Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Aide à la résolution pour les exercices du mercredi 16 novembre 2005

Jean-Marie Monier

Exercice 1

En notant $z = y - x$, se ramener à l'étude de $z' = |z| - 1$, d'inconnue $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Déterminer les solutions z de signe fixe sur $\mathbb{R}$.
On obtient les $z : x \longmapsto 1 + \lambda \mathrm{e}^{x},\ \lambda \in \mathbb{R}_+$ et les $z : x \longmapsto -1 + \mu \mathrm{e}^{-x},\ \mu \in \mathbb{R}_-$.

Pour une solution z quelconque, s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|z(x_0)| \geqslant 1$, montrer, à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz, que z est de l'une des deux formes précédentes.

Se ramener au cas o : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ |z(x)| \leqslant 1$.
Montrer que z est décroissante et admet des limites finies α en $-\infty$ et β en $+\infty$, et que $1 \geqslant \alpha \geqslant \beta \geqslant -1$. Il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que $z(a) = 0$. Utiliser l'étude précédente pour déduire la valeur de z sur $]-\infty\,;a]$ et sur $[a\,;+\infty[$. Raccorder en a.

Réponse :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} = \ & \Big\{ \ y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto x + 1 + \lambda \mathrm{e}^{x}\,;\ \lambda \in \mathbb{R}_+ \Big\} \\
\cup \ & \Big\{ \ y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \ -1 + \mu \mathrm{e}^{-x}\,;\ \mu \in \mathbb{R}_- \Big\} \\
\cup \ & \Big\{ \ y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{x-a} & \text{si } \ x \leqslant a \\ -1 + \mu \mathrm{e}^{-x+a} & \text{si } \ x \geqslant a \end{cases}\ ;\ a \in \mathbb{R} \Big\}.
\end{aligned}$$

Exercice 2

a) Pour $X_0 \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ fixé, montrer que la série de fonctions de terme général $f_k : t \longmapsto \dfrac{t^k}{k!} A^k X_0 B^k$ converge normalement sur toute partie bornée de $\mathbb{R}$ et montrer que sa somme X convient.

Utiliser le théorème de Cauchy linéaire pour montrer que X est alors la seule solution du problème de Cauchy avec $X(0) = X_0$.

b) Remarquer $A^3 = 0$ et $B^3 = 0$, d'o : $\qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \ X(t) = \mathrm{I}_3 + tAB + \dfrac{t^2}{2!} A^2 B^2$.

Réponse : $\quad X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+t & 0 \\ 0 & 0 & 1 + t + \dfrac{t^2}{2} \end{pmatrix}.$

Exercice 3

Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy, et l'intervalle de définition I de y est ouvert.

Pour montrer que $I = \mathbb{R}$, raisonner par l'absurde. Supposer, par exemple, que l'extrémité droite β de I soit un réel (et non $+\infty$). Montrer qu'alors y est uniformément continue sur un intervalle d'extrémité droite β, donc y admet une limite finie en β. On pourrait alors prolonger y en une solution sur un intervalle fermé en β, contradiction avec la maximalité de y.

Considérer l'ensemble $E = \big\{ a \in [0\,;+\infty[\,;\ y(a) = \pi \big\}$.
Supposer que E n'est pas vide. Montrer que E est un fermé de $\mathbb{R}$ et que E ne contient pas 0.

En déduire que E admet un plus petit élément, noté a et que $a > 0$.

Montrer que : $\forall x \in [0\,;a[, \quad y(x) < \pi$.

Montrer $y'(a) \leqslant 0$. Montrer que, si $y'(a) < 0$, alors, au voisinage de a à gauche, $y(x) > \pi$, contradiction.

En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = 2k\pi$.

Examiner le comportement de y au voisinage de a à droite et déduire une contradiction avec la définition de a.

Exercice 4

Noter $z(t) = y(x)$ et calculer les dérivées successives de y en fonction de celles de z, (en n'oubliant pas la composition).

On se ramène à $z'' - z = \mathrm{e}^{\,t}$.

Réponse : $\quad y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\,4x}}{2x} + \lambda \mathrm{e}^{\,\frac{1}{x}} + \mu \mathrm{e}^{\,-\frac{1}{x}}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

Exercice 5

a) Appliquer le théorème de Cauchy linéaire.

b) D'après le Cours (méthode de variation des constantes), il existe $\lambda, \mu : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\lambda u + \mu v$ soit solution de (E), et on a : $\quad \mathcal{S}_{(\mathrm{E})} = \Big\{\lambda u + \mu v + Au + Bv\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\Big\}$.

Poser le système sur $\big(v(a), v(b)\big)$ correspondant à $y(a) = y(b) = 0$. Si $v(a) = 0$, montrer que (u, v) est liée, contradiction. De même, montrer $u(a) \neq 0$.

En déduire les valeurs de A et B : $\; A = -\lambda(b),\; B = -\mu(a)$.

Conclure.

Exercice 6

a) Facile.

b) Il est clair que F et G sont des sev de E.

Montrer, par un calcul utilisant une intégration par parties, que :

$$\forall\,(f, g) \in F \times G, \quad \varphi(f, g) = 0.$$

Soit $h \in E$. En utilisant le théorème de Cauchy linéaire, montrer qu'il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$.

c) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. D'après le théorème de Cauchy linéaire, il existe $g_1 \in E$ (unique) telle que :

$$g_1'' = g_1, \qquad g_1(0) = \alpha, \qquad g_1(1) = \beta.$$

Soit $h \in E$. Noter $f = h - g_1$. Montrer $f \in F,\; g_1 \in G$. Appliquer le théorème de Pythagore pour déduire $||h|| \geqslant ||g_1||$, avec égalité si et seulement si $h = g_1$.

Il reste alors à calculer $||g_1||$.

Réponse : $\quad \dfrac{(\alpha\,\mathrm{e} - \beta)^2 + (\alpha - \beta\,\mathrm{e})^2}{\mathrm{e}^{\,2} - 1}.$

* *