Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 16 juin 2010

Exercices de révision

Thème : Intégration

Cours

Réviser l'intégration sur un segment, puis l'intégration sur un intervalle quelconque, pour des applications continues par morceaux, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Il y a trois niveaux de travail :

Niveau I : Élémentaire :

Intégration des applications continues par morceaux sur un segment :

définition, propriétés algébriques, propriétés relatives à l'ordre, relation de Chasles, sommes de Riemann, lien intégration/dérivation, primitives, changement de variable, intégration par parties, formule de Taylor avec reste intégral, calculs de primitives.

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MPSI, Cours, exercices-types, méthodes, exercices corrigés, Dunod, 9 782 100 498 376, chapitre 6 pages 207-241, chapitre 7, pages 309-336.

Niveau II : Moyen :

Intégration sur un intervalle quelconque pour des applications continues par morceaux :

définition de l'intégrabilité pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, propriétés algébriques et propriétés relatives à l'ordre, intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert, exemples de Riemann, théorème de majoration, théorème d'équivalence, règles $x^\alpha f(x)$, (exemple de Bertrand)
définition de l'intégrabilité pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, propriétés, inégalité de Cauchy et Schwarz, fonctions de carré intégrable, relation de Chasles, intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert, changement de variable, intégrales impropres, convergence, convergence absolue.

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MP, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 510 399, chapitre 2 pages 122-148, chapitre 3, pages 153-182, 184-189.

Niveau III : Avancé :

Intégration des relations de comparaison, intégrales dépendant d'un paramètre : continuité, dérivation, fonction Γ d'Euler.

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MP, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 510 399, chapitre 3, pages 182-184, 189-217.

Exercices

Niveau I

1 Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\, \mathrm{d}x$.

2 Déterminer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{a\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax)^2\, \mathrm{d}x$.

3 Trouver $\displaystyle\lim_{n\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

4 Déterminer $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, \mathrm{d}x$.

5 Déterminer $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n}\, \mathrm{d}x$.

6 Soient $f, g : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, telles que : $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, $fg \geqslant 1$. Montrer :

$$\Big(\int_0^1 f\Big)\Big(\int_0^1 g\Big) \geqslant 1.$$

7 Déterminer $\displaystyle\lim_{u \,\longrightarrow\, 0^+} \int_u^{3u} \frac{\cos x}{x}\, \mathrm{d}x$.

8 Étude et représentation graphique de la fonction f d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

9 Calculer $\displaystyle\int \frac{\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}\, \mathrm{d}x$.

10 Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\, \mathrm{d}x$.

Niveau II

1 Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\, \mathrm{d}x$.

2 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, \mathrm{d}x$.

3 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+x+1}\, \mathrm{d}x$.

4 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}\, \mathrm{d}x$.

5 Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\, \mathrm{d}x$.

6 Établir :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{\cos x}{x} + \underset{x \,\longrightarrow\, +\infty}{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Niveau III

1 Montrer :

$$\int_1^x \frac{\operatorname{th} t}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \ln x.$$

2 Étude de fonction et tracé de la courbe représentative pour :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

3 *a)* Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

On note :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$.

c) En déduire :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x).$$

Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) En déduire :

$$\int_0^{+\infty} \Big(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\Big)^2\,\mathrm{d}t = \pi \ln 2.$$

* *