

# Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 17 juin 2009

Exercices de révision

Thème : Intégration

## Cours

Réviser l'intégration sur un segment, puis l'intégration sur un intervalle quelconque, pour des applications continues par morceaux, à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Il y a trois niveaux de travail :

Niveau I : Élémentaire :

Intégration des applications continues par morceaux sur un segment :

définition, propriétés algébriques, propriétés relatives à l'ordre, relation de Chasles, sommes de Riemann, lien intégration/dérivation, primitives, changement de variable, intégration par parties, formule de Taylor avec reste intégral, calculs de primitives.

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MPSI, Cours, exercices-types, méthodes, exercices corrigés, Dunod, 9 782 100 498 376, chapitre 6 pages 207-241, chapitre 7, pages 309-336.

Niveau II : Moyen :

Intégration sur un intervalle quelconque pour des applications continues par morceaux :

définition de l'intégrabilité pour les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , propriétés algébriques et propriétés relatives à l'ordre, intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert, exemples de Riemann, théorème de majoration, théorème d'équivalence, règles  $x^\alpha f(x)$ , (exemple de Bertrand)

définition de l'intégrabilité pour des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , propriétés, inégalité de Cauchy et Schwarz, fonctions de carré intégrable, relation de Chasles, intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert, changement de variable, intégrales impropres, convergence, convergence absolue.

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MP, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 510 399, chapitre 2 pages 122-148, chapitre 3, pages 153-182, 184-189.

Niveau III : Avancé :

Intégration des relations de comparaison, intégrales dépendant d'un paramètre : continuité, dérivation, fonction  $\Gamma$  d'Euler.

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MP, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 510 399, chapitre 3, pages 182-184, 189-217.

## Exercices

### Niveau I

1 Calculer  $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} dx$ .

2 Déterminer  $\inf_{a \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax)^2 dx$ .

3 Trouver  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$ .

4 Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

5 Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx$ .

6 Soient  $f, g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues, telles que :  $f \geq 0$ ,  $g \geq 0$ ,  $fg \geq 1$ . Montrer :

$$\left( \int_0^1 f \right) \left( \int_0^1 g \right) \geq 1.$$

7 Déterminer  $\lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^{3u} \frac{\cos x}{x} dx$ .

8 Étude et représentation graphique de la fonction  $f$  d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

9 Calculer  $\int \frac{\operatorname{Arcsin} \sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}} dx$ .

10 Calculer  $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$ .

### Niveau II

1 Existence et calcul de  $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$ .

2 Existence et calcul de  $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$ .

3 Existence et calcul de  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + x + 1} dx$ .

4 Existence et calcul de  $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ .

5 Déterminer la nature de l'intégrale impropre  $\int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \operatorname{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ .

6 Établir :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\cos x}{x} + o_x \left( \frac{1}{x^2} \right).$$

### Niveau III

1 Montrer :

$$\int_1^x \frac{\operatorname{th} t}{t(t+1)} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x.$$

2 Étude de fonction et tracé de la courbe représentative pour :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t} dt.$$

3 a) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'application  $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$ .

On note :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt.$$

b) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in [0; +\infty[$ .

c) En déduire :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x).$$

Exprimer  $f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

d) En déduire :

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \right)^2 dt = \pi \ln 2.$$

\*\*\*\*\*