Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 16 septembre 2009

Exercices de révision

Thème : Séries entières

Cours

Réviser les séries entières.

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MP, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 510 399, chapitre 6, pages 351-402.
Il y a deux niveaux de travail :

Niveau I : Moyen :

Rayon de convergence, comparaison de rayons, règle de d'Alembert, structure vectorielle, dérivation, convergences, régularité de la somme d'une série entière, développement en série entière, fonctions usuelles d'une variable complexe.

Niveau II : Avancé :

Produit de deux séries entières, morphismes $z \in \mathbb{C} \longmapsto \mathrm{e}^{z}$, $t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$, définition de π.

Exercices

Les exercices sont tirés du livre de Cours Analyse MP.

Niveau I

1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+n}{2^n+n!}z^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 5}\frac{\ln(\sqrt{n}+1)}{\ln(\sqrt{n}-1)}z^n$ *c)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(\sqrt{n})^n z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(\ln n)^{\ln n}z^n$ *e)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\tan\left(\pi\sqrt{n^2+3n+2}\right)z^n.$

2 Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes (z : variable complexe, x : variable réelle) :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n^3z^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2-n+4}{n+1}x^n$ *c)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\Big(n+\frac{1}{n}\Big)x^{2n}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{4n+3}}{4n+3}$

e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n(n+3)}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3+1}{n!}x^n$ *g)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{(2n)!}.$

3 Pour les fonctions f des exemples suivants où l'on donne $f(x)$ (x : variable réelle), montrer que f est développable en série entière en 0 et calculer son développement en série entière en 0 ; préciser le rayon de convergence R.

a) $\displaystyle\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}$ *b)* $\displaystyle\frac{1}{x^2-2x\cos\theta+1}$, $\theta\in\mathbb{R}$ fixé *c)* $\displaystyle\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

d) $\displaystyle\ln\Big(1+\frac{x}{1+x^2}\Big)$ *e)* $\sin^3 x$ *f)* $\displaystyle\operatorname{Arctan}\frac{2(x+1)}{x-4}.$

* *