)$.

• Revenons aux images, en utilisant le théorème du rang :

$$\dim \mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A) = n - \dim \mathrm{Ker}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A) = n - \dim \mathrm{Ker}\,({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{rg}\,(A) = \dim \mathrm{Im}\,(A).$$

On conclut : $\boxed{\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A)}$

5.d. Soient $A, B \in \mathbf{M}_n$.

On a, d'après c. : $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A)$ et $\mathrm{Im}\,(B) = \mathrm{Im}\,(B\,{}^{\mathrm{t}}B)$, donc : $\mathrm{Im}\,(A) + \mathrm{Im}\,(B) = \mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A) + \mathrm{Im}\,(B\,{}^{\mathrm{t}}B)$.

• L'inclusion $\mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A + B\,{}^{\mathrm{t}}B) \subset \mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A) + \mathrm{Im}\,(B\,{}^{\mathrm{t}}B)$ est immédiate.

• Comme $A\,{}^{\mathrm{t}}A \in \mathbf{S}_n^+$ et $B\,{}^{\mathrm{t}}B \in \mathbf{S}_n^+$, on a, d'après c. :

$$\mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A) \subset \mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A + B\,{}^{\mathrm{t}}B) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(B\,{}^{\mathrm{t}}B) \subset \mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A + B\,{}^{\mathrm{t}}B),$$

d'où : $\mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A) + \mathrm{Im}\,(B\,{}^{\mathrm{t}}B) \subset \mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A + B\,{}^{\mathrm{t}}B)$, et donc : $\mathrm{Im}\,(A) + \mathrm{Im}\,(B) \subset \mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A + B\,{}^{\mathrm{t}}B)$.

On conclut : $\boxed{\forall\, A, B \in \mathbf{M}_n, \quad \mathrm{Im}\,(A) + \mathrm{Im}\,(B) = \mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A + B\,{}^{\mathrm{t}}B)}$

6. Pour $n = 2$, considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

• $A \in \mathbf{S}_2^+$, car $A \in \mathbf{S}_2$ et $\mathrm{Sp}\,(A) = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}_+$

• $B \in \mathbf{S}_2^+$, car $B \in \mathbf{S}_2$ et, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,1}$: ${}^{\mathrm{t}}XBX = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 \geqslant 0$

• $A \leqslant B$, car $B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_2^+$, puisque $B - A \in \mathbf{S}_2$ et $\mathrm{Sp}\,(B - A) = \{0, 2\} \subset \mathbb{R}_+$

• $B^2 - A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathbf{S}_2^+$, car son déterminant est égal à -1, donc son spectre n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_+$.

Cet exemple montre que, pour $n = 2$, l'application $S \longmapsto S^2$ n'est pas croissante sur $\mathbf{S}_2$.

En complétant cet exemple par des termes tous nuls, il est clair que l'application $S \longmapsto S^2$ n'est pas croissante pour tout $n \geqslant 2$.

Enfin, pour $n = 1$, cette application est l'application $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad s \longmapsto s^2$, qui est croissante.

Finalement : $\boxed{\text{L'application } \mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathbf{S}_n^+, \quad S \longmapsto S^2 \text{ est croissante si et seulement si } n = 1}$

7.a. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(C)$, $X \in \mathrm{SEP}\,(C, \lambda)$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda\,{}^{\mathrm{t}}X(B^{1/2} + A^{1/2})X &= {}^{\mathrm{t}}X(B^{1/2} + A^{1/2})(\lambda X) = {}^{\mathrm{t}}X(B^{1/2} + A^{1/2})\big((B^{1/2} - A^{1/2})X\big) \\
&= {}^{\mathrm{t}}X\big((B^{1/2} + A^{1/2})(B^{1/2} - A^{1/2})\big)X = {}^{\mathrm{t}}X(B - B^{1/2}A^{1/2} + A^{1/2}B^{1/2} - A)X \\
&= {}^{\mathrm{t}}X(B - A)X - {}^{\mathrm{t}}(B^{1/2}X)(A^{1/2}X) + {}^{\mathrm{t}}(A^{1/2}X)(B^{1/2}X) \\
&= {}^{\mathrm{t}}X(B - A)X \underbrace{-\big(B^{1/2}X \mid A^{1/2}X\big) + \big(A^{1/2}X \mid B^{1/2}X\big)}_{=0} = {}^{\mathrm{t}}X(B - A)X \geqslant 0,
\end{aligned}$$

car $B - A \in \mathbf{S}_n^+$.

7.b. Puisque $B^{1/2} + A^{1/2} \in \mathbf{S}_n^+$, on a : ${}^{\mathrm{t}}X(B^{1/2} + A^{1/2})X \geqslant 0$.

• Si ${}^{\mathrm{t}}X(B^{1/2} + A^{1/2})X > 0$, alors, d'après a. : $\lambda \geqslant 0$.

• Supposons ${}^{\mathrm{t}}X(B^{1/2} + A^{1/2})X = 0$. Alors : $\underbrace{{}^{\mathrm{t}}XB^{1/2}X}_{\geqslant 0} + \underbrace{{}^{\mathrm{t}}XA^{1/2}X}_{\geqslant 0} = 0$, donc ${}^{\mathrm{t}}XB^{1/2}X = 0$ et ${}^{\mathrm{t}}XA^{1/2}X = 0$,

d'où, d'après 5.a. : $B^{1/2}X = 0$ et $A^{1/2}X = 0$, puis : $\lambda X = CX = (B^{1/2} - A^{1/2})X = B^{1/2}X - A^{1/2}X = 0$, et donc, puisque $X \neq 0$: $\lambda = 0$.

On a montré : $\lambda \geqslant 0$.

7.c. On a établi : $C \in \mathbf{S}_n$ et $\mathrm{Sp}\,(C) \subset \mathbb{R}_+$, donc $C \in \mathbf{S}_n^+$, c'est-à-dire : $A^{1/2} \leqslant B^{1/2}$.

On conclut : $\boxed{\text{L'application } \mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathbf{S}_n^+, \quad A \longmapsto A^{1/2} \text{ est croissante}}$

8. Soient $\alpha \in [0\,;1]$, $A, B \in \mathbf{S}_n^+$. On a :

$$\big[\alpha A + (1-\alpha)B\big] - \big[\alpha A^{1/2} + (1-\alpha)B^{1/2}\big]^2$$
$$= \big[\alpha A + (1-\alpha)B\big] - \big[\alpha^2 A + \alpha(1-\alpha)A^{1/2}B^{1/2} + \alpha(1-\alpha)B^{1/2}A^{1/2} + (1-\alpha)^2 B\big]$$
$$= (\alpha - \alpha^2)A + \big((1-\alpha) - (1-\alpha)^2\big)B - \alpha(1-\alpha)(A^{1/2}B^{1/2} + B^{1/2}A^{1/2})$$
$$= \alpha(1-\alpha)(A + B - A^{1/2}B^{1/2} - B^{1/2}A^{1/2}) = \alpha(1-\alpha)(A^{1/2} - B^{1/2})^2 \in \mathbf{S}_n^+.$$

Ceci montre : $\big(\alpha A^{1/2} + (1-\alpha)B^{1/2}\big)^2 \leqslant \alpha A + (1-\alpha)B.$

Comme $\alpha A^{1/2} + (1-\alpha)B^{1/2} \in \mathbf{S}_n^+$, que $\alpha A + (1-\alpha)B \in \mathbf{S}_n^+$, et que l'application $S \longmapsto S^{1/2}$ est croissante sur $\mathbf{S}_n^+$, on déduit : $\alpha A^{1/2} + (1-\alpha)B^{1/2} \leqslant \big(\alpha A + (1-\alpha)B\big)^{1/2}.$

On conclut : $\boxed{\text{L'application } \mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathbf{S}_n^+,\ S \longmapsto S^{1/2} \text{ est concave}}$

IV.

1.a. Soit $A \in \mathbf{GL}_n$.

1) Unicité :

Soit $(\Omega, S) \in \mathbf{O}_n \times \mathbf{S}_n^{++}$ convenant.

On a alors : ${}^{\mathrm{t}}AA = {}^{\mathrm{t}}(\Omega S)\Omega S = {}^{\mathrm{t}}S\,{}^{\mathrm{t}}\Omega\Omega S = S^2$, donc : $S = ({}^{\mathrm{t}}AA)^{1/2}$. Puis : $\Omega = AS^{-1}$.

Ceci montre l'unicité de (Ω, S) et fournit le seul couple possible.

2) Existence :

Notons $S = ({}^{\mathrm{t}}AA)^{1/2}$ et $\Omega = AS^{-1}$.

On a alors $A = \Omega S$, $S \in \mathbf{S}_n^{++}$ et : ${}^{\mathrm{t}}\Omega\Omega = {}^{\mathrm{t}}(AS^{-1})(AS^{-1}) = {}^{\mathrm{t}}S^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}AAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = \mathrm{I}_n$, donc : $\Omega \in \mathbf{O}_n$.

On a prouvé : $\boxed{\forall A \in \mathbf{GL}_n,\ \exists!(\Omega, S) \in \mathbf{O}_n \times \mathbf{S}_n^{++},\quad A = \Omega S}$

1.b. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, on a bien $A \in \mathbf{GL}_2$, donc A admet une décomposition polaire unique, $A = \Omega S$, où $\Omega \in \mathbf{O}_2, S \in \mathbf{S}_2^{++}$. On a : ${}^{\mathrm{t}}AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Cherchons $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_2^{++}$ pour que $S^2 = {}^{\mathrm{t}}AA$. On a :

$$S^2 = {}^{\mathrm{t}}AA \iff \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \iff \big(a^2 + b^2 = 10, \quad (a+c)b = 6, \quad b^2 + c^2 = 4\big).$$

On a nécessairement $b \neq 0$ et : $a^2 - c^2 = (a^2 + b^2) - (b^2 + c^2) = 10 - 4 = 6$,

d'où : $(a+c)(a-c) = 6$, puis : $6b = \big((a+c)(a-c)\big)b = \big((a+c)b\big)(a-c) = 6(a-c)$, donc : $a - c = b$.

Ainsi : $a + c = \dfrac{6}{b}$ et $a - c = b$, d'où : $a = \dfrac{3}{b} + \dfrac{b}{2}$ et $c = \dfrac{3}{b} - \dfrac{b}{2}$.

Ensuite : $4 = b^2 + c^2 = b^2 + \left(\dfrac{3}{b} - \dfrac{b}{2}\right)^2$, donc $\dfrac{5}{4}b^2 - 7 + \dfrac{9}{b^2} = 0$, $(b^2 - 2)(5b^2 - 18) = 0$.

Si $b = \sqrt{2}$, alors : $a = \dfrac{3}{b} + \dfrac{b}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, $c = \dfrac{3}{b} - \dfrac{b}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Considérons : $S = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a bien $S \in \mathbf{S}_2^{++}$ (cf. l'exemple de III.6.) et $S^2 = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}AA$.

Enfin : $$\Omega = AS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}_2.$$

On conclut :

$$\boxed{\text{La décomposition polaire de } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathbf{GL}_2 \text{ est } A = \Omega S, \text{ où } \Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ S = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. Soit $A \in \mathbf{M}_n$. Puisque $\mathrm{Sp}\,(A)$ est une partie finie de $\mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ tel que : $]0\,;\alpha[\cap\mathrm{Sp}\,(A) = \varnothing$.
Notons $N = \mathrm{E}\Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big) + 1$ et, pour tout $k \geqslant N$: $A_k = A - \dfrac{1}{k}\mathrm{I}_n$.
D'une part : $A_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} A$, car $||A_k - A|| = \dfrac{1}{k}||\mathrm{I}_n|| \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'autre part, comme $\dfrac{1}{k} \in]0\,;\alpha[$, on a $\dfrac{1}{k} \notin \mathrm{Sp}\,(A)$, donc $0 \notin \mathrm{Sp}\,(A_k)$, et donc A_k est inversible.
On a trouvé une suite dans $\mathbf{GL}_n$ convergeant vers A.

On conclut : $\boxed{\mathbf{GL}_n \text{ est dense dans } \mathbf{M}_n}$

3.a. Soit $A \in \mathbf{M}_n$.
D'après 2., il existe une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{GL}_n$ convergeant vers A.
D'après 1.a., pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe $(\Omega_k, S_k) \in \mathbf{O}_n \times \mathbf{S}_n^{++}$ tel que : $A_k = \Omega_k S_k$.
La suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à termes dans $\mathbf{O}_n$ qui est une partie fermée bornée de $\mathbf{M}_n$, donc compacte, puisque $\mathbf{M}_n$ est de dimension finie. Il existe donc une extractrice σ et $\Omega \in \mathbf{O}_n$ tels que : $\Omega_{\sigma(k)} \underset{k\infty}{\longrightarrow} \Omega$. Alors, puisque $A_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} A$, par suite extraite, $A_{\sigma(k)} \underset{k\infty}{\longrightarrow} A$, et, puisque la transposition est continue, $\Omega_{\sigma(k)}^{-1} = {}^{\mathrm{t}}\Omega_{\sigma(k)} \underset{k\infty}{\longrightarrow} {}^{\mathrm{t}}\Omega = \Omega^{-1}$, donc, par continuité du produit matriciel : $S_{\sigma(k)} = \Omega_{\sigma(k)}^{-1}A_{\sigma(k)} \underset{k\infty}{\longrightarrow} \Omega^{-1}A$. Notons $S = \Omega^{-1}A$.
On a : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, ${}^{\mathrm{t}}S_{\sigma(k)} = S_{\sigma(k)}$, donc, en passant à la limite, par continuité de la transposition : ${}^{\mathrm{t}}S = S$, donc $S \in \mathbf{S}_n$.
De même : $\forall\, k \in \{1, ..., n\}$, $\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}$, ${}^{\mathrm{t}}XS_{\sigma(k)}X \geqslant 0$,
donc, en, passant à la limite : $\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}$, ${}^{\mathrm{t}}XSX \geqslant 0$, et donc $S \in \mathbf{S}_n^{+}$.
Ainsi : $A = \Omega S$, $\Omega \in \mathbf{O}_n$, $S \in \mathbf{S}_n^{+}$.

On a montré : $\boxed{\forall\, A \in \mathbf{M}_n,\ \exists (\Omega, S) \in \mathbf{O}_n \times \mathbf{S}_n^{+},\ \ A = \Omega S}$

3.b. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a : ${}^{\mathrm{t}}AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Notons $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_2^{+}$, de sorte que $S^2 = {}^{\mathrm{t}}AA$. Cherchons $\Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{O}_2$ pour que $A = \Omega S$. On a :

$$A = \Omega S \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b = 1 \\ d = 0. \end{cases}$$

Les deux matrices $\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

Ainsi, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet (au moins) deux décompositions polaires :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Soient $A, B \in \mathbf{M}_n$ telles que ${}^{\mathrm{t}}AA = {}^{\mathrm{t}}BB$.
D'après 3., il existe $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbf{O}_n$, $S_1, S_2 \in \mathbf{S}_n^{+}$ telles que : $A = \Omega_1 S_1$ et $B = \Omega_2 S_2$.
On a : ${}^{\mathrm{t}}AA = S_1^2$ et ${}^{\mathrm{t}}BB = S_2^2$, donc $S_1^2 = S_2^2$.
Comme $S_1, S_2 \in \mathbf{S}_n^{+}$, par unicité de la racine carrée dans $\mathbf{S}_n^{+}$, on déduit $S_1 = S_2$.
Ensuite : $B = \Omega_2 S_2 = \Omega_2(\Omega_1^{-1}A) = (\Omega_2\Omega_1^{-1})A$.
En notant $\Omega = \Omega_2\Omega_1^{-1}$, on a $\Omega \in \mathbf{O}_n$ car $\mathbf{O}_n$ est un groupe, et on a : $B = \Omega A$.

On conclut : $\boxed{\forall\, A, B \in \mathbf{M}_n,\ \ \Big({}^{\mathrm{t}}AA = {}^{\mathrm{t}}BB \implies \big(\exists\, \Omega \in \mathbf{O}_n,\ \ B = \Omega A\big)\Big)}$

V.

1.a. Soit $S \in \mathbf{S}_n$.

D'après le théorème fondamental, il existe $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{D}_n$ et $\Omega \in \mathbf{O}_n$ telles que $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

• Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}$. On a : ${}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}X(\Omega D\Omega^{-1})X = ({}^{\mathrm{t}}X\Omega)D(\Omega^{-1}X) = {}^{\mathrm{t}}(\Omega^{-1}X)D(\Omega^{-1}X)$.

Notons $Y = \Omega^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a alors : ${}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}YDY = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \begin{cases} \geqslant \lambda_{\mathrm{Min}}(S) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \\ \leqslant \lambda_{\mathrm{Max}}(S) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \end{cases}$

et : $$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = {}^{\mathrm{t}}YY = {}^{\mathrm{t}}(\Omega^{-1}X)(\Omega^{-1}X) = {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}\Omega^{-1}\Omega^{-1}X = {}^{\mathrm{t}}X\Omega\Omega^{-1}X = {}^{\mathrm{t}}XX.$$

Il en résulte : $$\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}, \quad \lambda_{\mathrm{Min}}(S) \leqslant \frac{{}^{\mathrm{t}}XSX}{{}^{\mathrm{t}}XX} \leqslant \lambda_{\mathrm{Max}}(S).$$

• D'autre part, en notant V_1 un vecteur propre pour S associé à la valeur propre $\lambda_{\mathrm{Min}}(S)$, on a $V_1 \neq 0$ et :

$${}^{\mathrm{t}}V_1SV_1 = {}^{\mathrm{t}}V_1(SV_1) = {}^{\mathrm{t}}V_1\big(\lambda_{\mathrm{Min}}(S)V_1\big) = \lambda_{\mathrm{Min}}(S)({}^{\mathrm{t}}V_1V_1),$$

donc : $\lambda_{\mathrm{Min}} = \dfrac{{}^{\mathrm{t}}V_1SV_1}{{}^{\mathrm{t}}V_1V_1}$.

De même, en notant V_2 un vecteur propre pour S associé à la valeur propre $\lambda_{\mathrm{Max}}(S)$, on a $V_2 \neq 0$ et : $\lambda_{\mathrm{Max}}(S) = \dfrac{{}^{\mathrm{t}}V_2SV_2}{{}^{\mathrm{t}}V_2V_2}$.

On conclut : $$\boxed{\lambda_{\mathrm{Min}}(S) = \underset{X \in \mathbf{M}_{n,1}-\{0\}}{\mathrm{Min}} \frac{{}^{\mathrm{t}}XSX}{{}^{\mathrm{t}}XX}, \qquad \lambda_{\mathrm{Max}}(S) = \underset{X \in \mathbf{M}_{n,1}-\{0\}}{\mathrm{Max}} \frac{{}^{\mathrm{t}}XSX}{{}^{\mathrm{t}}XX}}$$

1.b. Soit $S \in \mathbf{S}_n$. On a, pour toute $X \in \mathbf{M}_{n,1}$: ${}^{\mathrm{t}}X\big(S - \lambda_{\mathrm{Min}}(S)\,\mathrm{I}_n\big)X = {}^{\mathrm{t}}XSX - \lambda_{\mathrm{Min}}(S)\,{}^{\mathrm{t}}XX \geqslant 0$,

donc : $S - \lambda_{\mathrm{Min}}(S)\,\mathrm{I}_n \in \mathbf{S}_n^+$, $\lambda_{\mathrm{Min}}(S)\,\mathrm{I}_n \leqslant S$.

De même, on obtient : $S \leqslant \lambda_{\mathrm{Max}}(S)\,\mathrm{I}_n$.

On conclut : $$\boxed{\forall\, S \in \mathbf{S}_n, \quad \lambda_{\mathrm{Min}}(S)\,\mathrm{I}_n \leqslant S \leqslant \lambda_{\mathrm{Max}}(S)\,\mathrm{I}_n}$$

2.a. *1)* Puisque $A \leqslant B$ et que $D = \Omega^{-1}A\Omega$ et $C = \Omega^{-1}B\Omega$, on a, d'après II.4.*3)* : $D \leqslant C$.

Ainsi : $\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}$, ${}^{\mathrm{t}}X(C-D)X \geqslant 0$. En particulier, en complétant un vecteur colonne à i lignes par des termes tous nuls, on obtient : $\forall\, X_i \in \mathbf{M}_{i,1}$, ${}^{\mathrm{t}}X_i(C_i - D_i)X_i \geqslant 0$, donc : $D_i \leqslant C_i$.

2) • On a : $\lambda_i(A) = \lambda_{\mathrm{Min}}(D_i)$, car $D_i = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(A), ..., \lambda_n(A)\big)$ et $\lambda_1(A) \geqslant ... \geqslant \lambda_n(A)$.

• D'après 1.a., appliqué à D_i et C_i, on a : $\lambda_{\mathrm{Min}}(D_i) = \underset{X_i \in \mathbf{M}_{i,1}-\{0\}}{\mathrm{Min}} \dfrac{{}^{\mathrm{t}}X_iD_iX_i}{{}^{\mathrm{t}}X_iX_i} \leqslant \underset{X_i \in \mathbf{M}_{i,1}-\{0\}}{\mathrm{Min}} \dfrac{{}^{\mathrm{t}}X_iC_iX_i}{{}^{\mathrm{t}}X_iX_i} = \lambda_{\mathrm{Min}}(C_i)$.

• Puisque C_i est extraite diagonalement de C, par forme quadratique induite sur un sous-espace vectoriel, on a : $\lambda_{\mathrm{Min}}(C_i) \leqslant \lambda_i(C)$.

• Puisque $C = \Omega^{-1}B\Omega$, B et C ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité, on a : $\lambda_i(C) = \lambda_i(B)$.

2.b. On vient de montrer : $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$, $\lambda_i(A) \leqslant \lambda_i(B)$.

Finalement : $$\boxed{A \leqslant B \implies \big(\forall\, i \in \{1, ..., n\}, \quad \lambda_i(A) \leqslant \lambda_i(B)\big)}$$

* *