Corrigé de CCP PC 2006 Mathématiques 2

PARTIE I

I.1. Si $n \geqslant 1$, on a : $$P_n(m) = (m+1)\cdots(m+n) = \frac{(m+n)!}{m!},$$

et cette formule est aussi valable pour $n = 0$, car alors $P_0(m) = 1 = \dfrac{m!}{m!}$.

I.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(\alpha) \neq 0$, la fraction $\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}$ existe.

Supposons $x \neq 0$, et notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}$. On a $u_n(x) \neq 0$ et :

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{x^2 |P_n(\alpha)|}{2^2(n+1)|P_{n+1}(\alpha)|} = \frac{x^2}{4(n+1)|\alpha+n+1|} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc, d'après le théorème de D'Alembert, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

Le cas $x = 0$ est d'étude immédiate.

Ceci montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x)$ existe, autrement dit :

$$\boxed{\text{Déf}\,(f_\alpha) = \mathbb{R}}$$

I.3.1. L'application f_α est la somme d'une série entière de rayon infini d'après I.2., donc f_α est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver terme à terme, d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}, \qquad f'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}, \qquad f''_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1) x^{2n-2}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& x f''_\alpha(x) + (2\alpha+1) f'_\alpha(x) + x f_\alpha(x) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1) x^{2n-1}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\alpha+1)(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1) x^{2n-1}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\alpha+1)(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2^{2n-2} (n-1)! P_{n-1}(\alpha)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} \Big(2n(2n-1) + (2\alpha+1)2n - 4n(\alpha+n) \Big) x^{2n-1} \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Ceci montre :

$$\boxed{f_\alpha \text{ est solution de } (E_\alpha) \text{ sur } \mathbb{R}}$$

I.3.2. Réciproquement, soit y une solution de (E_α), paire et développable en série entière en 0.

Notons R le rayon de cette série entière, $R \in]0\,;+\infty]$, et $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$, pour tout $x \in]-R\,;R[$.

D'après le Cours, l'application y est dérivable sur $]-R\,;R[$ et on peut dériver terme à terme, d'où, pour tout $x \in]-R\,;R[$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}, \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{2n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n x^{2n-2}.$$

On a, pour tout $x \in]-R\,;R[$:

$$\begin{aligned}
& xy''(x) + (2\alpha+1)y'(x) + xy(x) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (2\alpha+1)2na_n x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (2\alpha+1)2na_n x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(2n(2n-1)a_n + (2\alpha+1)2na_n + a_{n-1}\Big) x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(4n(\alpha+n)a_n + a_{n-1}\big) x^{2n-1}.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière en 0 de la fonction nulle, on déduit :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 4n(\alpha+n) + a_{n-1} = 0.$$

Puisque $\alpha \notin \mathbb{Z}_-^*$ on a, pour tout $n \geqslant 1$, $\alpha + n \neq 0$, d'où : $\quad \forall\, n \geqslant 1, \quad a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{4n(\alpha+n)}$.

On déduit, en réitérant ou par une récurrence immédiate :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{-1}{4n(\alpha+n)} a_{n-1} = \frac{-1}{4n(\alpha+n)} \, \frac{-1}{4(n-1)(\alpha+n-1)} a_{n-2} \\
&= \cdots = \frac{-1}{4n(\alpha+n)} \cdots \frac{-1}{4 \cdot 1 \cdot (\alpha+1)} a_0 = \frac{(-1)^n}{4^n n! P_n(\alpha)} a_0.
\end{aligned}$$

De plus, $a_0 = y(0)$, car la somme de la série entière en 0 est égale au terme constant de cette série entière.

On a donc : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} y(0), \quad$ d'où, pour tout $x \in]-R\,;R[$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} y(0) x^{2n} = y(0) f_\alpha(x).$$

Enfin, comme la série entière définissant f_α est de rayon infini, la série entière définissant y est aussi de rayon infini et on conclut :

$$y = y(0) f_\alpha.$$

Remarque : L'ensemble des solutions de (E_α), paires et développables en série entière en 0, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1, c'est la droite vectorielle engendrée par f_α.

I.4.1. Puisque $\alpha \notin \mathbb{Z}$, on a $-\alpha \notin \mathbb{Z}_-^*$, donc $f_{-\alpha}$ est définie, puis g_α est correctement définie.

Puisque $f_{-\alpha}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc sur $]0\,;+\infty[$, g_α est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$g_\alpha(x) = x^{-2\alpha} f_{-\alpha}(x),$$
$$g'_\alpha(x) = x^{-2\alpha} f'_{-\alpha}(x) - 2\alpha x^{-2\alpha-1} f_{-\alpha}(x),$$
$$g''_\alpha(x) = x^{-2\alpha} f''_{-\alpha}(x) - 4\alpha x^{-2\alpha-1} f'_{-\alpha}(x) + 2\alpha(2\alpha+1)x^{-2\alpha-2} f_{-\alpha}(x),$$

d'où, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$x g''_\alpha(x) + (2\alpha+1) g'_\alpha(x) + x g_\alpha(x)$$

$$= x^{-2\alpha+1} f''_{-\alpha}(x) - 4\alpha x^{-2\alpha} f'_{-\alpha}(x) + 2\alpha(2\alpha+1)x^{-2\alpha-1} f_{-\alpha}(x)$$
$$+(2\alpha+1)x^{-2\alpha} f'_{-\alpha}(x) - 2\alpha(2\alpha+1)x^{-2\alpha-1} f_{-\alpha}(x) + x^{-2\alpha+1} f_{-\alpha}(x)$$
$$= x^{-2\alpha+1} f''_{-\alpha}(x) + (-2\alpha+1)x^{-2\alpha} f'_{-\alpha}(x) + x^{-2\alpha+1} f_{-\alpha}(x)$$
$$= x^{-2\alpha}\Big(x f''_{-\alpha}(x) + (-2\alpha+1) f'_{-\alpha}(x) + x f_{-\alpha}(x)\Big) \;=\; 0,$$

puisque $f_{-\alpha}$ est solution de $(E_{-\alpha})$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0\,;+\infty[$.

On conclut :

$$\boxed{g_\alpha \text{ est solution de } (E_\alpha) \text{ sur }]0\,;+\infty[}$$

I.4.2. • Supposons $(f_\alpha,\, g_\alpha)$ liée.

Comme $f_\alpha \neq 0$, il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g_\alpha = \lambda f_\alpha$.

Comme f_α est continue sur $\mathbb{R}$, donc en 0, on a : $f_\alpha(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} f_\alpha(0) = 1$.

Si $\alpha > 0$, alors $g_\alpha(x) = x^{-2\alpha} f_{-\alpha}(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, contradiction avec $g_\alpha(x) = \lambda f_\alpha(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} \lambda$.

Si $\alpha < 0$, alors $g_\alpha(x) = x^{-2\alpha} f_{-\alpha}(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$, donc $0 = \lambda f_\alpha(0) = \lambda$, $g_\alpha = 0$, contradiction.

On conclut que (f_α, g_α) est libre.

On a vu que f_α et g_α sont de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$, donc a fortiori, f_α et g_α sont dans $\mathcal{C}^2(]0\,;+\infty[, \mathbb{R})$.

• D'après le Cours, puisque (E_α) est une équation différentielle linéaire du second ordre, normalisable sur $]0\,;+\infty[$, à coefficients continus sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, sans second membre, l'ensemble $\mathcal{S}_\alpha$ des solutions de (E_α) sur $]0\,;+\infty[$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Comme f_α et g_α sont solutions de (E_α) sur $]0\,;+\infty[$ et forment une famille libre, on déduit que (f_α, g_α) est une base de $\mathcal{S}_\alpha$.

On conclut :

$$\boxed{\text{La solution générale de } (E_\alpha) \text{ sur }]0\,;+\infty[\text{ est } \lambda f_\alpha + \mu g_\alpha, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

I.4.3. Soit $y :]-\infty\,;0[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2.

- Notons $z :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto z(x) = y(-x)$.

L'application z est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$z(x) = y(-x), \qquad z'(x) = -y'(-x), \qquad z''(x) = y''(-x),$$

d'où, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} xz''(x) + (2\alpha+1)z'(x) + xz(x) &= xy''(-x) - (2\alpha+1)y'(-x) + xy(-x) \\ &= -\Big((-x)y''(-x) + (2\alpha+1)y'(-x) + (-x)y(-x)\Big). \end{aligned}$$

Il en résulte que y est solution de (E_α) sur $]-\infty\,;0[$ si et seulement si z est solution de (E_α) sur $]0\,;+\infty[$.

- On déduit, d'après I.4.2. :

$$\boxed{\text{La solution générale de } (E_\alpha) \text{ sur }]-\infty\,;0[\text{ est : } x \longmapsto \lambda f_\alpha(-x) + \mu g_\alpha(-x), \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$$

I.5.1. Puisque f_α est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$, j_α est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$j_\alpha(x) = x^\alpha f_\alpha(x), \qquad j'_\alpha(x) = x^\alpha f'_\alpha(x) + \alpha x^{\alpha-1} f_\alpha(x),$$
$$j''_\alpha(x) = x^\alpha f''_\alpha(x) + 2\alpha x^{\alpha-1} f'_\alpha(x) + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} f_\alpha(x),$$

d'où, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$x^2 j''_\alpha(x) + x j'_\alpha(x) + (x^2-\alpha^2) j_\alpha(x)$$

$$= x^{\alpha+2} f''_\alpha(x) + 2\alpha x^{\alpha+1} f'_\alpha(x) + \alpha(\alpha-1)x^\alpha f_\alpha(x) + x^{\alpha+1} f'_\alpha(x) + \alpha x^\alpha f_\alpha(x) + x^{\alpha+2} f_\alpha(x) - \alpha^2 x^\alpha f_\alpha(x)$$

$$= x^{\alpha+2} f''_\alpha(x) + (2\alpha+1)x^{\alpha+1} f'_\alpha(x) + x^{\alpha+2} f_\alpha(x)$$

$$= x^{\alpha+1}\Big(x f''_\alpha(x) + (2\alpha+1) f'_\alpha(x) + x f_\alpha(x)\Big) \;=\; 0,$$

puisque f_α est solution de (E_α) sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0\,;+\infty[$.

Ceci montre :

$$\boxed{j_\alpha \text{ est solution sur }]0\,;+\infty[\text{ de : } (B_\alpha) \quad x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2-\alpha^2)y(x) = 0}$$

- Le résultat précédent, valable pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, peut être appliqué à $-\alpha$ à la place de α, et montre que $j_{-\alpha}$ est solution de $(B_{-\alpha})$ sur $]0\,;+\infty[$. Mais il est clair que $(B_{-\alpha}) = (B_\alpha)$. On conclut :

$$\boxed{j_{-\alpha} \text{ est solution de } (B_\alpha) \text{ sur }]0\,;+\infty[}$$

I.5.2. • Montrons que $(j_\alpha, j_{-\alpha})$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{T}_\alpha$ des solutions de (B_α) sur $]0\,;+\infty[$.

Quitte à changer α en $-\alpha$, puisque $\alpha \neq 0$, on peut supposer $\alpha > 0$.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda j_\alpha + \mu j_{-\alpha} = 0$.

On a : $j_\alpha(x) = x^\alpha f_\alpha(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$ et $j_{-\alpha}(x) = x^{-\alpha} f_{-\alpha}(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} +\infty$, d'où $\mu = 0$, puis, comme $j_\alpha \neq 0$, on a : $\lambda = 0$.

Ceci montre que $(j_\alpha, j_{-\alpha})$ est libre.

D'après le Cours, comme en I.4.2., $\mathcal{T}_\alpha$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, donc $(j_\alpha, j_{-\alpha})$ est une base de $\mathcal{T}_\alpha$.

On conclut :

$$\boxed{\text{La solution générale de } (B_\alpha) \text{ sur }]0\,;+\infty[\text{ est } \lambda j_\alpha + \mu j_{-\alpha}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

• Soit $y :]-\infty\,;0[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2. On va raisonner comme dans la solution de I.4.3.

Notons $z :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto z(x) = y(-x)$.

L'application z est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$z(x) = y(-x), \qquad z'(x) = -y(-x), \qquad z''(x) = y''(-x),$$

d'où, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$

$$\begin{aligned} x^2 z''(x) + xz'(x) + (x^2 - \alpha^2) z(x) &= x^2 y''(-x) - xy'(-x) + (x^2 - \alpha^2) y(-x) \\ &= (-x)^2 y''(-x) + (-x) y'(-x) + \big((-x)^2 - \alpha^2\big) y'(-x). \end{aligned}$$

Il en résulte que y est solution de (B_α) sur $]-\infty\,;0[$ si et seulement si z est solution de (B_α) sur $]0\,;+\infty[$.

On conclut :

$$\boxed{\text{La solution générale de } (B_\alpha) \text{ sur }]-\infty\,;0[\text{ est : } x \longmapsto \lambda j_\alpha(-x) + \mu j_{-\alpha}(-x), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

PARTIE II

II.1. • Soit $x \in \mathbb{R}$.

L'application $f : t \longmapsto (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)$ est continue sur $[0\,;1[$ et :

$$f(t) \underset{t \longrightarrow 1}{\sim} (1-t)^{\alpha-\frac{1}{2}} 2^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos x,$$

qui est de signe fixe au voisinage de 1. Comme $\alpha - \dfrac{1}{2} > -1$, d'après l'exemple de Riemann en 1, et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, f est intégrable sur $[0\,;1[$, donc $h_\alpha(x)$ existe.

• Notons $F : \mathbb{R} \times [0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,t) \longmapsto F(x,t) = (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)$.

$*$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,\cdot)$ est intégrable sur $[0\,;1[$ comme on vient de le voir.

$*$ $\dfrac{\partial F}{\partial x} : (x,t) \longmapsto (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t \sin(xt)$ existe sur $\mathbb{R} \times [0\,;1[$, est continue par rapport à x, continue par morceaux (car continue) par rapport à t.

$*$ On a :

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times [0\,;1[, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \left| -(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t \sin(xt)\right| \leqslant (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$$

et l'application $\varphi : t \longmapsto (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ est continue par morceaux, $\geqslant 0$, intégrable sur $[0\,;1[$ d'après l'exemple de Riemann en 1, car $\alpha - \dfrac{1}{2} > -1$.

Ainsi, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $\mathbb{R} \times [0\,;1[$.

$*$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable sur $[0\,;1[$, d'après le résultat précédent et le théorème de majoration pour des fonctions $\geqslant 0$.

$*$ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} : (x,t) \longmapsto -(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t^2 \cos(xt)$ existe sur $\mathbb{R} \times [0\,;1[$, est continue par rapport à x et continue par morceaux (car continue) par rapport à t.

$*$ On a :

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times [0\,;1[, \quad \left|\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left| -(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t^2 \cos(xt)\right| \leqslant (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}},$$

donc, comme ci-dessus, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $\mathbb{R} \times [0\,;1[$.

D'après le **théorème de dérivation sous le signe** $\displaystyle\int_I$, on déduit que h_α est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'_\alpha(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t \sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

$$h''_\alpha(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t^2 \cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

II.2.1. D'après le résultat précédent, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} xh''_\alpha(x) + xh_\alpha(x) &= -x\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t^2 \cos(xt)\,\mathrm{d}t + x\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)\,\mathrm{d}t \\ &= x\int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \cos(xt)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

II.2.2. Soit $T \in [0\,;1[$. On a, par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^T (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \cos(xt)\,\mathrm{d}t &= \Big[(1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \sin(xt)\Big]_0^T - \int_0^T \Big(\alpha+\frac{1}{2}\Big)(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}(-2t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t \\ &= (1-T^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}\sin(xT) + (2\alpha+1)\int_0^T (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t\sin(xt)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On a : $(1-T^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \underset{T \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha + \dfrac{1}{2} > 0$,

et $\displaystyle\int_0^T (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t\sin(xt)\,\mathrm{d}t \underset{T \longrightarrow 1}{\longrightarrow} \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t\sin(xt)\,\mathrm{d}t = -h'_\alpha(x)$.

D'où, en faisant tendre T vers 1 dans le résultat précédent :

$$\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \cos(xt)\,\mathrm{d}t = -(2\alpha+1)h'_\alpha(x).$$

En utilisant le résultat de II.2.1., on conclut :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad xh''_\alpha(x) + (2\alpha+1)h'_\alpha(x) + xh_\alpha(x) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{h_\alpha \text{ est solution de } (E_\alpha) \text{ sur } \mathbb{R}}$$

II.3. Rappelons le développement en série entière de cos en 0, de rayon infini :

$$\forall\, u \in \mathbb{R},\quad \cos u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h_\alpha(x) = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (xt)^{2n}}{(2n)!}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t^{2n}\Big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_n : [0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto \varphi_n(t) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t^{2n}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue par morceaux, car continue, sur $[0\,;1[$.
- La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} \varphi_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, d'après le développement précédent.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n : t \longmapsto (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)$ est continue par morceaux, car continue, sur $[0\,;1[$.
- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 |\varphi_n| = \int_0^1 \left| \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t^{2n} \right| \mathrm{d}t = \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t^{2n} \, \mathrm{d}t = \frac{x^{2n}}{(2n)!} I_n(\alpha).$$

Et :
$$0 \leqslant I_n(\alpha) = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t^{2n} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t = I_0(\alpha),$$

donc :
$$\int_0^1 |\varphi_n| \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!} I_0(\alpha).$$

D'après le développement en série entière de l'exponentielle, la série de terme général $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge, donc, par le théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 |\varphi_n|$ converge.

D'après le théorème du Cours sur séries de fonctions et intégration sur un intervalle quelconque, on peut permuter intégrale et série, d'où :

$$h_\alpha(x) = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(t) \Big) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \varphi_n(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} I_n(\alpha).$$

On conclut que h_α est développable en série entière en 0, de rayon infini et que :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n I_n(\alpha)}{(2n)!} x^{2n}.}$$

II.4. D'après I.3.2., puisque h_α est solution de (E_α) sur $\mathbb{R}$, paire et développable en série entière en 0, on a : $h_\alpha = h_\alpha(0) f_\alpha$.

II.5. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n I_n(\alpha)}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{ et } \quad h_\alpha(x) = h_\alpha(0) f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n h_\alpha(0)}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} x^{2n}.$$

Par unicité du développement en série entière en 0 de h_α, on déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^n I_n(\alpha)}{(2n)!} = \frac{(-1)^n h_\alpha(0)}{2^{2n} n! P_n(\alpha)},$$

d'où :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n(\alpha) = \frac{h_\alpha(0)(2n)!}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}.$$

D'autre part, comme la valeur en 0 de la somme d'une série entière est égale à son terme constant, on a $h_\alpha(0) = I_0(\alpha)$.

On conclut :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n(\alpha) = \frac{I_0(\alpha)(2n)!}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}}$$

PARTIE III

III.1. Il s'agit du classique calcul du laplacien en polaires.

L'application $\widetilde{F}$ est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$ et, d'après le théorème de dérivation des fonctions composées à plusieurs variables, on a, pour tout $(r,\theta)\in]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$, avec des notations classiques abusives :

$$\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial r}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},\qquad \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\theta}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}.$$

On a :

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

donc, en dérivant par rapport à chacune des deux variables r,θ :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta,\end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\widetilde{F}}{\partial r}=\cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial x}+\sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\widetilde{F}}{\partial\theta}=-r\sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial x}+r\cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial y}.\end{cases}$$

On réitère, en utilisant le théorème de Schwarz pour les dérivées secondes croisées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial r^2}&=\cos\theta\Big(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\Big)+\sin\theta\Big(\frac{\partial^2F}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\Big)\\ &=\cos^2\theta\,\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\theta^2}=-r\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x}-r\sin\theta\Big(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\Big)-r\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}+r\cos\theta\Big(\frac{\partial^2F}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\theta}\Big)$$

$$=-r\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x}+r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2F}{\partial x^2}-r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}-r\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}-r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2F}{\partial y\partial x}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2F}{\partial y^2}.$$

D'où, des termes se simplifaint et des termes se regroupant :

$$\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=\Delta F.$$

On conclut :

$$\boxed{\forall\,(r,\theta)\in]0\,;+\infty[\times\mathbb{R},\quad \Delta F(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\theta^2}}$$

III.2.1. Puisque $f\neq 0$, il existe $r_0\in]0\,;+\infty[$ tel que $f(r_0)\neq 0$. On a alors :

$$\forall\,\theta\in\mathbb{R},\quad g(\theta)=\frac{1}{f(r_0)}\widetilde{F}(r_0,\theta)=\frac{1}{f(r_0)}F(r_0\cos\theta,r_0\sin\theta)$$

et il est alors clair que g est 2π-périodique.

III.2.2. Les applications en jeu sont de classe C^2 et on a, pour tout $(r,\theta) \in]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$:

$$\widetilde{F}(r,\theta) = f(r)g(\theta)$$

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r}(r,\theta) = f'(r)g(\theta), \qquad \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \theta}(r,\theta) = f(r)g'(\theta)$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2}(r,\theta) = f''(r)g(\theta), \qquad \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \theta^2}(r,\theta) = f(r)g''(\theta),$$

d'où, en utilisant III.1. :

$$\Delta F(r\cos\theta, r\sin\theta) = f''(r)g(\theta) + \frac{1}{r}f'(r)g(\theta) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta)$$

et

$$-\omega^2 F(r\cos\theta, r\sin\theta) = -\omega^2\widetilde{F}(r,\theta) = -\omega^2 f(r)g(\theta),$$

d'où :

$$f''(r)g(\theta) + \frac{1}{r}f'(r)g(\theta) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta) = -\omega^2 f(r)g(\theta),$$

c'est-à-dire :

$$\big(r^2 f''(r) + rf'(r) + \omega^2 r^2 f(r)\big)g(\theta) + f(r)g''(\theta) = 0.$$

Comme $f \neq 0$, il existe $r_0 \in]0\,;+\infty[$ tel que $f(r_0) \neq 0$ et on a donc :

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \quad g''(\theta) + \frac{1}{f(r_0)}\big(r_0^2 f''(r_0) + r_0 f(r_0) + \omega^2 r_0^2 f(r_0)\big)g(\theta) = 0.$$

En notant $\lambda = \dfrac{1}{f(r_0)}\big(r_0^2 f''(r_0) + r_0 f(r_0) + \omega^2 r_0^2 f(r_0)\big)$, on a alors :

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \quad g''(\theta) + \lambda g(\theta) = 0.$$

Il en résulte, en revenant à r quelconque :

$$\forall\,(r,\theta) \in]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}, \quad \big(r^2 f''(r) + rf'(r) + \omega^2 r^2 f(r)\big)g(\theta) - \lambda f(r)g(\theta) = 0.$$

Comme $g \neq 0$, il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(\theta_0) \neq 0$ et on déduit de la relation précédente, en simplifiant par $g(\theta_0)$:

$$\forall\, r \in]0\,;+\infty[, \quad r^2 f''(r) + rf'(r) + (r^2\omega^2 - \lambda)f(r) = 0.$$

III.2.3. • Si $\lambda < 0$, alors la solution générale de (ii) est $g : \theta \longmapsto A\operatorname{ch}\theta + B\operatorname{sh}\theta$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
Il est clair alors que (puisque $g \neq 0$) g n'est pas 2π-périodique, contradiction.

• Si $\lambda = 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = p^2$; il suffit de prendre $p = 0$.

• Supposons $\lambda > 0$. La solution générale de (ii) est alors $g : \theta \longmapsto A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\theta$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, ou encore $g : \theta \longmapsto C\sin\big(\sqrt{\lambda}(\theta - \theta_0)\big)$, $(C,\theta_0) \in \mathbb{R}^2$. De plus, comme $g \neq 0$, on a $C \neq 0$. L'application g est alors 2π-périodique si et seulement si $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = p^2$.

III.2.4. La forme générale de g est :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \theta \longmapsto g(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta, \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, \quad \text{si} \quad p \neq 0$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \theta \longmapsto g(\theta) = C, \quad C \in \mathbb{R}^*, \quad \text{si} \quad p = 0.$$

III.3.1. Si $p=0$, alors $\lambda=p^2=0$, donc :

$$\begin{aligned}
&(i) && \forall\, r\in\,]0\,;+\infty[,\quad r^2f''(r)+rf'(r)=0\\
&\Longleftrightarrow && \forall\, r\in\,]0\,;+\infty[,\quad rf''(r)+f'(r)=0\\
&\Longleftrightarrow && \exists\, C\in\mathbb{R},\ \forall\, r\in\,]0\,;+\infty[,\quad rf'(r)=C\\
&\Longleftrightarrow && \exists\, C\in\mathbb{R},\ \forall\, r\in\,]0\,;+\infty[,\quad f'(r)=\frac{C}{r}\\
&\Longleftrightarrow && \exists\,(C,D)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\, r\in\,]0\,;+\infty[,\quad f(r)=C\ln r+D.
\end{aligned}$$

La forme générale de f dans le cas $p=0$ est donc :

$$f:]0\,;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\quad r\longmapsto f(r)=C\ln r+D,\quad (C,D)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}.$$

III.3.2. On suppose ici $p\neq 0$, donc $\lambda=p^2>0$. Alors :

$$(i)\iff \forall\, r\in\,]0\,;+\infty[,\quad r^2f''(r)+rf'(r)-p^2f(r)=0.$$

Comme le suggère l'énoncé, cherchons des solutions de cette équation différentielle de la forme $f:r\longmapsto r^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$ fixé. On a alors :

$$r^2f''(r)+rf'(r)-p^2f(r)=r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}+r\alpha r^{\alpha-1}-p^2r^\alpha=\big(\alpha(\alpha-1)+\alpha-p^2\big)r^\alpha=(\alpha^2-p^2)r^\alpha.$$

Les fonctions $\varphi_1,\,\varphi_2\ :]0\,;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définies par $\varphi_1(r)=r^p$ et $\varphi_2(r)=r^{-p}$ sont solutions de l'équation différentielle envisagée et il est immédiat que ces deux fonctions forment une famille libre.

Cette équation différentielle étant linéaire du second ordre, sans second membre, normalisable, à coefficients continus sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, d'après le Cours, la solution générale est de la forme :

$$A_1\varphi_1+A_2\varphi_2,\ (A_1,A_2)\in\mathbb{R}^2.$$

La forme générale de f est donc, dans le cas $p\neq 0$:

$$f:]0\,;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\quad r\longmapsto Ar^p+Br^{-p},\quad (A,B)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}.$$

III.4. On suppose ici $\omega\neq 0$, donc (cf. énoncé) $\omega>0$.

On note $f_1:]0\,;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\quad r\longmapsto f_1(r)=f\Big(\dfrac{r}{\omega}\Big)$.

L'application f_1 est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $r\in\,]0\,;+\infty[$:

$$f_1(r)=f\Big(\frac{r}{\omega}\Big),\qquad f_1'(r)=\frac{1}{\omega}f'\Big(\frac{r}{\omega}\Big),\qquad f_1''(r)=\frac{1}{\omega^2}f''\Big(\frac{r}{\omega}\Big),$$

d'où :

$$\begin{aligned}
r^2f_1''(r)+rf_1'(r)+(r^2-p^2)f_1(r)&=\frac{r^2}{\omega^2}f''\Big(\frac{r}{\omega}\Big)+\frac{r}{\omega}f'\Big(\frac{r}{\omega}\Big)+(r^2-\lambda)f\Big(\frac{r}{\omega}\Big)\\
&=\frac{r^2}{\omega^2}f''\Big(\frac{r}{\omega}\Big)+\frac{r}{\omega}f'\Big(\frac{r}{\omega}\Big)+\bigg(\Big(\frac{r}{\omega}\Big)^2\omega^2-\lambda\bigg)f\Big(\frac{r}{\omega}\Big)=0,
\end{aligned}$$

d'après (i) en le point $\dfrac{r}{\omega}$.

On conclut que f_1 est solution de (B_p) sur $]0\,;+\infty[$.

****