Préparation à l'agrégation interne de mathématiques
Corrigé du problème du mercredi 20 septembre 2006
Jean-Marie Monier

1 Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

L'application $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^n}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n} \geqslant 0$ et $n > 1$, donc, d'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, f_n est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

Ceci montre que, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, l'intégrale I_n existe.

2 En utilisant la relation de Chasles :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(1+x^n)-x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x + B_n = 1 - A_n + B_n,$$

en notant $A_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$, $B_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

3 Par le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, $x = \dfrac{1}{t}$, $\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$:

$$B_n = \int_1^0 \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{t}\right)^n}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) = \int_0^1 \frac{t^{n-2}}{t^n+1}\,\mathrm{d}t.$$

4 D'après 3 :

$$B_n - A_n = \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n-2}-x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

On a, puisque $1 + x^n \geqslant 1$ et $x^{n-2} - x^n \geqslant 0$:

$$0 \leqslant B_n - A_n \leqslant \int_0^1 \left(x^{n-2} - x^n\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n^2-1}.$$

D'où $B_n - A_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, puis :

$$I_n = 1 + B_n - A_n = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

5 a • Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

On a, en faisant apparaître $\dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n}$ qui est la dérivée, par rapport à x, de $\ln(1+x^n)$:

$$B_n - A_n = \int_0^1 \frac{x^{n-2}-x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n-2}-x^n}{nx^{n-1}}\,\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - x\right)\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

Pour $\varepsilon \in]0\,;1]$, on a, par une intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^1 \Big(\frac{1}{x}-x\Big)\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \Big[\Big(\frac{1}{x}-x\Big)\ln(1+x^n)\Big]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \Big(-\frac{1}{x^2}-1\Big)\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\Big(\frac{1}{\varepsilon}-\varepsilon\Big)\ln(1+\varepsilon^n) + \int_\varepsilon^1 \Big(\frac{1}{x^2}+1\Big)\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $\ln(1+\varepsilon^n) \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\sim} \varepsilon^n$ et $n \geqslant 2$, on a $\Big(\frac{1}{\varepsilon}-\varepsilon\Big)\ln(1+\varepsilon^n) \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\sim} \varepsilon^{n-1} \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, d'où :

$$n(B_n - A_n) = \int_0^1 \Big(\frac{1}{x^2}+1\Big)\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

- Par le changement de variable $t = x^n,\ x = t^{\frac{1}{n}},\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t$, on a :

$$n(B_n - A_n) = \int_0^1 \Big(\frac{1}{x^2}+1\Big)\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \big(t^{-\frac{2}{n}}+1\big)\ln(1+t)\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \big(t^{-\frac{1}{n}}+t^{\frac{1}{n}}\big)\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

5 b Nous allons essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$:

$$g_n :]0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto g_n(t) = \big(t^{-\frac{1}{n}}+t^{\frac{1}{n}}\big)\,\frac{\ln(1+t)}{t}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, g_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0\,;1]$
- La suite $(g_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $]0\,;1]$ vers l'application

$$g :]0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto g(t) = 2\,\frac{\ln(1+t)}{t}.$$

- L'application g est continue par morceaux (car continue) sur $]0\,;1]$.
- On a, pour tout $n \geqslant 2$ et tout $t \in]0\,;1]$:

$$|g_n(t)| = \big(t^{-\frac{1}{n}}+t^{\frac{1}{n}}\big)\frac{\ln(1+t)}{t} \leqslant \Big(\frac{1}{\sqrt{t}}+1\Big)\frac{\ln(1+t)}{t},$$

car $0 < t \leqslant 1$ et $n \geqslant 2$.

L'application $\varphi : t \longmapsto \Big(\frac{1}{\sqrt{t}}+1\Big)\frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue par morceaux (car continue), $\geqslant 0$, et intégrable sur $]0\,;1]$ car $\varphi(t) \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ et $\frac{1}{2} < 1$.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^1 g_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 g.$$

En notant $C = \int_0^1 g = 2\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$, on a donc :

$$n^2(B_n - A_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} C.$$

De plus, $C > 0$, car $t \longmapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue, $\geqslant 0$ et n'est pas la fonction nulle.

On conclut :

$$B_n - A_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{C}{n^2}.$$

5 c On déduit :

$$I_n = 1 + (B_n - A_n) = 1 + \frac{C}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

6 a Notons

$$I = \frac{C}{2} = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On a, en utilisant le développement en série entière de $t \longmapsto \ln(1+t)$:

$$I = \int_0^1 \Big(\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{n}\Big)\,\mathrm{d}t.$$

Nous allons essayer de permuter intégrale et série.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h_n : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto h_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}t^{n-1}}{n}.$$

- Pour tout $n \geqslant 1$, h_n est continue sur le segment $[0\,;1]$.
- La série $\sum_{n\geqslant 1} h_n$ converge simplement sur $[0\,;1]$, d'après le théorème spécial à certaines séries alternées, ou bien encore d'après le développement précédent.

De plus, pour tout $t \in [0\,;1]$, d'après une propriété du reste $R_n(t)$ d'une série relevant du théorème spécial à certaines séries alternées, on a :

$$|R_n(t)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} h_k(t)\Big| \leqslant |h_{n+1}(t)| = \frac{t^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

d'où : $||R_n||_\infty \leqslant \frac{1}{n+1}$ et donc $||R_n||_\infty \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre que la série $\sum_{n\geqslant 1} h_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.

D'après un théorème du Cours, on peut alors permuter intégrale et série, d'où :

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}t^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

6 b On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, en séparant les termes d'indices pairs ou impairs :

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{-1}{(2p)^2} = \Big(\sum_{p=1}^{2N} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2}\Big) + \sum_{p=1}^{N} \frac{-1}{(2p)^2}$$

$$= \sum_{p=1}^{2N} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} \quad \underset{N\infty}{\longrightarrow} \quad \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

On obtient :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12},$$

et donc :

$$C = 2I = \frac{\pi^2}{6},$$

d'où finalement le développeent asymptotique de I_n à la précision $o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$I_n = 1 + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

* *