Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie MONIER

Corrigé de la 2ème épreuve 2003

On note plus simplement ℓ^2 au lieu de $\ell^2(\mathbb{Z})$, et $\ell^2_{\mathbb{C}}$ au lieu de $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$.

I.

1. C'est un résultat du cours, l'égalité du parallélogramme dans un espace préhilbertien réel (ou complexe). Rappelons la démonstration :

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = \big(||u||^2 + 2 < u\,,\, v > + ||v||^2\big) + \big(||u||^2 - 2 < u\,,\, v > + ||v||^2\big) = 2(||u||^2 + ||v||^2).$$

2.a) Soit $\big(v(n)\big)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans ℓ^2.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \geqslant N(\varepsilon),\ \forall\, l \geqslant N(\varepsilon),\quad ||v(n) - v(l)|| \leqslant \varepsilon.$$

On a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tous $n, l \geqslant N(\varepsilon)$, :

$$\big|v(n)_k - v(l)_k\big| \leqslant \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(v(n)_k - v(l)_k\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} = ||v(n) - v(l)|| \leqslant \varepsilon.$$

2.b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. D'après a) :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\, n, l \geqslant N(\varepsilon),\quad \big|v(n)_k - v(l)_k\big| \leqslant \varepsilon.$$

C'est dire, par définition, que la suite réelle $\big(v(n)_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, cette suite de Cauchy converge vers un réel, noté v_k :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\quad v(n)_k \underset{n\infty}{\longrightarrow} v_k.$$

2.c) Puisque $v\big(N(\varepsilon)\big) \in \ell^2$, les séries $\sum_{k\leqslant 0} \big(v\big(N(\varepsilon)\big)_k\big)^2$ et $\sum_{k\geqslant 1} \big(v\big(N(\varepsilon)\big)_k\big)^2$ convergent. Il existe donc $K \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sum_{|k|\geqslant K} \big(v\big(N(\varepsilon)\big)_k\big)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

et donc :

$$\Big[\sum_{|k|\geqslant K} \big(v\big(N(\varepsilon)\big)_k\big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon.$$

2.d) L'entier K a été fixé en c). Soit $L \in \mathbb{N}$ tel que $L \geqslant K$. D'après 2., on a, en remplaçant l par $N(\varepsilon)$:

$$||v(n) - v\big(N(\varepsilon)\big)|| \leqslant \varepsilon.$$

On a alors :

$$\Big[\sum_{K\leqslant|k|\leqslant L}\big(v(n)_k - v\big(N(\varepsilon)\big)_k\big)^2\Big]^{\frac12} \leqslant \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(v(n)_k - v\big(N(\varepsilon)\big)_k\big)^2\Big]^{\frac12} = ||v(n)-v\big(N(\varepsilon)\big)|| \leqslant \varepsilon.$$

On déduit, en faisant tendre l'entier n vers l'infini, par théorème sur la limite d'une somme d'un nombre fini fixé de suites :

$$\Big[\sum_{K\leqslant|k|\leqslant L}\big(v_k - v\big(N(\varepsilon)\big)_k\big)^2\Big]^{\frac12} \leqslant \varepsilon.$$

On applique alors l'inégalité triangulaire usuelle dans $\mathbb{R}^d$ (où d désigne le nombre de termes de la somme) :

$$\begin{aligned}
\Big[\sum_{K\leqslant|k|\leqslant L} v_k^2\Big]^{\frac12} &= \Big[\sum_{K\leqslant|k|\leqslant L}\Big(\big(v_k - v\big(N(\varepsilon)\big)_k + v\big(N(\varepsilon)\big)_k\Big)^2\Big]^{\frac12} \\
&\leqslant \Big[\sum_{K\leqslant|k|\leqslant L}\big(v_k - v\big(N(\varepsilon)\big)_k^2\Big]^{\frac12} + \Big[\sum_{K\leqslant|k|\leqslant L} v\big(N(\varepsilon)\big)_k^2\Big]^{\frac12} \\
&\leqslant \Big[\sum_{K\leqslant|k|\leqslant L}\big(v_k - v\big(N(\varepsilon)\big)_k^2\Big]^{\frac12} + \Big[\sum_{K\leqslant|k|} v\big(N(\varepsilon)\big)_k^2\Big]^{\frac12} \;\leqslant\; \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon \leqslant 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

2.e) • D'après d) :

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists K\in\mathbb{N},\ \forall\,L\geqslant K,\ \forall\,M\geqslant L,\quad \Big[\sum_{L\leqslant|k|\leqslant M} v_k^2\Big]^{\frac12} \leqslant \Big[\sum_{K\leqslant|k|\leqslant M} v_k^2\Big]^{\frac12} \leqslant 2\varepsilon.$$

Ainsi, les séries $\displaystyle\sum_{k\leqslant 0} v_k^2$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} v_k^2$ sont de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, ces deux séries convergent, et donc : $v\in\ell^2$.

• D'après 2., pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$\forall\,n\geqslant N(\varepsilon),\forall\,l\geqslant N(\varepsilon),\quad \Big[\sum_{|k|\leqslant p}\big(v(n)_k - v(l)_k\big)^2\Big]^{\frac12} \leqslant \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(v(n)_k - v(l)_k\big)^2\Big]^{\frac12} \leqslant \varepsilon,$$

d'où, en faisant tendre l'entier l vers l'infini, par théorème sur la limite d'une somme d'un nombre fini fixé de suites :

$$\Big[\sum_{|k|\leqslant p}\big(v(n)_k - v_k\big)^2\Big]^{\frac12} \leqslant \varepsilon.$$

Il en résulte $v(n)-v\in\ell^2$ (ce qu'on savait déjà car $v(n)\in\ell^2$, $v\in\ell^2$, et ℓ^2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) et, en faisant tendre l'entier p vers l'infini :

$$||v(n)-v|| = \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(v(n)_k - v_k\big)^2\Big]^{\frac12} \leqslant \varepsilon.$$

Ceci montre $||v(n)-v|| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, autrement dit : $v(n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} v$ dans ℓ^2.

On vient de montrer que toute suite de Cauchy de ℓ^2 converge dans ℓ^2, c'est-à-dire :

$$\boxed{\ell^2 \text{ est complet pour } ||.||}$$

3.a) Soient C un sous-ensemble non vide, fermé, convexe de ℓ^2, et $\big(v(n)\big)_{n\geqslant 0}$ une suite dans C telle que :

$$||v(n)|| \underset{n\infty}{\longrightarrow} d,$$

où $d = \mathrm{Inf}\big\{||v||\,;v\in C\big\}$. Il est clair qu'une telle suite existe.

Soient $n, l \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant 1. :

$$\Big|\Big|\frac{1}{2}\big(v(n)-v(l)\big)\Big|\Big|^2 = \frac{1}{2}\big(||v(n||^2+||v(l)||^2\big) - \Big|\Big|\frac{1}{2}\big(v(n)+v(l)\big)\Big|\Big|^2.$$

Comme C est convexe et que $\big(v(n), v(\ell)\big)\in C^2$, on a $\dfrac{1}{2}\big(v(n)+v(l)\Big)\in C$, et donc $\Big|\Big|\dfrac{1}{2}\big(v(n)+v(l)\big)\Big|\Big| \geqslant d$, d'où :

$$\Big|\Big|\frac{1}{2}\big(v(n)-v(l)\big)\Big|\Big|^2 \leqslant \frac{1}{2}\big(||v(n||^2+||v(l)||^2\big) - d^2.$$

3.b) *Existence :*

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $||v(n)|| \underset{n\infty}{\longrightarrow} d$, il existe $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \geqslant N(\varepsilon),\quad ||v(n)||^2 - d^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

On a alors, pour tout $n \geqslant N(\varepsilon)$ et tout $l \geqslant N(\varepsilon)$:

$$\frac{1}{2}\big(||v(n)||^2+||v(l)||^2\big) - d^2 = \frac{1}{2}\big(||v(n)||^2-d^2\big) + \frac{1}{2}\big(||v(l)||^2-d^2\big) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 = \varepsilon^2,$$

d'où, en utilisant a) :

$$\Big|\Big|\frac{1}{2}\big(v(n)-v(l)\big)\Big|\Big|^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

et donc :

$$||v(n)-v(l)|| \leqslant 2\varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $\big(v(n)\big)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans ℓ^2.

Comme ℓ^2 est complet (d'après 2.), la suite $\big(v(n)\big)_{n\geqslant 0}$ converge vers un élément v de ℓ^2.

De plus, $\big(v(n)\big)_{n\geqslant 0}$ est à termes dans C et C est fermé, donc $v\in C$. Comme $||v(n)|| \underset{n\infty}{\longrightarrow} d$, et que $||v(n)|| \underset{n\infty}{\longrightarrow} ||v||$, on a : $||v|| = d$.

Ainsi, il existe un élément v de C tel que $||v|| = d$.

Unicité :

Soient $v, w\in C$ tels que : $||v|| = ||w|| = d$. On a, d'après 1. :

$$\Big|\Big|\frac{1}{2}(v-w)\Big|\Big|^2 = \frac{1}{2}\big(||v||^2+||w||^2\big) - \Big|\Big|\frac{1}{2}(v+w)\Big|\Big|^2 = d^2 - \Big|\Big|\frac{1}{2}(v+w)\Big|\Big|^2.$$

Comme C est convexe et que $(v,w)\in C^2$, on a $\dfrac{1}{2}(v+w)\in C$, et donc $\Big|\Big|\dfrac{1}{2}(v+w)\Big|\Big|^2 \geqslant d^2$, d'où :

$$\Big|\Big|\frac{1}{2}(v-w)\Big|\Big|^2 \leqslant 0,$$

et donc $v = w$.

Ceci prouve l'unicité de $v\in C$ tel que $||v|| = d$.

4.a) On suppose ici que C est un sous-ensemble non vide, fermé, convexe de ℓ^2, différent de ℓ^2 et de $\{0\}$.

Puisque $C \neq \{0\}$ et $C \neq \ell^2$, il existe $a \in C$ tel que $a \neq 0$, et il existe $b \in \ell^2$ tel que $b \notin C$. Notons S le segment $[a\,;b]$. Puisque S est convexe (cours), S est connexe (cours). Comme S rencontre C (car $a \in S \cap C$) et rencontre $\ell^2 - C$ (car $b \in S \cap (\ell^2 - C)$), d'après le cours, S rencontre ∂C. Il existe donc $u \in S \cap \partial C$.

Si $u \neq 0$, on a alors $u \in \partial C - \{0\}$, donc $\partial C - \{0\} \neq \varnothing$.

Supposons $u = 0$. Comme $b \in \ell^2 - C$ et que $\ell^2 - C$ est ouvert (complémentaire d'un fermé; ℓ^2 est fermé car complet), il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $B(b, \varepsilon) \subset \ell^2 - C$. Il existe alors un élément b' de $B(b, \varepsilon)$ qui ne soit pas sur la demi-droite d'origine a et passant par b (car ℓ^2 n'est évidemment pas de dimension $\leqslant 1$). En refaisant le raisonnement précédent, il existe $u' \in [a\,;b'] \cap \partial C$. Comme $[a\,;b] \cap [a\,;b'] = \{a\}$, et que $u' \neq a$, on a nécessairement $u' \neq u$ et donc $u' \neq 0$.

Finalement :

$$\boxed{\partial C - \{0\} \neq \varnothing}$$

4.b) D'après a), il existe $u \in \partial C$ tel que $u \neq 0$. Puisque $u \in \overline{\ell^2 - C}$, et que $||u|| > 0$, il existe $v \in \ell^2 - C$ tel que :

$$||u - v|| < \frac{1}{2}||u||.$$

On a alors :

$$||v|| = \big|\big|u - (u - v)\big|\big| \geqslant ||u|| - ||u - v|| > \frac{1}{2}||u||,$$

d'où :

$$\mathrm{Inf}\{||v - x||\,; x \in C\} \leqslant ||v - u|| < \frac{1}{2}||u|| < ||v||.$$

De plus, comme $v \notin C$, et que C est fermé, on a :

$$\mathrm{Inf}\{||v - x||\,; x \in C\} = d(x, C) > 0.$$

On conclut qu'il existe $v \in \ell^2$ tel que :

$$0 < \mathrm{Inf}\{||v - x||\,; x \in C\} < ||v||.$$

4.c) En appliquant le résultat de 3.b) au translaté de C par le vecteur $-v$, il existe $p \in \partial C$ tel que :

$$||v - p|| = d(v, C) < ||v||.$$

Comme $||v - p|| < ||v||$, on a nécessairement $p \neq 0$, et ainsi : $p \in \partial C - \{0\}$.

4.d) Puisque C est convexe et que $(p, q) \in C^2$, on a, pour tout $\lambda \in [0\,;1]$:

$$\lambda q + (1 - \lambda)p \in C,$$

d'où :

$$||v-p||^2 = \big(d(v, C)\big)^2 \leqslant \big|\big|v-\big(\lambda q+(1-\lambda)p\big)\big|\big|^2 = \big|\big|(v-p)-\lambda(q-p)\big|\big|^2 = ||v-p||^2-2\,\lambda\, < v-p\,,\, q-p > +\lambda^2||q-p||^2,$$

et donc :

$$\forall\, \lambda \in [0\,;1], \quad 0 \leqslant -2\,\lambda\, < v - p\,,\, q - p > +\lambda^2||q - p||^2.$$

En divisant par λ :
$$\forall \lambda \in]0\,;1], \quad 0 \leqslant -2 < v-p\,,\, q-p > +\lambda ||q-p||^2.$$
On déduit, en faisant tendre λ vers 0^+ : $\quad 0 \leqslant -2 < v-p\,,\, q-p >$,
et finalement :
$$< v-p\,,\, q-p > \leqslant 0.$$

Autrement dit, l'angle entre $v-p$ et $q-p$ est obtus.

II.

1. C'est un théorème du cours sur les applications linéaires continues. Redémontrons-le.

(i) $\implies$ (ii) :

trivial.

(ii) $\implies$ (iii) :

Supposons T continue en 0.
Il existe en particulier $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in E, \quad \Big(||x|| \leqslant \eta \implies ||T(x|| \leqslant 1 \Big).$$
Soit $x \in E$ tel que $||x|| \leqslant 1$.
Si $x \neq 0$, comme $\left|\left|\eta \dfrac{x}{||x||}\right|\right| = \eta$, on a : $\left|\left| T\Big(\eta \dfrac{x}{||x||}\Big)\right|\right| \leqslant 1$, d'où $||T(x)|| \leqslant \dfrac{1}{\eta}||x||$.
Si $x = 0$, alors $||T(x)|| = 0 \leqslant \dfrac{1}{\eta}||x||$.

Ceci montre que $\{||T(x||\,;||x|| \leqslant 1\}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ (minoré par 0 et majoré par $\dfrac{1}{\eta}$).

(iii) $\implies$ (i) :
Supposons que $\{||T(x)||\,;||x|| \leqslant 1\}$ soit un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$$\forall x \in \ell^2, \quad \Big(||x|| \leqslant 1 \implies ||T(x|| \leqslant M \Big).$$
Soit $x_0 \in \ell^2$. On a, pour tout $x \in \ell^2 - \{x_0\}$:
$$||T(x) - T(x_0)|| = ||T(x-x_0)|| = ||x-x_0|| \left|\left| T\Big(\frac{x-x_0}{||x-x_0||}\Big)\right|\right| \leqslant ||x-x_0||M,$$
donc :
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \ \Big(\eta = \frac{\varepsilon}{M+1}\Big), \quad \forall x \in \ell^2, \quad \Big(||x-x_0|| \leqslant \eta \implies ||T(x) - T(x_0)|| \leqslant \varepsilon \Big).$$
Ceci montre que T est continue en x_0, et donc T est continue en tout point de ℓ^2.

En fait, la démonstration précédente établit que T est M-lipschitzienne.

On note ici $L(\ell^2)$ l'ensemble des applications linéaires continues de ℓ^2 dans ℓ^2, au lieu de la notation habituelle $\mathcal{LC}(\ell^2)$.

2.a) Il s'agit encore de résultats du cours. Redémontrons-les.

- $L(\ell^2) \subset \mathcal{L}(\ell^2)$ ($\mathbb{R}$-espace vectoriel des endomorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel ℓ^2).
- $L(\ell^2) \neq \varnothing$, car $0 \in L(\ell^2)$, l'application nulle étant linéaire et continue.
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $S, T \in L(\ell^2)$. Puisque S et T sont continues, $\alpha S + T$ est continue, donc $\alpha S + T \in L(\ell^2)$.

Ainsi, $L(\ell^2)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, sous-espace de $\mathcal{L}(\ell^2)$.

- L'application $||.||_L : L(\ell^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ est correctement définie, car, pour toute $T \in L(\ell^2)$, l'ensemble $\{||T(x|| \,; ||x|| \leqslant 1\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, notée $||T||_L$.
- Si $||T||_L = 0$, alors : $\forall\, x \in \ell^2, \quad \big(||x|| \leqslant 1 \implies T(x) = 0\big)$, puis, comme T est linéaire : $T = 0$.
- On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toute $T \in L(\ell^2)$:

$$||\alpha T||_L = \operatorname*{Sup}_{||x|| \leqslant 1} ||(\alpha T)(x)|| = \operatorname*{Sup}_{||x|| \leqslant 1} |\alpha|\, ||T(x)|| = |\alpha| \operatorname*{Sup}_{||x|| \leqslant 1} ||T(x)|| = |\alpha|\, ||T||_L.$$

- On a, pour toutes $S, T \in L(\ell^2)$:

$$\begin{aligned} ||S+T||_L = \operatorname*{Sup}_{||x|| \leqslant 1} ||(S+T)(x)|| = \operatorname*{Sup}_{||x|| \leqslant 1} ||S(x)+T(x)|| &\leqslant \operatorname*{Sup}_{||x|| \leqslant 1} \big(||S(x)|| + ||T(x)||\big) \\ &\leqslant \operatorname*{Sup}_{||x|| \leqslant 1} ||S(x)|| + \operatorname*{Sup}_{||x|| \leqslant 1} ||T(x)|| = ||S||_L + ||T||_L. \end{aligned}$$

Ainsi, $||.||_L$ est une norme sur $L(\ell^2)$.

De plus, par définition de $||.||_L$:

$$\forall\, T \in L(\ell^2),\ \forall\, x \in \ell^2, \quad ||T(x)|| \leqslant ||T||_L ||x||.$$

2.b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(T_n)_{n \geqslant 0}$ est de Cauchy dans $\big(L(\ell^2), ||.||_L\big)$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \geqslant N(\varepsilon),\ \forall\, l \geqslant N(\varepsilon), \quad ||T_n - T_l||_L \leqslant \varepsilon.$$

On a alors :

$$\forall\, n \geqslant N(\varepsilon),\ \forall\, l \geqslant N(\varepsilon), \quad ||T_n(x) - T_l(x)|| = ||(T_n - T_l)(x)|| \leqslant ||T_n - T_l||_L ||x|| \leqslant \varepsilon ||x||.$$

Ceci montre que la suite $\big(T_n(x)\big)_{n \geqslant 0}$ est de Cauchy dans ℓ^2.

2.c) Avec les notations de b), puisque $\big(T_n(x)\big)_{n \geqslant 0}$ est de Cauchy dans ℓ^2 et que ℓ^2 est complet (I 2.), la suite $\big(T_n(x)\big)_{n \geqslant 0}$ converge vers un élément y de ℓ^2. Notons $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2,\ x \longmapsto y$ l'application ainsi définie, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in \ell^2, \quad T(x) = \lim_{n\infty} T_n(x).$$

- On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $x_1, x_2 \in \ell^2$:

$$T_n(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T_n(x_1) + T_n(x_2) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \alpha T(x_1) + T(x_2),$$

donc :

$$T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2).$$

Ainsi, T est linéaire.

Ceci revient à remarquer que, si une suite d'applications linéaires converge simplement, alors la limite simple est aussi linéaire.

• Puisque $(T_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans $\big(L(\ell^2), ||.||_L\big)$, et que :

$$\forall\, n, l \in \mathbb{N}, \quad \big| ||T_n||_L - ||T_l||_L \big| \leqslant ||T_n - T_l||_L,$$

la suite $\big(||T_n||_L\big)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. D'après le cours, toute suite de Cauchy est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad ||T_n||_L \leqslant M.$$

Soit $x \in \ell^2$ tel que $||x|| \leqslant 1$. On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad ||T_n(x)|| \leqslant ||T_n||_L ||x|| \leqslant M||x||.$$

D'autre part, $T_n(x) \underset{n\infty}{\longrightarrow} T(x)$ dans ℓ^2, donc $||T_n(x)|| \underset{n\infty}{\longrightarrow} ||T(x)||$. Il s'ensuit, par passage à la limite dans une inégalité :

$$||T(x)|| \leqslant M||x||.$$

Comme T est déjà linéaire, il en résulte $T \in L(\ell^2)$.

Ainsi, toute suite de Cauchy dans $L(\ell^2)$ converge dans $L(\ell^2)$, et on conclut :

$$\boxed{\big(L(\ell^2), ||.||_L\big) \text{ est complet}}$$

Plus généralement, pour tous espaces vectoriels normés E, F, si F est complet, alors $\mathcal{LC}(E, F)$ est complet.

3.a) L'énoncé est ici incorrect, par oubli de : $TS \in L(\ell^2)$.

Comme S et T sont linéaires, par composition, TS est linéaire.

D'autre part, pour tout $x \in \ell^2$:

$$||(TS)(x)|| = ||T(S(x))|| \leqslant ||T||_L ||S(x)|| \leqslant ||T||_L ||S||_L ||x||.$$

Ceci montre : $TS \in L(\ell^2)$ et $||TS||_L \leqslant ||T||_L ||S||_L$.

Une récurrence immédiate montre alors, avec aussi $||I||_L = 1$:

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \quad ||T^j||_L \leqslant ||T||_L^j.$$

3.b) • Nous allons montrer que la suite $\big(S_K(t)\big)_{K\geqslant 0}$ est de Cauchy dans $L(\ell^2)$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On a, pour tous $K, L \in \mathbb{N}$ tels que, par exemple, $K < L$:

$$||S_K(T) - S_L(T)||_L = \Big|\Big| \sum_{j=0}^{K} \frac{1}{j!} T^j - \sum_{j=0}^{L} \frac{1}{j!} T^j \Big|\Big|_L = \Big|\Big| \sum_{j=K+1}^{L} \frac{1}{j!} T^j \Big|\Big|_L \leqslant \sum_{j=K+1}^{L} \frac{1}{j!} ||T^j||_L \leqslant \sum_{j=K+1}^{L} \frac{1}{j!} ||T||_L^j.$$

D'après le cours sur les séries entières, pour tout réel a, la série numérique $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \frac{a^j}{j!}$ converge (et a pour somme e^a), donc la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \frac{1}{j!} ||T||_L^j$ converge. La suite des sommes partielles de cette dernière série est donc convergente, et il en résulte que la suite $\big(S_K(T)\big)_{K\geqslant 0}$ est de Cauchy dans $L(\ell^2)$.

• Comme $L(\ell^2)$ est complet et que $\big(S_K(T)\big)_{K\geqslant 0}$ est de Cauchy dans $L(\ell^2)$, $\big(S_K(T)\big)_{K\geqslant 0}$ converge dans $L(\ell^2)$ vers un élément noté $\mathrm{Exp}\,(T)$.

3.c) Soient $A, B \in L(\ell^2)$ tels que $AB = BA$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Big|\Big| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(A+B)^k - \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}A^j\Big)\Big(\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}B^l\Big)\Big|\Big|_L = \Big|\Big| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \mathrm{C}_k^m A^k B^{m-k} - \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{j!l!} A^j B^l \Big|\Big|_L$$

$$= \Big|\Big| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{m!(k-m)!} A^k B^{m-k} - \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{j!l!} A^j B^l \Big|\Big|_L = \Big|\Big| \sum_{0 \leqslant j \leqslant n,\ 0 \leqslant l \leqslant n,\ j+l \geqslant n+1} \frac{1}{j!l!} A^j B^l \Big|\Big|_L$$

$$\leqslant \sum_{0 \leqslant j \leqslant n,\ 0 \leqslant l \leqslant n,\ j+l \geqslant n+1} \frac{1}{j!l!} ||A||_L^j ||B||_L^l = \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}||A||_L^j\Big)\Big(\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}||B||_L^l\Big) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\big(||A||_L + ||B||_L\big)^k.$$

• Le dernier membre apparu ci-dessus tend, lorsque l'entier n tend vers l'infini, vers le réel $\mathrm{e}^{||A||_L}\mathrm{e}^{||B||_L} - \mathrm{e}^{||A||_L + ||B||_L}$, qui est nul par propriété de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$. On a donc :

$$\Big|\Big| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(A+B)^k - \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}A^j\Big)\Big(\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}B^l\Big)\Big|\Big|_L \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mais, par définition de Exp dans $L(\ell^2)$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(A+B)^k \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Exp}\,(A+B), \qquad \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}A^j \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Exp}\,(A), \qquad \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}B^l \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Exp}\,(B).$$

On a donc :

$$\mathrm{Exp}\,(A+B) - \mathrm{Exp}\,(A)\,\mathrm{Exp}\,(B) = 0,$$

et on conclut :

$$\mathrm{Exp}\,(A+B) = \mathrm{Exp}\,(A)\,\mathrm{Exp}\,(B).$$

III.

1. • Montrons $\mathbf{D} \subset L(\ell^2)$.

Soit $T \in \mathbf{D}$. Il existe une suite bornée $(t_k)_k$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que :

$$\forall\, v = (v_k)_k \in \ell^2, \quad T(v) = (t_k v_k)_k.$$

$*$ On a, pour tout $v \in \ell^2$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$|T(v)_k| = |t_k v_k| = |t_k|\,|v_k| \leqslant ||t||_\infty |v_k|,$$

où on a noté $||t||_\infty = \operatorname*{Sup}_{k \in \mathbb{Z}} |t_k|$.

Puisque $v \in \ell^2$, les séries $\sum_{k \leqslant 0} v_k^2$ et $\sum_{k \geqslant 1} v_k^2$ convergent, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, les séries $\sum_{k \leqslant 0} \big(T(v)_k\big)^2$ et $\sum_{k \geqslant 1} \big(T(v)_k\big)^2$ convergent. Ceci montre :

$$\forall\, v \in \ell^2, \quad T(v) \in \ell^2,$$

et donc T est une application de ℓ^2 dans ℓ^2.

$*$ On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, tous $v, w \in \ell^2$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\big(T(\alpha v + w)\big)_k = t_k(\alpha v + w)_k = t_k(\alpha v_k + w_k) = \alpha t_k v_k + t_k w_k = \alpha T(v)_k + T(w)_k = \big(\alpha T(v) + T(w)\big)_k,$$

d'où :
$$T(\alpha v + w) = \alpha T(v) + T(w),$$
et donc T est linéaire.

$*$ On a, pour tout $v \in \ell^2$:

$$||T(v)|| = \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(T(v)_k\big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} ||t||_\infty^2 v_k^2\Big]^{\frac{1}{2}} = ||t||_\infty \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k^2\Big]^{\frac{1}{2}} = ||t||_\infty ||v||,$$

et donc, puisque T est déjà linéaire, T est continue, et on conclut : $T \in L(\ell^2)$.

Ceci montre :

$$\boxed{\mathbf{D} \subset L(\ell^2)}$$

• $\mathbf{D} \neq \varnothing$, car $0 \in \mathbf{D}$, où 0 est l'endomorphisme nul de ℓ^2, correspondant à la suite bornée $(t_k)_k$ nulle.

• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $S, T \in \mathbf{D}$. Il existe des suites réelles bornées $(s_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telles que :

$$\forall\, v \in \ell^2,\ \forall\, k \in \mathbb{Z},\quad \begin{cases} S(v)_k = s_k v_k \\ T(v)_k = t_k v_k. \end{cases}$$

On a alors, pour tout $v \in \ell^2$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\big((\alpha S + T)(v)\big)_k = \big(\alpha S(v) + T(v)\big)_k = \alpha S(v)_k + T(v)_k = \alpha s_k v_k + t_k v_k = (\alpha s_k + t_k) v_k,$$

donc $\alpha S + T \in \mathbf{D}$, puisque la suite réelle $(\alpha s_k + t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

• Soient $S, T \in \mathbf{D}$. Il existe des suites réelles bornées $(s_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telles que :

$$\forall\, v \in \ell^2,\ \forall\, k \in \mathbb{Z},\quad \begin{cases} S(v)_k = s_k v_k \\ T(v)_k = t_k v_k. \end{cases}$$

On a alors, pour tout $v \in \ell^2$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\big((TS)(v)\big)_k = \big(T(S(v))\big)_k = t_k S(v)_k = t_k s_k v_k,$$

donc $TS \in \mathbf{D}$, puisque la suite réelle $(t_k s_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

On conclut que $\mathbf{D}$ est une sous-algèbre de $L(\ell^2)$.

Remarquer que $I \in \mathbf{D}$, car la suite constante (1) est bornée.

2. (i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Supposons $T \in \mathbf{D}$. Il existe une suite réelle bornée $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que :

$$\forall\, v \in \ell^2,\ \forall\, k \in \mathbb{Z},\quad T(v)_k = t_k v_k.$$

Notons $\lambda = ||t||_\infty = \operatorname*{Sup}_{k\in\mathbb{Z}} |t_k|$.

Soit $x = (x_k)_k \in P$, où : $\forall\, k \in \mathbb{Z},\quad x_k \geqslant 0$. On a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \big(\lambda x - T(x)\big)_k = \lambda x_k - T(x)_k = \lambda x_k - t_k x_k = (\lambda - t_k) x_k \geqslant 0 \\ \big(\lambda x + T(x)\big)_k = \lambda x_k + T(x)_k = \lambda x_k + t_k x_k = (\lambda + t_k) x_k \geqslant 0. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\lambda x - T(x) \in P \quad \text{et} \quad \lambda x + T(x) \in P.$$

(ii) $\implies$ (i) :

Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in P$, on ait :

$$\lambda x - T(x) \in P \quad \text{et} \quad \lambda x + T(x) \in P.$$

Soit $v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$.
Notons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$x_k = v_k^+ = \frac{1}{2}(|v_k| + v_k) \quad \text{et} \quad y_k = v_k^- = \frac{1}{2}(|v_k| - v_k).$$

On a ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$x_k \geqslant 0, \quad y_k \geqslant 0, \quad x_k + y_k = |v_k|, \quad x_k - y_k = v_k.$$

En particulier :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant x_k \leqslant |v_k| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y_k \leqslant |v_k|.$$

Comme $v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$, il en résulte, d'après le théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, que $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ et $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$.
On a ainsi :

$$v = x - y, \quad x \in P, \quad y \in P.$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$.
Supposons $v_k = 0$. Nous allons montrer qu'alors $T(v)_k = 0$.
Puisque $v_k = 0$, on a $x_k = y_k = 0$. En appliquant l'hypothèse à x et à y, on a :

$$\begin{cases} \lambda x - T(x) \in P & \text{et} \quad \lambda x + T(x) \in P \\ \lambda y - T(y) \in P & \text{et} \quad \lambda y + T(y) \in P, \end{cases}$$

donc en particulier :

$$\begin{cases} \lambda x_k - T(x)_k \geqslant 0 & \text{et} \quad \lambda x_k + T(x)_k \geqslant 0 \\ \lambda y_k - T(y)_k \geqslant 0 & \text{et} \quad \lambda y_k + T(y)_k \geqslant 0, \end{cases}$$

d'où $T(x)_k = 0$ et $T(y)_k = 0$, puis :

$$T(v)_k = \big(T(x-y)\big)_k = \big(T(x) - T(y)\big)_k = T(x)_k - T(y)_k = 0 - 0 = 0.$$

Ceci montre :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad v_k = 0 \implies T(v)_k = 0.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe $t_k \in \mathbb{R}$ tel que : $T(v)_k = t_k v_k$. En effet, si $v_k \neq 0$, on prend $t_k = \dfrac{T(v)_k}{v_k}$, et, si $v_k = 0$, tout réel convient pour t_k.

On a ainsi établi que, pour toute $v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$, il existe $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad T(v)_k = t_k v_k.$$

Montrons maintenant qu'on peut choisir $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ indépendamment de v.

Soient $v, v' \in \ell^2$, $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $(t'_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ des suites réelles telles que :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad T(v)_k = t_k v_k \quad \text{et} \quad T(v')_k = t'_k v'_k.$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$(v'_k v - v_k v')_k = v'_k v_k - v_k v'_k = 0,$$

donc, comme on l'a vu plus haut :

$$0 = \big(T(v'_k v - v_k v')\big)_k = \big(v'_k T(v) - v_k T(v')\big)_k = v'_k T(v)_k - v_k T(v')_k = v'_k t_k v_k - v_k t'_k v'_k = v_k v'_k (t_k - t'_k),$$

d'où, si $v_k \neq 0$ et $v'_k \neq 0$, alors $t'_k = t_k$.

Ceci montre que la suite $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ne dépend pas de v.

Enfin, d'après l'hypothèse appliquée, pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé, à la suite $e(k) = (\delta_{kl})_{l\in\mathbb{Z}} \in P$, on a :

$$\lambda e(k) - T\big(e(k)\big) \in P \quad \text{et} \quad \lambda e(k) + T\big(e(k)\big) \in P,$$

d'où en particulier, en prenant le k-ème terme :

$$\lambda - t_k \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \lambda + t_k \geqslant 0,$$

donc $|t_k| \leqslant \lambda$.

Ceci montre que la suite $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

3. Remarquons d'abord que, si Q est un cône fermé, alors, pour tout $(a, b) \in Q^2$, on a $\dfrac{1}{2}(a+b) \in Q$ (car Q est convexe), puis $a + b = 2\dfrac{1}{2}(a+b) \in Q$ (par hypothèse). Ainsi, Q est stable par addition.

De plus (si $Q \neq \varnothing$), il existe $q \in Q$, puis $0 = 0q \in Q$.

• $\mathbf{A}_Q \neq \varnothing$ car $0 \in \mathbf{A}_Q$, correspondant à $\lambda = 0$ et $0 \in Q$.

• Soient $S, T \in \mathbf{A}_Q$. On a déjà $S + T \in L(\ell^2)$.

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall\, x \in Q, \qquad \lambda x - S(x) \in Q \;\text{ et }\; \lambda x + S(x) \in Q,$$

et il existe $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall\, x \in Q, \qquad \mu x - T(x) \in Q \;\text{ et }\; \mu x + T(x) \in Q.$$

On a alors, en notant $\nu = \lambda + \mu \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall\, x \in Q, \quad \begin{cases} \nu x - (S+T)(x) = \big(\lambda x - S(x)\big) + \big(\mu x - T(x)\big) \in Q \\ \nu x + (S+T)(x) = \big(\lambda x + S(x)\big) + \big(\mu x + T(x)\big) \in Q, \end{cases}$$

donc $S + T \in \mathbf{A}_Q$, correspondant à $\nu = \lambda + \mu \in \mathbb{R}_+$.

• Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbf{A}_Q$. On a déjà $\alpha T \in \ell^2$.

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall\, x \in Q, \qquad \lambda x - S(x) \in Q \;\text{ et }\; \lambda x + S(x) \in Q.$$

On a alors, en notant $\nu = \alpha\lambda \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall\, x \in Q, \quad \begin{cases} \nu x - (\alpha T)(x) = \alpha\big(\lambda x - T(x)\big) \in Q \\ \nu x + (\alpha T)(x) = \alpha\big(\lambda x + T(x)\big) \in Q, \end{cases}$$

donc $\alpha T \in \mathbf{A}_Q$, correspondant à $\nu = \alpha\lambda \in \mathbb{R}_+$.

• Soit $T \in \mathbf{A}_Q$. On a déjà $-T \in L(\ell^2)$.
Il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall\, x \in Q, \quad \lambda x - S(x) \in Q \;\text{ et }\; \lambda x + S(x) \in Q.$$

On a alors :

$$\forall\, x \in Q, \quad \begin{cases} \lambda x - (-T)(x) = \lambda x + T(x) \in Q \\ \lambda x + (-T)(x) = \lambda x - T(x) \in Q, \end{cases}$$

donc $-T \in \mathbf{A}_Q$, correspondant à $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

• Soient $S, T \in \mathbf{A}_Q$. On a déjà $TS \in L(\ell^2)$.
Il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall\, x \in Q, \quad \lambda x - S(x) \in Q \;\text{ et }\; \lambda x + S(x) \in Q,$$

et il existe $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall\, x \in Q, \quad \mu x - T(x) \in Q \;\text{ et }\; \mu x + T(x) \in Q.$$

Soit $x \in Q$. On a : $y = \lambda x - S(x) \in Q$, puis :

$$\mu y - T(y) \in Q \;\text{ et }\; \mu y + T(y) \in Q,$$

c'est-à-dire :

$$\mu\lambda x - \mu S(x) - \lambda T(x) + TS(x) \in Q \quad \text{et} \quad \mu\lambda x - \mu S(x) + \lambda T(x) - TS(x) \in Q.$$

De même, on a $z = \lambda x + S(x) \in Q$, puis :

$$\mu z - T(z) \in Q \;\text{ et }\; \mu z + T(z) \in Q,$$

c'est-à-dire :

$$\mu\lambda x + \mu S(x) - \lambda T(x) - TS(x) \in Q \quad \text{et} \quad \mu\lambda x + \mu S(x) + \lambda T(x) + TS(x) \in Q.$$

Comme Q est convexe, la demi-somme de deux élements de Q est dans Q, d'où en particulier :

$$\mu\lambda x - TS(x) \in Q \;\text{ et }\; \mu\lambda x + TS(x) \in Q.$$

Ceci montre $TS \in \mathbf{A}_Q$, correspondant à $\mu\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Finalement :

$$\boxed{\mathbf{A}_Q \text{ est une sous-algèbre de } L(\ell^2)}$$

4.a) Soit $S \in L(\ell^2)$ tel que $S(Q) \subset Q$. On a donc, par hypothèse :

$$\forall\, x \in Q, \quad S(x) \in Q.$$

Il en résulte, par une récurrence immédiate : $\quad \forall\, x \in Q,\ \forall\, j \in \mathbb{N}, \quad S^j(x) \in Q,$

puis, comme Q est un cône fermé et que les $\dfrac{1}{j!}$ sont tous $\geqslant 0$:

$$\forall\, x \in Q,\ \forall\, j \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{j!} S^j(x) \in Q,$$

puis, comme Q est stable par addition : $\quad \forall\, x \in Q,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} S^j(x) \in Q.$

Enfin, puisque Q est fermé, par passage à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$\operatorname{Exp}(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} S^j(x) \in Q.$$

Ceci établit : $\forall x \in Q, \quad \operatorname{Exp}(x) \in Q,$ c'est-à-dire : $\operatorname{Exp}(S)(Q) \subset Q$.

4.b) Soit $T \in \mathbf{A}_Q$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in Q, \quad \lambda x - T(x) \in Q \quad \text{et} \quad \lambda x + T(x) \in Q.$$

Notons $S = \lambda I + T$. On a donc $S \in L(\ell^2)$ et $S(Q) \subset Q$. d'où, d'après a) : $\operatorname{Exp}(S)(Q) \subset Q$.
Mais λI et T commutent, donc, d'après III 3.c) :

$$\operatorname{Exp}(S) = \operatorname{Exp}(\lambda I + T) = \operatorname{Exp}(\lambda I) \operatorname{Exp}(T).$$

Et :

$$\operatorname{Exp}(\lambda I) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \lambda^j I = \Big(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \Big) I = \mathrm{e}^{\lambda} I.$$

D'où :

$$\operatorname{Exp}(S) = \mathrm{e}^{\lambda} \operatorname{Exp}(T).$$

Soit $x \in Q$. On a vu plus haut : $\operatorname{Exp}(S)(x) \in Q$. Comme $\mathrm{e}^{-\lambda} \in \mathbb{R}_+$ et que Q est stable par multiplication par les nombres réels $\geqslant 0$, on a : $\mathrm{e}^{-\lambda} \operatorname{Exp}(S)(x) \in Q$, c'est-à-dire $\operatorname{Exp}(T)(x) \in Q$.

Ceci montre : $\operatorname{Exp}(T)(Q) \subset Q$.

IV.

1. Soit Q un cône fermé différent de ℓ^2 et de $\{0\}$. D'après III 3. et III 4.b), l'algèbre $\mathbf{A}_Q$ satisfait (H).

2.a) D'après I 4. d), il existe $v \in \ell^2$ et $p \in \partial C_0 - \{0\}$ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in C_0, \quad < v - p \,,\, x - p > \leqslant 0 \\ p \neq v. \end{cases}$$

Notons $w = v - p$. On a alors $p \in C_0 - \{0\}$ (car $\partial C_0 \subset \overline{C_0} = C_0$), $w \in \ell^2$, $w \neq 0$ et :

$$\forall x \in C_0, \quad < w \,,\, x - p > \leqslant 0.$$

2.b) Soit $T \in \mathbf{A}$. On a, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\phi_T(s) = < w \,,\, \operatorname{Exp}(sT)(p) > = < w \,,\, \Big(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} (sT)^j \Big)(p) > = < w, \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{s^j}{j!} T^j(p) > = \sum_{j=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{j!} < w \,,\, T^j(p) > \Big) s^j,$$

ce qui montre que ϕ_T est développable en série entière en 0, de rayon infini.

La propriété $< w \,,\, \sum_{j=0}^{+\infty} u_j > = \sum_{j=0}^{+\infty} < w \,,\, u_j >$ vient de la continuité du produit scalaire, elle-même conséquence de l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

2.c) On remarque :
$$\phi_T(0) = < w\,,\, \mathrm{Exp}\,(0)(p) > = < w\,,\, I(p) > = < w\,,\, p > .$$
D'où, d'après 2.a) :
$$\forall\, x \in C_0, \quad < w\,,\, x > \leqslant < w\,,\, p > = \phi_T(0).$$
D'autre part, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $sT \in \mathbf{A}$, donc, comme $p \in C_0$, on a, d'après III 4. b), $\mathrm{Exp}\,(sT)(p) \in C_0$. Il en résulte :
$$\phi_T(s) = < w\,,\, \mathrm{Exp}\,(sT)(p) > \leqslant < w\,,\, p > = \phi_T(0).$$
Ainsi, ϕ_T admet un maximum local en 0.

2.d) Soit $T \in \mathbf{A}$. Puisque ϕ_T est développable en série entière en 0, ϕ_T est dérivable en 0 et $\phi_T'(0)$ est le coefficient de s dans le DSE(0) de ϕ_T, c'est-à-dire :
$$\phi_T'(0) = \frac{1}{1!} < w\,,\, T^1(p) > = < w\,,\, T(p) > .$$
Comme ϕ_T est dérivable en 0 et que ϕ_T admet un maximum (global donc) local en 0, on a : $\phi_T'(0) = 0$.

On conclut : $< w\,,\, T(p) > = 0$.

3. On suppose ici qu'il existe $T \in \mathbf{A}$ tel que $T(p) \neq 0$.

On note $M_0 = \{T(p)\,;T \in \mathbf{A}\}$, orbite de p sous $\mathbf{A}$, et $M = \overline{M_0}$ l'adhérence de M_0 dans ℓ^2.

• Par définition, M est une partie fermée de ℓ^2.

• On a $M_0 = \mathrm{Im}\,(\varphi)$, où :
$$\varphi : \mathbf{A} \longrightarrow \ell^2, \quad T \longmapsto T(p).$$
Comme φ est linéaire, M_0 est un sous-espace vectoriel de ℓ^2. D'après le cours, l'adhérence d'un sev est un sev, donc M est un sous-espace vectoriel de ℓ^2.

• Par hypothèse, il exite $T \in \mathbf{A}$ tel que $T(p) \neq 0$, donc $M_0 \neq \{0\}$ (et $M_0 \supset \{0\}$), donc, comme M contient M_0, M n'est pas réduit à $\{0\}$.

• Soit $x \in M = \overline{M_0}$. Il existe une suite $(T_n)_{n\geqslant 0}$ dans $\mathbf{A}$ telle que : $T_n(p) \underset{n\infty}{\longrightarrow} x$. On a, d'après d) :
$$\forall\, n \geqslant 0, \quad < w\,,\, T_n(p) > = 0,$$
d'où par passage à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini : $< w\,,\, x > = 0$.

Ceci montre : $M \subset (\mathbb{R}w)^{\perp}$, et donc, comme $w \neq 0$, on a, en particulier $w \notin M$, et finalement $M \neq \ell^2$.

• Soient $T \in \mathbf{A}$, $x \in M$. Il existe une suite $(T_n)_{n\geqslant 0}$ dans $\mathbf{A}$ telle que $T_n(p) \underset{n\infty}{\longrightarrow} x$. On a, pour tout $n \geqslant 0$, $TT_n \in \mathbf{A}$, car $T \in \mathbf{A}$, $T_n \in \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}$ est une algèbre. Et :
$$\forall\, n \geqslant 0, \quad (TT_n)(p) = T\big(T_n(p)\big) \underset{n\infty}{\longrightarrow} T(x)$$
car T est continue et $T_n(p) \underset{n\infty}{\longrightarrow} x$.

Ceci montre que $T(x)$ est limite d'une suite d'éléments de M_0, donc $T(x) \in \overline{M_0} = M$, et finalement :
$$T(M) \subset M.$$

4. On suppose ici : $\forall T \in \mathbf{A}, \quad T(p) = 0$.

Notons $D = \mathbb{R}p = \text{Vect}\,\{p\}$, droite vectorielle engendrée par p.

On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$T(\alpha p) = \alpha T(p) = 0 \in D,$$

donc $T(D) \subset D$. En fait : $T(D) = \{0\}$.

5. Évident d'après 3. et 4., les deux cas se complétant :

- $\exists T \in \mathbf{A}, \quad T(p) \neq 0$ question 3.
- $\forall T \in \mathbf{A}, \quad T(p) = 0$ question 4.

V.

Notons $\alpha = \text{Inf}\{\lambda_k\,;k \in \mathbb{Z}\}$ et $\beta = \text{Sup}\{\lambda_k\,;k \in \mathbb{Z}\}$; on a donc : $0 < \alpha \leqslant \beta < +\infty$.

1. • Soit $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2_{\mathbb{C}}$. Notons $y = S(x) = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad y_k = \lambda_{k-1}x_{k-1}.$$

On a :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad |y_k|^2 = |\lambda_{k-1}|^2|x_{k-1}|^2 \leqslant \beta^2|x_{k-1}|^2,$$

d'où :

$$\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} |y_k|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leqslant \beta\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_{k-1}|^2\Big]^{\frac{1}{2}} = \beta||x|| < +\infty,$$

ce qui montre $y \in \ell^2_{\mathbb{C}}$.

Ainsi, S est une application de $\ell^2_{\mathbb{C}}$ dans $\ell^2_{\mathbb{C}}$.

• La linéarité de S est immédiate; en effet, pour tous $\alpha \in \mathbb{C}$, $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2_{\mathbb{C}}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$S(\alpha u + v)_k = \lambda_{k-1}(\alpha u + v)_{k-1} = \lambda_{k-1}(\alpha u_{k-1} + v_{k-1}) = \alpha\lambda_{k-1}u_{k-1} + \lambda_{k-1}v_{k-1} = \alpha S(u)_k + S(v)_k.$$

• On a vu plus haut :

$$\forall\, x \in \ell^2_{\mathbb{C}}, \quad ||S(x)|| \leqslant \beta||x||,$$

donc, puisque S est déjà linéaire, d'après II 1., S est continue.

• D'après (B), il est clair que :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \lambda_k \neq 0.$$

Considérons la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \mu_k = \frac{1}{\lambda_k}.$$

Il est clair alors que :

$$\begin{cases} \text{Inf}\,\{\mu_k\,;k \in \mathbb{Z}\} = \Big(\text{Sup}\,\{\lambda_k\,;k \in \mathbb{Z}\}\Big)^{-1} \\ \text{Sup}\,\{\mu_k\,;k \in \mathbb{Z}\} = \Big(\text{Inf}\,\{\lambda_k\,;k \in \mathbb{Z}\}\Big)^{-1}, \end{cases}$$

donc :

$$0 < \inf\,\{\mu_k\,;k \in \mathbb{Z}\} \leqslant \text{Sup}\,\{\mu_k\,;k \in \mathbb{Z}\} < +\infty,$$

c'est-à-dire que la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfait aussi (B).

Il est clair que, pour toute suite $y = (y_k)_k \in \ell^2_{\mathbb{C}}$, la suite $\left(\dfrac{1}{\lambda_k} y_{k+1}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est dans $\ell^2_{\mathbb{C}}$.

Considérons l'application

$$T : \ell^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \ell^2_{\mathbb{C}}, \quad y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \longmapsto T(y)$$

définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad T(y)_k = \frac{1}{\lambda_k} y_{k+1}.$$

Il est clair que $TS = ST = I$ et que, comme pour S plus haut, T est linéaire et continue.

Ainsi, S est inversible et S^{-1} est continue.

2. On a, pour tout $y \in F$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$SW(y)_k = S\big(W(y)\big)_k = \lambda_{k-1} W(y)_{k-1} = \lambda_{k-1} w_{k-1} y_{k-1} = w_k y_{k-1} = w_k S_1(y)_k = \big(W\big(S_1(y)\big)\big)_k = WS_1(y)_k,$$

d'où :

$$SW(y) = WS_1(y).$$

3.a) On a :

$$\begin{cases} w_0 = 1, \quad w_1 = \lambda_0 w_0 = \lambda_0, \quad w_2 = \lambda_1 w_1 = \lambda_1\lambda_0, \ \dots \\ w_0 = 1, \quad w_{-1} = \dfrac{w_0}{\lambda_{-1}} = \dfrac{1}{\lambda_{-1}}, \quad w_{-2} = \dfrac{w_{-1}}{\lambda_{-2}} = \dfrac{1}{\lambda_{-1}\lambda_{-2}}, \ \dots \end{cases}$$

d'où, par une récurrence immédiate :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k \quad \text{et} \quad w_{-n} = \Big(\prod_{k=1}^{n} \lambda_{-k}\Big)^{-1}.$$

Comme on suppose de plus :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_{-k-1} = \lambda_k^{-1},$$

on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_{-n} = \prod_{k=1}^{n} \lambda_{k-1} = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k = w_n.$$

3.b) *1)* • Il est clair que :

$$\forall\, j \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon(j) \in E,$$

car $\varepsilon(j)$ est une suite (indexée par $\mathbb{Z}$) à support fini et vérifie :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon(j)_{-k} = \overline{\varepsilon(j)_k}.$$

• Soit $(j, l) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $j \neq l$.
Si $j \neq -l$, alors :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon(j)_k \varepsilon(j)_l = 0,$$

donc :

$$< \varepsilon(j)\,,\, \varepsilon(l) > = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\varepsilon(j)_k}\varepsilon(l)_k = 0.$$

Si $j = -l$, on a :

$$< \varepsilon(j)\,,\, \varepsilon(l) > = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\Big) = 0.$$

Ceci montre que la famille $\big(\varepsilon(j)\big)_{j\in\mathbb{Z}}$ est orthogonale.

• Il est clair que :

$$\begin{cases} ||\varepsilon(0)||^2 = 1 \\ \forall\, j \geqslant 1, \quad ||\varepsilon(j)||^2 = \Big|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big|^2 + \Big|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big|^2 = 1 \\ \forall\, j \leqslant -1, \quad ||\varepsilon(j)||^2 = \Big|\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\Big|^2 + \Big|-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\Big|^2 = 1, \end{cases}$$

et donc la famille est normée.

Finalement, la famille $\big(\varepsilon(j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale d'éléments de E.

2) • $E \subset \ell^2_{\mathbb{C}}$ et $\ell^2_{\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (et aussi un $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

• $E \neq \varnothing$, car $0 \in E$.

• Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$, on a :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad (\alpha x + y)_{-k} = \alpha x_{-k} + y_{-k} = \alpha\overline{x_k} + \overline{y_k} = \overline{\alpha x_k + y_k} = \overline{(\alpha x + y)_k},$$

donc $\alpha x + y \in E$.
ainsi, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3) • Considérons, pour tout $v = (v_k)_k \in \ell^2$, l'élément x de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ défini par :

$$\begin{cases} x_0 = v_0 \\ \forall\, n \geqslant 1, \quad x_n = \dfrac{v_n + \mathrm{i}v_{-n}}{\sqrt{2}} \\ \forall\, n \leqslant -1, \quad x_{-n} = \dfrac{v_n - \mathrm{i}v_{-n}}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Il est clair que $x \in \ell^2_{\mathbb{C}}$, et on a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$x_{-n} = \frac{v_n - \mathrm{i}v_{-n}}{2} = \overline{\Big(\frac{v_n + \mathrm{i}v_{-n}}{2}\Big)} = \overline{x_n},$$

donc $x \in E$.

L'application $f : \ell^2 \longrightarrow E,\ v \longmapsto x$ ainsi définie est clairement $\mathbb{R}$-linéaire.

• Considérons, pour tout $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in E$, l'élément v de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ défini par :

$$\begin{cases} v_0 = x_0 \\ \forall\, n \geqslant 1, \quad v_n = \mathrm{Re}\,(\sqrt{2}\,x_n) \\ \forall\, n \geqslant 1, \quad v_{-n} = \mathrm{Im}\,(\sqrt{2}\,x_n). \end{cases}$$

Il est clair que $v \in \ell^2$.

L'application $g : E \longrightarrow \ell^2,\ x \longmapsto v$ ainsi définie est clairement $\mathbb{R}$-linéaire.

• On a, pour tout $v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$:

$*\quad (g\circ f)(v)_0 = \big(g\big(f(v)\big)\big)_0 = f(v)_0 = v_0$

$*\quad \forall\, n \geqslant 1, \quad (g\circ f)(v)_n = \big(g\big(f(v)\big)\big)_n = \sqrt{2}\,\dfrac{f(v)_n + \overline{f(v)_n}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\dfrac{v_n + \mathrm{i}v_{-n}}{\sqrt{2}} + \dfrac{v_n - \mathrm{i}v_{-n}}{\sqrt{2}}\Big) = v_n$

$*\quad \forall\, n \geqslant 1, \quad (g\circ f)(v)_{-n} = \big(g\big(f(v)\big)\big)_{-n} = \sqrt{2}\,\dfrac{f(v)_n - \overline{f(v)_n}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2}}\Big(\dfrac{v_n + \mathrm{i}v_{-n}}{\sqrt{2}} - \dfrac{v_n - \mathrm{i}v_{-n}}{\sqrt{2}}\Big) = v_{-n}.$

D'où : $\ g\circ f = \mathrm{Id}_{\ell^2}$.

• On a, pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in E$:

$*$ $(f \circ g)(x)_0 = \big(f\big(g(x)\big)\big)_0 = g(x)_0 = x_0$

$*$ $\forall\, n \geqslant 1,\ \ (f \circ g)(x)_n = \big(f\big(g(x)\big)\big)_n = \dfrac{g(x)_n + \mathrm{i}g(x)_{-n}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sqrt{2}\,\dfrac{x_n + \overline{x_n}}{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}\,\dfrac{x_n - \overline{x_n}}{2\mathrm{i}}\Big) = x_n$

$*$ $\forall\, n \geqslant 1,\ \ (f \circ g)(x)_{-n} = \big(f\big(g(x)\big)\big)_{-n} = \dfrac{g(x)_n - \mathrm{i}g(x)_{-n}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sqrt{2}\,\dfrac{x_n + \overline{x_n}}{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}\,\dfrac{x_n - \overline{x_n}}{2\mathrm{i}}\Big) = \overline{x_n} = x_{-n}.$

D'où : $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

• On a, pour tout $v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$:

$$\begin{aligned}
||f(v)||^2 &= |v_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big|\frac{v_n + \mathrm{i}v_{-n}}{\sqrt{2}}\Big|^2 - \sum_{n=1}^{+\infty}\Big|\frac{v_n - \mathrm{i}v_{-n}}{\sqrt{2}}\Big|^2\\
&= |v_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\Big(\big(|v_n|^2 + \mathrm{i}\overline{v_n}v_{-n} - \mathrm{i}v_n\overline{v_{-n}} + |v_{-n}|^2\big) + \big(|v_n|^2 - \mathrm{i}\overline{v_n}v_{-n} + \mathrm{i}v_n\overline{v_{-n}} + |v_{-n}|^2\big)\Big)\\
&= |v_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(|v_n|^2 + |v_{-n}|^2\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|v_n|^2 = ||v||^2,
\end{aligned}$$

donc f est une isométrie.

Finalement :

$$\boxed{E \text{ et } \ell^2 \text{ sont des } \mathbb{R}\text{-espaces vectoriels isométriques}}$$

4. Soit $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in F$. On note $\widehat{y}$ le polynôme trigonométrique défini par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \widehat{y}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt},$$

où la somme est à support fini, puisque $y \in F$.

• Supposons $y \in E$, c'est-à-dire : $\forall\, k \in \mathbb{Z},\quad y_{-k} = \overline{y_k}$.
On a alors :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \overline{\widehat{y}(t)} = \overline{\sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{y_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \underset{[l=-k]}{=} \sum_{l\in\mathbb{Z}} y_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}lt} = \widehat{y}(t),$$

donc :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \widehat{y}(t) \in \mathbb{R}.$$

• Réciproquement, supposons : $\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \widehat{y}(t) \in \mathbb{R}$.
On a alors :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \widehat{y}(t) = \overline{\widehat{y}(t)} = \overline{\sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{y_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \overline{y_{-l}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}lt},$$

d'où :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} (y_k - \overline{y_{-k}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = 0.$$

Le polynôme $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} (y_k - \overline{y_{-k}})\mathrm{X}^k$ s'annule en une infinité de points (tous les complexes de module 1), donc ses coefficients sont tous nuls. D'où : $\forall\, k \in \mathbb{Z},\quad y_k - \overline{y_{-k}} = 0$, et donc $y \in E$.

5.a) Soit $x \in E$. On a :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad S(x)_{-k} = \lambda_{-k-1} x_{-k-1} = \frac{1}{\lambda_k}\overline{x_{k+1}} = \overline{\frac{1}{\lambda_k} x_{k+1}} = \overline{S^{-1}(x)_k}.$$

D'où, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} C(x)_{-k} = \dfrac{1}{2}\big(S(x)_{-k} + S^{-1}(x)_{-k}\big) = \dfrac{1}{2}\big(\overline{S^{-1}(x)_k} + \overline{S(x)_k}\big) = \overline{C(x)_k} \\ D(x)_{-k} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\big(S(x)_{-k} - S^{-1}(x)_{-k}\big) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\big(\overline{S^{-1}(x)_k} - \overline{S(x)_k}\big) = \overline{D(x)_k}. \end{cases}$$

Ceci montre :

$$\forall\, x \in E, \quad C(x) \in E \quad \text{et} \quad D(x) \in E,$$

et on conlut :

$$C(E) \subset E \quad \text{et} \quad D(E) \subset E.$$

5.b) Soit $z \in P$. Il existe $y \in F$ tel que :

$$\begin{cases} z = W(y) \\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{y}(t) \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

• On a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$z_{-k} = W(y)_{-k} = w_{-k} y_{-k} = w_k \overline{y_k} = \overline{w_k y_k} = \overline{w_k y_k} = \overline{W(y)_k} = \overline{z_k},$$

donc $z \in E$.

Ceci montre : $P \subset E$.

• On a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{y}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = y_0,$$

car :

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{si} \quad k \in \mathbb{Z}^*. \end{cases}$$

Comme :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{y}(t) \in \mathbb{R}_+,$$

il en résulte, par positivité de l'intégration :

$$y_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{y}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Enfin : $z_0 = w_0 y_0 = y_0 \geqslant 0$.

• On a :

$$(I - C)(z) = z - \frac{1}{2}\big(S(z) + S^{-1}(z)\big) = W(y) - \frac{1}{2}\Big(S\big(W(y)\big) + S^{-1}\big(W(y)\big)\Big).$$

D'après V 2., on a :

$$SW(y) = WS_1(y)$$

et S et S_1 sont bijectives. D'où :

$$(I - C)(z) = W(y) - \frac{1}{2}\big(WS_1(y) + WS_1^{-1}(y)\big) = W\Big(y - \frac{1}{2}\big(S_1(y) + S_1^{-1}(y)\big)\Big) = W(u),$$

en notant $u = y - \dfrac{1}{2}\big(S_1(y) + S_1^{-1}(y)\big)$.

On a déjà $u \in F$.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{u}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(y_k - \frac{y_{k-1}+y_{k+1}}{2} \Big) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} - \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} y_{k-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} - \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} y_{k+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} - \frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} y_l\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+1)t} - \frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} y_l\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l-1)t}$$

$$= \widehat{y}(t) - \frac{1}{2}\widehat{y}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \frac{1}{2}\widehat{y}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = (1-\cos t)\widehat{y}(t) \geqslant 0,$$

car $1-\cos t \geqslant 0$ et $\widehat{y}(t) \geqslant 0$.

Ainsi :

$$\begin{cases} (I-C)(z) = W(y) \\ y \in F \\ \forall\, t \in \mathbb{R},\quad \widehat{y}(t) \geqslant 0, \end{cases}$$

donc, par définition : $(I-C)(z) \in P$.

Ceci montre :

$$(I-C)(P) \subset P.$$

De même, en remplaçant $1-\cos t$ respectivement par $1+\cos t$, $1-\sin t$, $1+\sin t$, on obtient aussi :

$$(I+C)(P) \subset P, \quad (I-S)(P) \subset P, \quad (I+S)(P) \subset P.$$

5.c) • Montrons que P est convexe.

Soient $\lambda \in [0\,;1]$, $z, z' \in P$. Il existe $y, y' \in F$ tels que :

$$\begin{cases} z = W(y) \\ \forall\, t \in \mathbb{R},\quad \widehat{y}(t) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z' = W(y') \\ \forall\, t \in \mathbb{R},\quad \widehat{y'}(t) \geqslant 0. \end{cases}$$

On a :

* $\lambda z + (1-\lambda)z' = \lambda W(y) + (1-\lambda)W(y') = W\big(\lambda y + (1-\lambda)y'\big)$, car W est $\mathbb{R}$-linéaire
* $\lambda y + (1-\lambda)y' \in F$, car F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
*

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \widehat{\lambda y + (1-\lambda)y'}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(\lambda y_k + (1-\lambda_k)y'_k\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$$

$$= \lambda \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_l\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} + (1-\lambda)\sum_{k\in\mathbb{Z}} y'_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \lambda\widehat{y}(t) + (1-\lambda)\widehat{y'}(t) \geqslant 0.$$

Ceci montre que $\lambda z + (1-\lambda)z' \in P$, et donc P est une partie convexe de ℓ^2.

• On a :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, z \in P,\quad \alpha z \in P.$$

En effet, il existe $y \in F$ tel que :

$$\begin{cases} z = W(y) \\ \forall\, t \in \mathbb{R},\quad \widehat{y}(t) \geqslant 0, \end{cases}$$

et on a :

$*\ \alpha z = \alpha W(y) = W(\alpha y)$

$*\ \alpha y \in F$

$*\ \forall\, t \in \mathbb{R},\quad \widehat{\alpha y}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\alpha y)_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha y_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \alpha \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \alpha \widehat{y}(t) \geqslant 0.$

• Notons $Q = \overline{P}$, adhérence de P dans $\ell^2_{\mathbb{C}}$.
Par construction, Q est fermée.
Puisque P est convexe, d'après le cours, son adhérence Q est convexe.

Soient $x \in Q$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Il existe une suite $(z_n)_n$ dans P telle que : $z_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} x$. On a :

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha z_n \in P \\ \alpha z_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \alpha x, \end{cases}$$

donc, par définition de l'adhérence, $\alpha x \in \overline{P} = Q$.
Ainsi :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, x \in Q, \quad \alpha x \in Q.$$

• On a : $Q = \overline{P} \subset \overline{E} = E \neq \ell^2$, donc $Q \neq \ell^2$.

• Si $Q = \{0\}$, alors, comme $\{0\} \subset P \subset \overline{P} = Q$, on a $P = \{0\}$. Mais $\varepsilon_0 \in F$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0(t) = 1 \geqslant 0$, donc $W(\varepsilon_0) \in P$, $W(\varepsilon_0) = 0$, contradiction avec $W(\varepsilon_0)_0 = w_0(\varepsilon_0)_0 = 1$. On a donc $Q \neq \{0\}$.

Ainsi, Q est un cône fermé de $\ell^2_{\mathbb{C}}$, inclus dans E, et différent de $\{0\}$ et de E.

• Les applications S et S^{-1} sont continues (V 1.), donc, par combinaison linéaire, C et D sont continues, puis $I - C$, $I + C$, $I - S$, $I + S$ sont continues. On a alors, d'après le cours sur continuité et adhérence, et en utilisant b) :

$$(I - C)(Q) = (I - C)(\overline{P}) \subset \overline{(I - C)(P)} \subset \overline{P} = Q,$$

et de même :

$$(I + C)(Q) \subset Q, \quad (I - D)(Q) \subset Q, \quad (I + D)(Q) \subset Q.$$

• Notons $Q' = f^{-1}(Q)$, où f est l'isométrie précisée dans la résolution de la question V 3.b). Il est immédiat alors que Q' est un cône fermé de ℓ^2, distinct de $\{0\}$ et de ℓ^2.

• On a vu (5.a)) : $C(E) \subset E$ et $D(E) \subset E$.
Notons : $C' : E \longrightarrow E,\ x \longmapsto C(x)$ et $D' : E \longrightarrow E,\ x \longmapsto D(x)$ les endomorphismes induits respectivement par C et D.
Notons $\gamma = f^{-1} \circ C' \circ f$ et $\delta = f^{-1} \circ D' \circ f$. Il est clair que : $\gamma, \delta \in L(\ell^2)$.

• Montrons : $\gamma, \delta \in \mathbf{A}_{Q'}$.
Soit $x \in Q'$.
Notons $a = f(x) \in Q$. On a :

$$\begin{aligned} x - \gamma(x) = x - f^{-1} \circ C' \circ f(x) &= f^{-1} \circ (I - C) \circ f(x) = f^{-1}\big(f(x) - C'(f(x))\big) \\ &= f^{-1}\big(a - C'(a)\big) = f^{-1}\big((I - C)(a)\big) \in f^{-1}\big((I - C)(Q)\big) \subset f^{-1}(Q) = Q'. \end{aligned}$$

De même, on a :

$$x + \gamma(x) \in Q', \quad x - \delta(x) \in Q', \quad x + \delta(x) \in Q'.$$

D'après IV 1., puisque Q' est un cône fermé de ℓ^2, différent de $\{0\}$ et de ℓ^2, l'algèbre $\mathbf{A}_{Q'}$ satisfait (H).
D'après IV 5., il existe un sous-espace vectoriel fermé V de ℓ^2, distinct de $\{0\}$ et de ℓ^2 tel que :

$$\forall\, T \in \mathbf{A}_{Q'}, \quad T(V) \subset V.$$

• Notons $M = f(V)$. Alors M est un sous-espace vectoriel de E, distinct de $\{0\}$ et de E. Comme $\gamma \in \mathbf{A}_{Q'}$, on a $\gamma(V) \subset V$, c'est-à-dire $f^{-1} \circ C' \circ f(V) \subset V$, d'où :

$$C'(M) = C'\big(f(V)\big) \subset f(V) = M,$$

et donc $C(M) \subset M$.

De même, $D(M) \subset M$.

6.a) Soit $(u, v) \in E^2$. On a :

$$< u\,,\, v >= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{u_k} v_k \underset{l=-k}{=} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \overline{u_{-l}} v_{-l} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} u_l \overline{v_l} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \overline{v_l} u_l =< v\,,\, u >,$$

puis :

$$||u + \mathrm{i}v||^2 =< u + \mathrm{i}v\,,\, u + \mathrm{i}v >= ||u||^2 - \mathrm{i} < v\,,\, u > +\mathrm{i} < u\,,\, v > +||v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

6.b) • Puisque M est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de E (donc de ℓ^2), il est immédiat que J est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\ell^2_{\mathbb{C}}$.
De plus, comme $\{0\} \subset M \subset J$ et que $M \neq \{0\}$, on a $J \neq \{0\}$.
Et, comme $M \neq E$, on a $J \neq \ell^2_{\mathbb{C}}$.

• Montrons que J est fermé dans $\ell^2_{\mathbb{C}}$.
Soit $\big(w(n)\big)_n$ une suite dans J, convergeant vers un élément z de $\ell^2_{\mathbb{C}}$. Pour tout n, il existe $u(n)$, $v(n) \in M$ tels que : $w(n) = u(n) + \mathrm{i}v(n)$. Notons x, y les éléments de E définis par :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad x_k = \frac{z_k + \overline{z_{-k}}}{2} \quad \text{et} \quad y_k = \frac{z_k - \overline{z_{-k}}}{2\mathrm{i}}.$$

On a donc : $z = x + \mathrm{i}y$. D'après a), puisque $\big(u(n) - x,\, v(n) - y\big) \in M^2 \subset E^2$, on a :

$$||w(n) - z||^2 = ||\big(u(n) - x\big) + \mathrm{i}\big(v(n) - y\big)||^2 = ||u(n) - x||^2 + ||v(n) - y||^2.$$

Comme $w(n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} z$, il en résulte :

$$u(n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} x \quad \text{et} \quad v(n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} y.$$

Comme, pour tout n, $\big(u(n), v(n)\big) \in M^2$ et que M^2 est fermé, on a donc $(x, y) \in M^2$, et enfin $z = x+\mathrm{i}y \in J$.
Ceci montre que J est fermé dans $\ell^2_{\mathbb{C}}$.

• Soit $z \in J$. Il existe $(x, y) \in M^2$ tel que $z = x + \mathrm{i}y$. On a :

$$C = \frac{1}{2}(S + S^{-1}) \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{2\mathrm{i}}(S - S^{-1}],$$

d'où :

$$S = C + \mathrm{i}D \quad \text{et} \quad S^{-1} = C + \mathrm{i}D,$$

puis :

$$S(z) = C(z)+\mathrm{i}D(z) = C(x+\mathrm{i}y)+\mathrm{i}D(x+\mathrm{i}y) = C(x)+\mathrm{i}C(y)+\mathrm{i}D(x)-D(y) = \big(C(x)-D(y)\big)+\mathrm{i}\big(C(y)+D(x)\big).$$

Comme $C(x)$, $D(x)$, $C(y)$, $D(y)$ sont dans M (d'après c)), on a $C(x) - D(y) \in M$ et $C(y) + D(x) \in M$, d'où $S(z) \in M$.

On montre de même $S^{-1}(z) \in J$.

On conclut :

$$S(J) \subset J \quad \text{et} \quad S^{-1}(J) \subset J.$$

VI.

1. Soit $x \in \ell^2_{\mathbb{C}}$. On connaît l'inégalité classique :

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2),$$

d'où :

$$\forall\,k \in \mathbb{Z}, \quad |w_k^{-1}x_k| \leqslant \frac{1}{2}(w_k^{-2}+|x_k|^2).$$

Comme les séries $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} w_k^{-2}$ et $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^2$ convergent, par addition et majoration, on obtient, avec les notations de l'énoncé :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |w_k^{-1}x_k| < +\infty.$$

2. D'abord, l'application $\Omega(x)$ est correctement définie car, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\forall\,k \in \mathbb{Z}, \quad |w_k^{-1}x_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}| = |w_k^{-1}x_k|,$$

donc, d'après 1., la série numérique $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} w_k^{-1}x_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ est absolument convergente, donc convergente.

Considérons l'application

$$\varphi_{t_0} : \ell^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto \Omega(x)(t_0).$$

Ainsi :

$$M_{t_0} = \varphi_{t_0}^{-1}(\{0\}).$$

• Il est clair que φ_{t_0} est $\mathbb{C}$-linéaire, car, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tous $x, y \in \ell^2_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned}\varphi_{t_0}(\alpha x+y) = \Omega(\alpha x+y)(t_0) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k^{-1}(\alpha x+y)_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt_0}\\ &= \alpha\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k^{-1}x_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt_0} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k^{-1}y_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt_0} = \alpha\,\Omega(x)(t_0)+\Omega(y)(t_0) = \alpha\,\varphi_{t_0}(x)+\varphi_{t_0}(y).\end{aligned}$$

Ainsi, $M_{t_0} = \mathrm{Ker}\,(\varphi_{t_0})$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\ell^2_{\mathbb{C}}$.

• Montrons que φ_{t_0} est continue. On a, pour tout $x \in \ell^2_{\mathbb{C}}$, en utilisant l'inégalité de Cauchy et Schwarz :

$$|\varphi_{t_0}(x)| = \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k^{-1}x_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\Big| \leqslant \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \mu||x||,$$

en notant $\mu = \Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} w_k^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}}$. Comme φ_{t_0} est déjà linéaire, ceci montre que φ_{t_0} est continue.

Alors $M_{t_0} = \varphi_{t_0}^{-1}\{0\}$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc M_{t_0} est fermé.

• On a $\varphi_{t_0}\big(\varepsilon(0)\big) = w_0^{-1} = 1 \neq 0$, donc $\varphi_{t_0} \neq 0$, d'où $M \neq \ell^2_{\mathbb{C}}$.

• Puisque M_{t_0} est un hyperplan de $\ell^2_{\mathbb{C}}$ et que $\ell^2_{\mathbb{C}}$ n'est pas de dimension 1, M_{t_0} n'est pas réduit à 0.

Finalement, M_{t_0} est un $\mathbb{C}$-sev fermé de $\ell^2_{\mathbb{C}}$, différent de $\{0\}$ et de $\ell^2_{\mathbb{C}}$.

3. Soit $x \in M_{t_0}$. Notons $y = S(x)$, $z = S^{-1}(x)$. On a :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\quad y_k = S(x)_k = \lambda_{k-1}x_{k-1},$$

d'où :

$$\Omega(y)(t_0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k^{-1} y_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt_0} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k^{-1}\lambda_{k-1}x_{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt_0} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_{k-1}x_{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt_0}$$

$$\underset{l=k-1}{=} \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} w_l^{-1}x_l\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}lt_0}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0} = \Omega(x)(t_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0} = 0,$$

et donc, par définition, $y \in M_{t_0}$.
De même : $\Omega(z)(t_0) = \Omega(x)(t_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0} = 0$, donc $z \in M_{t_0}$.
Ceci montre $S(x) \in M_{t_0}$ et $S^{-1}(x) \in M_{t_0}$, et on conclut :

$$S(M_{t_0}) \subset M_{t_0} \quad \text{et} \quad S^{-1}(M_{t_0}) \subset M_{t_0}.$$

4. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un $\mathbb{C}$-sev X de $\ell^2_{\mathbb{C}}$ de dimension finie, distinct de $\{0\}$ tel que $S(X) \subset X$.

Considérons l'endomorphisme S' induit par S sur X :

$$S' : X \longrightarrow X,\quad x \longmapsto S'(x) = S(x).$$

Puisque X est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et que $X \neq \{0\}$, d'après le théorème de d'Alembert, S' admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ et un vecteur propre associé x :

$$S'(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad x \neq 0.$$

On a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$S'(x)_k = S(x)_k = \lambda_{k-1}x_{k-1} \quad \text{et} \quad S'(x)_k = (\lambda x)_k = \lambda x_k.$$

Si $\lambda = 0$, alors : $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \ \lambda_{k-1}x_{k-1} = 0$, donc, comme les λ_k sont tous $\neq 0$, : $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \ x_{k-1} = 0$, $x = 0$, contradiction.
On a donc $\lambda \neq 0$, puis :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\quad x_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda}x_{k-1}.$$

Une récurrence immédiate donne alors :

$$x_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda}x_0,\quad x_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda}x_1 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\lambda^2}x_0,\quad \dots$$

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad x_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\lambda^n}x_0 = \frac{w_n}{\lambda^n}x_0,$$

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad x_{-n} = \frac{\lambda^n}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n}x_0 = \frac{\lambda^n}{w_n}x_0.$$

Comme $x \in \ell^2_{\mathbb{C}}$, on a $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $x_nx_{-n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$. Mais $x_nx_{-n} = x_0^2$, d'où $x_0^2 = 0$, $x_0 = 0$, puis $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \ x_n = 0,\ x = 0$, contradiction.

On conclut qu'il n'existe pas de $\mathbb{C}$-sev X de $\ell^2_{\mathbb{C}}$ de dimension finie, distinct de $\{0\}$ et tel que $S(X) \subset X$, c'est-à-dire stable par S.

* *