Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Corrigé des problèmes du mercredi 21 septembre 2005

Problème 1

1.a. On a :

$$|y''| = |-fy| = |f|\,|y| \leqslant ||y||_\infty |f|.$$

Puisque f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, par théorème de majoration pour des fonctions $\geqslant 0$, $|y''|$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, et donc, par définition, y'' est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

1.b. On a, pour $x \in [0\,;+\infty[$:

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x y''(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} y'(0) + \int_0^{+\infty} y''(t)\,\mathrm{d}t,$$

donc y' admet une limite finie en $+\infty$.

1.c. Raisonnons par l'absurde : supposons $\ell \neq 0$.

• Supposons $\ell > 0$.
Il existe $a \in [0\,;+\infty[$ tel que :

$$\forall t \in [a\,;+\infty[, \quad y'(t) \geqslant \frac{\ell}{2}.$$

D'o, pour tout $x \in [a\,;+\infty[$:

$$y(x) = y(a) + \int_a^x y'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant y(a) + \frac{\ell}{2}(x-a) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

contradiction avec y bornée.
• De même, si $\ell < 0$, on aboutit à une contradiction.

On conclut : $\ell = 0$.

On a montré :

$$\boxed{\text{Pour toute solution } y \text{ de } (\mathrm{E}_0) \text{ bornée sur } [0\,;+\infty[, \text{ on a : } \; y'(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

2.a. Puisque (E_0) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, normalisée sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, à coefficients continus, sans second membre, d'après le Cours :

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{S}_0 \text{ des solutions de } (\mathrm{E}_0) \text{ sur } [0\,;+\infty[\text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension 2}}$$

2.b. • On a :

$$W' = (y_1'y_2 - y_1y_2')' = y_1''y_2 + y_1'y_2' - y_1'y_2' - y_1y_2'' = y_1''y_2 - y_1y_2'' = (-fy_1)y_2 - y_1(-fy_2) = 0,$$

donc W est constante sur $[0\,;+\infty[$.

• D'après le Cours, puisque (y_1, y_2) est libre, le wronskien W n'est pas la fonction nulle.

2.c. Supposons y_1 et y_2 bornées sur $[0\,;+\infty[$.

D'après 1.c., on a : $y_1' \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $y_2' \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Il s'ensuit : $W = y_1'y_2 - y_1y_2' \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Mais W est constante, donc $W = 0$.

3. Puisque $\mathcal{S}_0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{S}_0$ admet au monis une base (y_1, y_2). D'après 2.b. et 2.c., (raisonnement par l'absurde) y_1 ou y_2 n'est pas bornée sur $[0\,;+\infty[$.

Ceci montre :

$$\boxed{(\mathrm{E}_0) \text{ admet au moins une solution non bornée sur } [0\,;+\infty[}$$

4. L'équation différentielle proposée est du type de (E_0), en prenant :

$$f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Comme f est continue sur $[0\,;+\infty[$ et que $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$, d'après le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$ et l'exemple de Riemann en $+\infty$ $(2 > 1)$, f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

D'après 3., on conclut que l'équation différentielle proposée admet au moins une solution non bornée sur $[0\,;+\infty[$.

Problème 2

1.a. Soit $x \in\,]0\,;+\infty[$.

- L'application $u : t \longmapsto \operatorname{Arctan} t \,\mathrm{e}^{-xt}$ est contiunue sur $[0\,;+\infty[$.
- On a :

$$\forall t \in [0\,;+\infty[, \quad 0 \leqslant u(t) \leqslant \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-xt}.$$

Comme $x > 0$ est fixé, l'application $t \longmapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ (Cours), donc, par théorème de majoration pour des fonctions $\geqslant 0$, u est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

Ainsi, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, $g(x)$ existe.

1.b. Soit $x \in\,]0\,;+\infty[$.

- L'application $v : t \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t}\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.
- On a, en 0 : $v(t) \underset{t \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$, car $\operatorname{Arctan} t \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} t$, donc v est intégrable sur $]0\,;1]$.
- On a, pour tout $t \in [1\,;+\infty[$: $0 \leqslant v(t) \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$, car $0 \leqslant \operatorname{Arctan} t \leqslant t$ (connu), donc, comme plus haut, v est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

Ceci montre que v est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Ainsi, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, $f(x)$ existe.

2.a. Considérons l'application

$$F :]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,t) \longmapsto F(x,t) = \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,\mathrm{e}^{-xt}.$$

• Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, l'application $F(x,\cdot)$ est continue par morceaux (car continue) et intégrable sur $]0\,;+\infty[$, d'après 1.b.

• $\dfrac{\partial F}{\partial x} : (x,t) \longmapsto -\operatorname{Arctan} t\ \mathrm{e}^{-xt}$ existe sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$, est continue par rapport à x, continue par morceaux (car continue) par rapport à t.

• On a :

$$\forall (x,t) \in]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-xt}.$$

En particulier, pour tout segment $[a\,;b]$ inclus dans $]0\,;+\infty[$, on a :

$$\forall (x,t) \in [a\,;b]\times]0\,;+\infty[, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-at},$$

et l'application $t \longmapsto \dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-at}$ est continue par morceaux, $\geqslant 0$, intégrable sur $]0\,;+\infty[$ (car $a > 0$ fixé).

Ceci montre que $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination locale.

D'après le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int_0^{+\infty}$ avec hypothèse de doimination locale, on conclut :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0\,;+\infty[\text{ et : } \ \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f'(x) = -g(x).}$$

2.b. On a :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f'(x) = -\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan} t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t,$$

et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ fixé, l'application $t \longmapsto \operatorname{Arctan} t\ \mathrm{e}^{-xt}$ est continue, $\geqslant 0$ et n'est pas la fonction nulle. On a donc :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f'(x) < 0.$$

et on conclut :

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0\,;+\infty[}$$

2.c. *1)* On sait :

$$\forall t \in]0\,;+\infty[, \quad 0 \leqslant \operatorname{Arctan} t \leqslant t,$$

d'o :

$$\forall t \in]0\,;+\infty[, \quad 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1,$$

et donc φ est bornée sur $]0\,;+\infty[$.

2.c. *2)* On a, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$0 \leqslant f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x},$$

d'o :

$$\boxed{f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

2.d. *1)* On a, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\, \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\, \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{4t}\, \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t}\, \mathrm{d}t \underset{[u=xt]}{=} \frac{\pi}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\, \mathrm{d}u.$$

2.d. *2)* L'application $u \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, $\geqslant 0$ et non intégrable sur $]0\,;+\infty[$, car, en 0 : $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \underset{u \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{1}{u} \geqslant 0$ (exemple de Riemann en 0).

Il en résulte :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\, \mathrm{d}u \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} +\infty,$$

et donc, d'après *1)* :

$$\boxed{f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} +\infty}$$

2.e. L'allure de la courbe représentative de f ressemble à celle de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

3.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a, par le changement de variable $u = nt$:

$$nf(n) = n \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\, \mathrm{e}^{-nt}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{n}{u} \operatorname{Arctan} \frac{u}{n}\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u.$$

3.b. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h_n :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto \frac{n}{u} \operatorname{Arctan} \frac{u}{n}\, \mathrm{e}^{-u}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, h_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0\,;+\infty[$.
- On a, pour tout $u \in]0\,;+\infty[$:

$$h_n(u) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-u},$$

car $\operatorname{Arctan} \dfrac{u}{n} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{u}{n}$.

- L'application $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u}$ est continue par morceaux (car continue) sur $]0\,;+\infty[$.
- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in]0\,;+\infty[,\quad |h_n(u)| \leqslant \mathrm{e}^{-u},$$

car, pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, $\operatorname{Arctan} t \leqslant t$, et l'application $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u}$ est continue par morceaux (car continue), $\geqslant 0$ et intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, on peut permuter $\displaystyle\lim_{n\infty}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}$, donc :

$$nf(n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u = [-\mathrm{e}^{-u}]_0^{+\infty} = 1.$$

Ceci montre :

$$\boxed{f(n) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

4. *1)* D'après 3., $\dfrac{f(n)}{n} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, donc, par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$ et l'exemple de Riemann ($2 > 1$), la série de terme général $\dfrac{f(n)}{n}$ converge.

2) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$k_n :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \frac{\operatorname{Arctan} t}{nt}\,\mathrm{e}^{-nt}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, k_n est continue par morceaux (car continue) et intégrable sur $]0\,;+\infty[$, d'après 1.b.

• On a, pour tout $t \in]0\,;+\infty[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant k_n(t) = \frac{1}{n}\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,\mathrm{e}^{-nt} \leqslant \mathrm{e}^{-nt},$$

et la série de terme général e^{-nt} converge (série géométrique, $|\mathrm{e}^{-t}| < 1$), donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série de terme général $k_n(t)$ converge.

Ceci montre que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} k_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$.

• On a, pour tout $t \in]0\,;+\infty[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} k_n(t) = \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{n} = \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\big(-\ln(1-\mathrm{e}^{-t})\big),$$

et $S : t \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t}\big(-\ln(1-\mathrm{e}^{-t})\big)$ est continue par morceaux (car continue) sur $]0\,;+\infty[$.

• La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \int_0^{+\infty} |k_n|$ converge, car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k_n \geqslant 0$ et :

$$\int_0^{+\infty} |k_n| = \int_0^{+\infty} k_n = \frac{1}{n} f(n),$$

et on a vu que la série de terme général $\dfrac{f(n)}{n}$ converge.

D'après le théorème du Cours sur séries de fonctions et intégration sur un intervalle quelconque, S est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et on peut permuter $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} k_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} k_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\big(-\ln(1-\mathrm{e}^{-t})\big)\,\mathrm{d}t.$$

* *