

Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 18 juin 2008

Exercices de révision

Thème : Intégration

Cours

Réviser l'intégration sur un segment, puis l'intégration sur un intervalle quelconque, pour des applications continues par morceaux, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Il y a trois niveaux de travail :

Niveau I : Élémentaire :

Intégration des applications continues par morceaux sur un segment :

définition, propriétés algébriques, propriétés relatives à l'ordre, relation de Chasles, sommes de Riemann, lien intégration/dérivation, primitives, changement de variable, intégration par parties, formule de Taylor avec reste intégral, calculs de primitives.

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MPSI, Cours, exercices-types, méthodes, exercices corrigés, Dunod, 9 782 100 498 376, chapitre 6 pages 207-241, chapitre 7, pages 309-336.

Niveau II : Moyen :

Intégration sur un intervalle quelconque pour des applications continues par morceaux :

définition de l'intégrabilité pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{R}_+ , propriétés algébriques et propriétés relatives à l'ordre, intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert, exemples de Riemann, théorème de majoration, théorème d'équivalence, règles $x^\alpha f(x)$, (exemple de Bertrand)

définition de l'intégrabilité pour des fonctions à valeurs dans \mathbb{C} , propriétés, inégalité de Cauchy et Schwarz, fonctions de carré intégrable, relation de Chasles, intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert, changement de variable, intégrales impropres, convergence, convergence absolue.

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MP, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 510 399, chapitre 2 pages 222-248, chapitre 3, pages 153-217.

Niveau III : Avancé :

Intégration des relations de comparaison, intégrales dépendant d'un paramètre : continuité, dérivation, fonction Γ d'Euler.

Exercices

Niveau I

1 Calculer $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} dx$.

2 Déterminer $\inf_{a \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax)^2 dx$.

3 Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$.

4 Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

5 Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx$.

6 Soient $f, g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, telles que : $f \geq 0$, $g \geq 0$, $fg \geq 1$. Montrer :

$$\left(\int_0^1 f \right) \left(\int_0^1 g \right) \geq 1.$$

7 Déterminer $\lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^{3u} \frac{\cos x}{x} dx$.

8 Étude et représentation graphique de la fonction f d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

9 Calculer $\int \frac{\operatorname{Arcsin} \sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}} dx$.

10 Calculer $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$.

Niveau II

1 Existence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$.

2 Existence et calcul de $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$.

3 Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + x + 1} dx$.

4 Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

5 Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \operatorname{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$.

6 Établir :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\cos x}{x} + o_x \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

Niveau III

1 Étude de fonction et tracé de la courbe représentative pour :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t} dt.$$

2 Montrer :

$$\int_1^x \frac{\operatorname{th} t}{t(t+1)} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x.$$

3 Étude de fonction et tracé de la courbe représentative pour :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t} dt.$$
