Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Épreuve du samedi 15 janvier 2005

Jean-Marie Monier

Corrigé

I Noyau, image, rang d'une matrice et de sa transposée

1.a. $*$ $\bullet$ On a, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}$:

$$X \in \operatorname{Ker}(A) \iff AX = 0 \implies {}^{\mathrm{t}}AAX = 0 \iff X \in \operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}AA),$$

donc : $\operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}AA)$.

$\bullet$ On a, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}$:

$$X \in \operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}AA) \iff {}^{\mathrm{t}}AAX = 0 \implies {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}AAX = 0 \iff {}^{\mathrm{t}}(AX)(AX) = 0$$
$$\iff ||AX||_2^2 = 0 \iff AX = 0 \iff X \in \operatorname{Ker}(A),$$

donc : $\operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}AA) \subset \operatorname{Ker}(A)$.

On conclut :

$$\boxed{\operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}AA) = \operatorname{Ker}(A)}$$

$*$ En appliquant le résultat précédent à ${}^{\mathrm{t}}A$ à la place de A, on obtient :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A\,{}^{\mathrm{t}}A) = \operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}A)}$$

1.b. $\bullet$ En utilisant le théorème du rang et le résultat de a., on a :

$$\operatorname{rg}({}^{\mathrm{t}}AA) = p - \dim\operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}AA) = p - \dim\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{rg}(A).$$

$\bullet$ En appliquant le résultat précédent à ${}^{\mathrm{t}}A$ à la place de A, on obtient :

$$\operatorname{rg}(A\,{}^{\mathrm{t}}A) = \operatorname{rg}({}^{\mathrm{t}}A).$$

$\bullet$ D'après le Cours : $\operatorname{rg}({}^{\mathrm{t}}A) = \operatorname{rg}(A)$.

On conclut :

$$\boxed{\operatorname{rg}({}^{\mathrm{t}}AA) = \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^{\mathrm{t}}A) = \operatorname{rg}(A\,{}^{\mathrm{t}}A)}$$

1.c. $*$ $\bullet$ Soit $Y \in \operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}AA)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{p,1}$ telle que $Y = {}^{\mathrm{t}}AAX$. On a alors $Y = {}^{\mathrm{t}}A(AX) \in \operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}A)$. Ceci montre : $\operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}AA) \subset \operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}A)$.

• D'après b. :

$$\dim \operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}AA) = \operatorname{rg}({}^{\mathrm{t}}AA) = \operatorname{rg}({}^{\mathrm{t}}A) = \dim \operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}A).$$

Il en résulte :

$$\boxed{\operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}AA) = \operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}A)}$$

$*$ En appliquant le résultat précédent à ${}^{\mathrm{t}}A$ à la place de A, on obtient :

$$\boxed{\operatorname{Im}(A\,{}^{\mathrm{t}}A) = \operatorname{Im}(A)}$$

2.a. • On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{4,1}$:

$$X \in \operatorname{Ker}(A) \iff AX = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

donc $\dim \operatorname{Ker}(A) = 2$ et une base de $\operatorname{Ker}(A)$ est, par exemple, (V_1, V_2), où :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{4,1}$:

$$X \in \operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}A) \iff {}^{\mathrm{t}}AX = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$$

donc $\dim \operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}A) = 2,$ et une base de $\operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}A)$ est, par exemple, (V_3, V_4), où :

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• On remarque que, par exemple, $V_1 \notin \operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}A)$ et $V_3 \notin \operatorname{Ker}(A)$. Il n'y a donc aucune relation d'inclusion entre ces deux sev.

Plus précisément, on a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{4,1}$:

$$\begin{cases} X \in \operatorname{Ker}(A) \\ X \in \operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}A) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \iff X = 0,$$

donc $\operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}A) = \{0\}$.

Comme $\dim \operatorname{Ker}(A) = \dim \operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}A) = 2$, il en résulte que les deux sev $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}A)$ sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_{4,1}$.

2.b. • Il est clair, au vu des colonnes de A, que $\operatorname{Im}(A)$ est de dimension 2 et qu'une base de $\operatorname{Im}(A)$ est, par exemple, (U_1, U_2), où :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

• De même, $\operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}A)$ est de dimension 2 et une base de $\operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}A)$ est, par exemple, (U_3, U_4) où

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• Comme, par exemple, U_1 ne se décompose pas sur (U_3, U_4) et que U_3 ne se décompose pas sur (U_1, U_2), il n'y a aucune relation d'inclusion entre $\operatorname{Im}(A)$ et $\operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}A)$.

Plus précisément :

$$\det_{\mathrm{b.c.}}(U_1, U_2, U_3, U_4) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

donc (U_1, U_2, U_3, U_4) est libre.

Il en résulte que les sev $\operatorname{Im}(A)$ et $\operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}A)$, qui sont tous les deux de dimension 2, sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_{4,1}$.

II Matrice de Gram d'une famille de colonnes

1.a. En notant $(\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}$, on a, d'après les notations de l'énoncé :

$$\forall\, i \in \{1, ..., q\}, \quad X_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \mathrm{E}_k,$$

d'où, pour tout $(i, j) \in \{1, ..., q\}^2$ et puisque la base canonique est orthonormale pour le produit scalaire canonique :

$${}^{\mathrm{t}}X_i X_j = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} x_{kj}.$$

On reconnaît le terme situé à la ligne i et à la colonne j dans ${}^{\mathrm{t}}XX$, par définition du produit de deux matrices et de la transposée d'une matrice.

On conclut :

$$\boxed{G(X_1, ..., X_q) = {}^{\mathrm{t}}XX}$$

1.b. • D'après I 1.b. :

$$\text{rg}\,\big(G(X_1,...,X_q)\big) = \text{rg}\,({}^{\text{t}}XX) = \text{rg}\,(X) = \text{rg}\,(X_1,...,X_q).$$

• Il en résulte :

$$\gamma(X_1,...,X_q) = 0 \iff \text{rg}\,\big(G(X_1,...,X_q)\big) < q \iff \text{rg}\,(X_1,...,X_q) < q \iff (X_1,...,X_q) \text{ liée.}$$

1.c. On a $G(X_1,...,X_q) \in \mathbf{M}_q$ et ${}^{\text{t}}\big(G(X_1,...,X_q)\big) = {}^{\text{t}}({}^{\text{t}}XX) = {}^{\text{t}}XX = G(X_1,...,X_q)$, donc $G(X_1,...,X_q) \in \mathbf{S}_q$.

Et, pour tout $Y \in \mathbf{M}_{q,1}$:

$${}^{\text{t}}YG(X_1,...,X_q)Y = {}^{\text{t}}Y({}^{\text{t}}XX)Y = {}^{\text{t}}(XY)XY = ||XY||_2^2 \geqslant 0.$$

On conclut :

$$\boxed{G(X_1,...,X_q) \in \mathbf{S}_q^+}$$

2. Soit $Y_k = X_k$ si $k \neq i$, et $Y_i = X_i + \sum\limits_{j\neq i} a_j X_j$, où les a_j sont des réels.

La colonne numéro i de $G(Y_1,...,Y_q)$ est :

$$\begin{pmatrix} < Y_1 \,|\, Y_i > \\ \vdots \\ < Y_q \,|\, Y_i > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < Y_1 \,|\, X_i > + \sum_{j\neq i} a_j < Y_1 \,|\, X_j > \\ \vdots \\ < Y_q \,|\, X_i > + \sum_{j\neq i} a_j < Y_q \,|\, X_j > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < Y_1 \,|\, X_i > \\ \vdots \\ < Y_q \,|\, X_i > \end{pmatrix} + \sum_{j\neq i} a_j \begin{pmatrix} < Y_1 \,|\, X_j > \\ \vdots \\ < Y_q \,|\, X_j > \end{pmatrix},$$

donc, par multilinéarité et alternance :

$$\gamma(Y_1,...,Y_q) = \det\big((< Y_u \,|\, X_v >)_{uv}\big).$$

Puis, en raisonnant de la même façon sur les lignes de cette dernière matrice, on a :

$$\det\big((< Y_u \,|\, X_v >)_{uv}\big) = \det\big((< X_u \,|\, X_v >)_{uv}\big) = \gamma(X_1,...,X_q).$$

Ainsi, $\gamma(X_1,...,X_q)$ est inchangé lorsqu'on ajoute à l'un des X_i une combinaison linéaire des autres X_j, $j \neq i$.

3.a. Notons Y le projeté orthogonal de X_1 sur $\text{Vect}\,(X_2,...,X_q)$, et $Z = X_1 - Y$.

On a donc :

$$X_1 = Y + Z, \quad Y \in \text{Vect}\,(X_2,...,X_q), \quad Z \in \big(\text{Vect}\,(X_2,...,X_q)\big)^\perp, \quad d_1 = d\big(X_1, \text{Vect}\,(X_2,...,X_q)\big) = ||Z||_2.$$

D'après 2., puisque Y est combinaison linéaire de $X_2,...,X_q$, on a :

$$\gamma(X_1,...,X_q) = \gamma\big(Y+Z, X_2,...,X_q\big) = \gamma(Z, X_2,...,X_q).$$

De plus :

$$\forall\, i \in \{2,...,q\}, \quad < Z \,|\, X_i > = 0.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\gamma(Z, X_2, ..., X_q) &= \begin{vmatrix} < Z \,|\, Z > & < Z \,|\, X_2 > & \dots & < Z \,|\, X_q > \\ < X_2 \,|\, Z > & < X_2 \,|\, X_2 > & \dots & < X_2 \,|\, X_q > \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ < X_q \,|\, Z > & < X_q \,|\, X_2 > & \dots & < X_q \,|\, X_q > \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} ||Z||_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & < X_2 \,|\, X_2 > & \dots & < X_2 \,|\, X_q > \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & < X_q \,|\, X_2 > & \dots & < X_q \,|\, X_q > \end{vmatrix} = ||Z||_2^2 \begin{vmatrix} < X_2 \,|\, X_2 > & \dots & < X_2 \,|\, X_q > \\ \vdots & & \vdots \\ < X_q \,|\, X_2 > & \dots & < X_q \,|\, X_q > \end{vmatrix} \\
&= d_1^2 \, \gamma(X_2, ..., X_q).
\end{aligned}$$

On conclut :

$$\boxed{\gamma(X_1, ..., X_q) = d_1^2 \, \gamma(X_2, ..., X_q)}$$

3.b. Avec les notations précédentes et en utilisant le théorème de Pythagore, puisque $Y \bot Z$, on a :

$$d_1^2 = ||Z||_2^2 = ||X_1||_2^2 - ||Y||_2^2 \leqslant ||X_1||^2 = \gamma(X_1),$$

d'où, puisque $\gamma(X_2, ..., X_q) \geqslant 0$:

$$\gamma(X_1, ..., X_q) = d_1^2 \, \gamma(X_2, ..., X_q) \leqslant \gamma(X_1) \, \gamma(X_2, ..., X_q).$$

De plus, puisque $(X_2, ..., X_q)$ est libre, en utilisant 1.b. :

$$\gamma(X_1, ..., X_q) = \gamma(X_1) \, \gamma(X_2, ..., X_q) \iff \big(d_1^2 - \gamma(X_1)\big) \, \gamma(X_2, ..., X_q) = 0 \iff d_1^2 = \gamma(X_1)$$

$$\iff ||Y||_2^2 = 0 \iff Y = 0 \iff X_1 \perp \mathrm{Vect}\,(X_2, ..., X_q).$$

3.c. Comme $(X_1, ..., X_q)$ est libre, les sous-familles $(X_2, ..., X_q), ..., (X_{q-1}, X_q), (X_q)$ sont libres, d'où, en réitérant le résultat de b. et en remarquant que γ est à valeurs $\geqslant 0$:

$$\gamma(X_1, ..., X_q) \leqslant \gamma(X_1)\gamma(X_2, ..., X_q) \leqslant ... \leqslant \gamma(X_1)\gamma(X_2) \cdots \gamma(X_q) = \prod_{i=1}^{n} ||X_i||_2^2$$

et

$$\gamma(X_1, ..., X_q) = \prod_{i=1}^{n} ||X_i||_2^2 \iff \begin{cases} \gamma(X_1, ..., X_q) = \gamma(X_1)\gamma(X_2, ..., X_q) \\ \gamma(X_2, ..., X_q) = \gamma(X_2)\gamma(X_3, ..., X_q) \\ \vdots \\ \gamma(X_{q-1}, X_q) = \gamma(X_{q-1})\gamma(X_q) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X_1 \in \big(\mathrm{Vect}\,(X_2, ..., X_q)\big)^{\perp} \\ X_2 \in \big(\mathrm{Vect}\,(X_3, ..., X_q)\big)^{\perp} \\ \vdots \\ X_{q-1} \in \big(\mathrm{Vect}\,(X_q)\big)^{\perp} \end{cases} \iff (X_1, ..., X_q) \quad \text{orthogonale.}$$

4.a. On applique le résultat de 3.c. à la famille $(C_1, ..., C_n)$, qui est libre puisque $A \in \mathbf{GL}_n$:

$$\gamma(C_1, ..., C_n) \leqslant \prod_{j=1}^{n} ||C_j||_2^2$$

et il y a égalité si et seulement si $(C_1, ..., C_n)$ est orthogonale. De plus, d'après I 1.a. et puisque A est carrée :

$$\gamma(C_1, ..., C_n) = \det\big(G(C_1, ..., C_n)\big) = \det({}^{\mathrm{t}}AA) = \big(\det(A)\big)^2,$$

d'où :

$$|\det(A)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} ||C_j||_2,$$

avec égalité si et seulement si $(C_1, ..., C_n)$ est orthogonale.

4.b. • On a, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$:

$$||C_j||_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\Big)^{1/2} \leqslant n^{1/2},$$

d'où, en utilisant le résultat de 4.a. :

$$|\det(A)| \leqslant n^{n/2}.$$

• On a :

$$|\det(A)| = n^{n/2} \iff |\det(A)| = \prod_{j=1}^{n} ||C_j||_2 = n^{n/2}.$$

Comme les C_j sont tous non nuls, on a :

$$\prod_{j=1}^{n} ||C_j||_2 = \prod_{j=1}^{n} n^{1/2} \iff \forall\, j \in \{1, ..., n\},\quad ||C_j||_2 = n^{1/2}.$$

Et, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$:

$$||C_j||_2 = n^{1/2} \iff \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = n \iff \sum_{i=1}^{n} (1 - a_{ij}^2) = 0$$
$$\iff \forall\, i \in \{1, ..., n\},\quad 1 - a_{ij}^2 = 0 \iff \forall\, i \in \{1, ..., n\},\quad a_{ij} = \pm 1,$$

car les a_{ij} sont tous dans $[-1\,;1]$ par hypothèse.

Ainsi, il y a égalité si et seulement si A est à termes dans $\{-1, 1\}$ et à colonnes deux à deux orthogonales.

5. Il est clair que (U, V, W) est libre. D'après 3.a., on a, en notant d la distance de X à $\mathrm{Vect}\,(U, V, W)$: $\gamma(X, U, V, W) = d^2\,\gamma(U, V, W)$. On calcule :

$$\gamma(X, U, V, W) = \begin{vmatrix} 30 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 100 \qquad \text{et} \qquad \gamma(U, V, W) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

On obtient $d^2 = \dfrac{100}{4} = 25$ et on conclut :

$$\boxed{d\big(X, \mathrm{Vect}\,(U, V, W)\big) = 5}$$

III Étude élémentaire de $\mathbf{S}_n$, $\mathbf{S}_n^+$, $\mathbf{S}_n^{++}$

1.a. D'après le Cours, $\mathbf{S}_n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une base en est $(\mathrm{E}_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n} \cup (\mathrm{E}_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$, et $\dim(\mathbf{S}_n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1.b. • Soient $A, B \in \mathbf{S}_n$. On a :

$$AB \in \mathbf{S}_n \iff {}^{\mathrm{t}}(AB) = AB \iff {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A = AB \iff BA = AB.$$

• Pour $n \geqslant 2$, il existe $A, B \in \mathbf{S}_n$ telles que $AB \neq BA$. Par exemple, en complétant à l'ordre n par des termes tous nuls, on peut choisir :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

car on a alors :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On conclut que, pour $n \geqslant 2$, $\mathbf{S}_n$ n'est pas stable par multiplication.

1.c. Soit $A \in \mathbf{S}_n \cap \mathbf{GL}_n$. On a :

$$A\,{}^{\mathrm{t}}(A^{-1}) = {}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}(A^{-1}) = {}^{\mathrm{t}}(A^{-1}A) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n,$$

donc ${}^{\mathrm{t}}(A^{-1}) = A^{-1}$, $A^{-1} \in \mathbf{S}_n$.

2.a. (1) Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^+$. On a alors $A + B \in \mathbf{S}_n$ et :

$$\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}, \quad {}^{\mathrm{t}}X(A+B)X = {}^{\mathrm{t}}XAX + {}^{\mathrm{t}}XBX \geqslant 0,$$

donc $A + B \in \mathbf{S}_n^+$.

(2) Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $A \in \mathbf{S}_n^+$. On a alors $\alpha A \in \mathbf{S}_n$ et :

$$\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}, \quad {}^{\mathrm{t}}X(\alpha A)X = \alpha\,{}^{\mathrm{t}}XAX \geqslant 0,$$

donc $\alpha A \in \mathbf{S}_n^+$.

(3) Soient $A \in \mathbf{S}_n^+$, $B \in \mathbf{S}_n^{++}$. On a alors $A + B \in \mathbf{S}_n$ et :

$$\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}, \quad {}^{\mathrm{t}}X(A+B)X = {}^{\mathrm{t}}XAX + {}^{\mathrm{t}}XBX > 0,$$

donc $A + B \in \mathbf{S}_n^{++}$.

(4) Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $A \in \mathbf{S}_n^{++}$. On a alors $\alpha A \in \mathbf{S}_n$ et :

$$\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}, \quad {}^{\mathrm{t}}X(\alpha A)X = \alpha\,{}^{\mathrm{t}}XAX > 0,$$

donc $\alpha A \in \mathbf{S}_n^{++}$.

(5) Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^+$ telles que $A + B = 0$. On a, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}$, ${}^{\mathrm{t}}XAX \geqslant 0$, ${}^{\mathrm{t}}XBX \geqslant 0$ et :

$${}^{\mathrm{t}}XAX + {}^{\mathrm{t}}XBX = {}^{\mathrm{t}}X(A+B)X = 0.$$

Il en résulte : ${}^{\mathrm{t}}XAX = 0$ et ${}^{\mathrm{t}}XBX = 0$.
La forme quadratique associée à A (dans la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}$) est alors la forme nulle, donc $A = 0$. De même, $B = 0$.

(6) Soit $A \in \mathbf{S}_n^{++}$.
• On a, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}$:

$$X \in \operatorname{Ker}(A) \iff AX = 0 \implies {}^{\mathrm{t}}XAX = 0 \implies X = 0,$$

donc $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$, $A \in \mathbf{GL}_n$.
• D'après 1.c., on a déjà $A^{-1} \in \mathbf{S}_n$. Et :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}, \quad {}^{\mathrm{t}}XA^{-1}X = {}^{\mathrm{t}}XA^{-1}AA^{-1}X = {}^{\mathrm{t}}(A^{-1}X)A(A^{-1}X) > 0,$$

car $A^{-1}X \neq 0$ et $A \in \mathbf{S}_n^{++}$.
Ceci montre : $A^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++}$.

(7) Soit $M \in \mathbf{M}_n$.
On a : ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}MM) = {}^{\mathrm{t}}M\,{}^{\mathrm{t}}{}^{\mathrm{t}}M = {}^{\mathrm{t}}MM$, donc ${}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n$.
• On a, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}$:

$${}^{\mathrm{t}}X({}^{\mathrm{t}}MM)X = ({}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}M)MX = {}^{\mathrm{t}}(MX)MX = ||MX||_2^2 \geqslant 0,$$

et donc ${}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^{+}$.

(8) Soit $M \in \mathbf{GL}_n$. D'après (7), on a déjà ${}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^{+}$. De plus, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}$:

$${}^{\mathrm{t}}X({}^{\mathrm{t}}MM)X = 0 \iff ||MX||_2^2 = 0 \iff MX = 0 \iff X = 0,$$

car $M \in \mathbf{GL}_n$.
On conclut : ${}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^{++}$.

(9) Soit $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbf{S}_n^{+}$ convergeant vers un élément $M \in \mathbf{M}_n$.
On a : $\forall k \in \mathbb{N},\ \ {}^{\mathrm{t}}S_k = S_k$, d'où, en passant à la limite lorsque l'entier k tend vers l'infini : ${}^{\mathrm{t}}M = M$, et donc $M \in \mathbf{S}_n$.
On a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}, \quad {}^{\mathrm{t}}XS_kX \geqslant 0,$$

d'où, en passant à la limite lorsque l'entier k tend vers l'infini et puisque les opérations matricielles sont continues :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}, \quad {}^{\mathrm{t}}XMX \geqslant 0,$$

et finalement : $M \in \mathbf{S}_n^{+}$.

Considérons, pour $n \geqslant 2$, les matrices obtenues en complétant par des termes tous nuls les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que A et B sont symétriques. De plus, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,1}$:

$${}^{\mathrm{t}}XAX = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \geqslant 0$$

$${}^{\mathrm{t}}XBX = 2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x+y)^2 \geqslant 0,$$

donc : $A \in \mathbf{S}_2^{+}$ et $B \in \mathbf{S}_2^{+}$.
D'autre part : $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathbf{S}_2$, et on conclut que, pour $n \geqslant 2$, $\mathbf{S}_n^{+}$ n'est pas stable par multiplication.

2.b. • On a, pour toute $A \in \mathbf{S}_n$, $A \leqslant A$, car $A - A = 0 \in \mathbf{S}_n^+$, donc $\leqslant$ est réflexive.

• Soient $A, B \in \mathbf{S}_n$. On a :

$$\begin{cases} A \leqslant B \\ B \leqslant A \end{cases} \iff \begin{cases} B - A \in \mathbf{S}_n^+ \\ A - B \in \mathbf{S}_n^+ \end{cases} \implies B - A = 0 \iff A = B,$$

en utilisant 2.a.(5). Ceci montre que $\leqslant$ est antisymétrique.

• Soient $A, B, C \in \mathbf{S}_n$. On a :

$$\begin{cases} A \leqslant B \\ B \leqslant C \end{cases} \iff \begin{cases} B - A \in \mathbf{S}_n^+ \\ C - B \in \mathbf{S}_n^+ \end{cases} \implies C - A = (C - B) + (B - A) \in \mathbf{S}_n^+ \iff A \leqslant C.$$

Ceci montre que $\leqslant$ est transitive.

On conclut :

$$\boxed{\leqslant \text{ est une relation d'ordre dans } \mathbf{S}_n}$$

Considérons, pour $n \geqslant 2$, les matrices obtenues en complétant par des termes tous nuls les deux matrices suivantes :

$$A = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a : $A, B \in \mathbf{S}_2$, $B \notin \mathbf{S}_2^+$ car, pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ${}^{\mathrm{t}}XBX = -2 < 0$, et $-B \notin \mathbf{S}_2^+$, car, pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ${}^{\mathrm{t}}X(-B)X = -2 < 0$.

Ainsi : $A \in \mathbf{S}_2$, $B \in \mathbf{S}_2$, $A \not\leqslant B$, $B \not\leqslant A$, donc $\leqslant$ n'est pas un ordre total.

2.c. (1) On a, pour toutes $A, B, C \in \mathbf{S}_n$:

$$A + C \leqslant B + C \iff (B + C) - (A + C) \in \mathbf{S}_n^+ \iff B - A \in \mathbf{S}_n^+ \iff A \leqslant B.$$

(2) On a, pour toutes $A, B, C, D \in \mathbf{S}_n$:

$$\begin{cases} A \leqslant B \\ C \leqslant D \end{cases} \iff \begin{cases} B - A \in \mathbf{S}_n^+ \\ D - C \in \mathbf{S}_n^+ \end{cases}$$

$$\implies (B + D) - (A + C) = (B - A) + (D - C) \in \mathbf{S}_n^+ \iff A + C \leqslant B + D.$$

• Le même contrexemple qu'en 2.a. montre que l'on n'a pas :

$$\forall\, A, B \in \mathbf{S}_n^+, \ \begin{cases} 0 \leqslant A \\ 0 \leqslant B \end{cases} \implies 0 \leqslant AB$$

car il se peut que A et B soient symétriques positives et que le produit AB ne soit même pas symétrique.

3. Soit $A \in \mathbf{S}_n$.
• 1). Supposons $A \in \mathbf{S}_n^+$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}$ tel que : $AX = \lambda X$ et $X \neq 0$. On a :

$$\lambda ||X||_2^2 = \lambda\, {}^{\mathrm{t}}XX = {}^{\mathrm{t}}X(\lambda X) = {}^{\mathrm{t}}XAX \geqslant 0,$$

donc $\lambda \geqslant 0$.
Ceci montre : $\mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}_+$.
2). Réciproquement, supposons $\mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}_+$.
D'après le théporème spectral, il existe $U \in \mathbf{O}_n$, $D \in \mathbf{D}_n$ telles que : $A = UDU^{-1}$.
Notons $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où, par hypothèse : $\forall\, i \in \{1, ..., n\}, \quad \lambda_i \geqslant 0$.
Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}$. On a :

$$ {}^{\mathrm{t}}XAX = {}^{\mathrm{t}}XUDU^{-1}X = {}^{\mathrm{t}}(U^{-1}X)D(U^{-1}X),$$

car $U^{-1} = {}^{\mathrm{t}}U$.
Notons $Y = U^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a alors :

$$ {}^{\mathrm{t}}XAX = {}^{\mathrm{t}}YDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant 0.$$

Ceci montre : $A \in \mathbf{S}_n^+$.
On conclut :

$$\boxed{\forall\, A \in \mathbf{S}_n, \quad A \in \mathbf{S}_n^+ \iff \mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}_+}$$

• 1). Supposons $A \in \mathbf{S}_n^{++}$.
En raisonnant comme ci-dessus, on déduit : $\mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
2). Réciproquement, supposons $\mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
On a déjà, d'après le résultat précédent, $A \in \mathbf{S}_n^+$.
De plus, pour toute $X \in \mathbf{M}_{n,1}$, avec les notations précédentes :

$$ {}^{\mathrm{t}}XAX = 0 \iff {}^{\mathrm{t}}YDY = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = 0$$
$$\iff \forall\, i \in \{1, ..., n\}, \quad y_i = 0 \iff Y = 0 \iff X = 0,$$

car les λ_i sont tous > 0.
Ceci montre : $A \in \mathbf{S}_n^{++}$.
On conclut :

$$\boxed{\forall\, A \in \mathbf{S}_n, \quad A \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}_+^*}$$

4. On a, pour toute $A \in \mathbf{M}_n$:

$$A \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \begin{cases} A \in \mathbf{S}_n \\ \mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}_+^* \end{cases} \iff \begin{cases} A \in \mathbf{S}_n \\ \mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}_+ \\ 0 \notin \mathrm{Sp}\,(A) \end{cases} \iff \begin{cases} A \in \mathbf{S}_n^+ \\ A \in \mathbf{GL}_n \end{cases} \iff A \in \mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n,$$

d'où :

$$\boxed{\mathbf{S}_n^{++} = \mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n}$$

5. Il est clair que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad W(a,b) \in \mathbf{S}_n$.
Calculons le polynôme caractéristique χ de $W(a,b)$:

$$\chi(\lambda) = \det\big(W(a,b) - \lambda \mathrm{I}_n\big) = \begin{vmatrix} a+b-\lambda & b & \dots & b \\ b & a+b-\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a+b-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_1 \longleftarrow C_1+C_2+\ldots+C_n}{=} (a+nb-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 1 & a+b-\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & a+b-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_i \longleftarrow L_i - L_1,\, 2 \leqslant i \leqslant n}{=} = (a+nb-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 0 & a-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a+nb-\lambda)(a-\lambda)^{n-1}.$$

On a alors : $\mathrm{Sp}\big(W(a,b)\big) = \{a,\, a+nb\}$.
Plus précisément, si $b \neq 0$, a est valeur propre d'ordre $n-1$ et $a+nb$ est valeur propre simple.
D'après 3.a. :

$$W(a,b) \in \mathbf{S}_n^+ \iff \mathrm{Sp}\big(W(a,b)\big) \subset \mathbb{R}_+ \iff \big(a \geqslant 0 \text{ et } a+nb \geqslant 0\big)$$
$$W(a,b) \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \mathrm{Sp}\big(W(a,b)\big) \subset \mathbb{R}_+^* \iff \big(a > 0 \text{ et } a+nb > 0\big).$$

IV Carré d'une matrice symétrique positive

1. On a, d'après III 2.a.(7), pour toute $A \in \mathbf{S}_n$: $A^2 = {}^{\mathrm{t}}AA \in \mathbf{S}_n^+$.

2.a. Pour $n \geqslant 2$, considérons les matrices obtenues en complétant par des termes tous nuls les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $A, B \in \mathbf{S}_2$. Et, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,1}$:

$${}^{\mathrm{t}}XAX = 4x^2 \geqslant 0, \qquad {}^{\mathrm{t}}XBX = 8x^2 + 8xy + 5y^2 = 2(2x+y)^2 + 3y^2 \geqslant 0,$$

donc $A, B \in \mathbf{S}_2^+$.
On a : $B - A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_2^+$, car, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,1}$:

$${}^{\mathrm{t}}X(B-A)X = 4x^2 + 8xy + 5y^2 = 4(x+y)^2 + y^2 \geqslant 0.$$

Mais : $B^2 - A^2 = \begin{pmatrix} 64 & 52 \\ 52 & 41 \end{pmatrix} \notin \mathbf{S}_2^+$, car : $\det(B^2 - A^2) = 80 \cdot 41 - 52^2 < 0$, donc les valeurs propres de $B^2 - A^2$ ne sont pas toutes $\geqslant 0$.
On conclut :

$$\boxed{\text{L'application } \varphi : \mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathbf{S}_n^+,\ A \longmapsto \varphi(A) = A^2 \text{ n'est pas croissante}}$$

2.b. D'après le Cours, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_n^2 & \longrightarrow & \mathbf{M}_n \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$ est continue, donc l'application $\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_n & \longrightarrow & \mathbf{M}_n \\ A & \longmapsto & A^2 \end{array}$ est continue, puis, par restriction, l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{S}_n^+ & \longrightarrow & \mathbf{S}_n^+ \\ A & \longmapsto & A^2 \end{array}$ est continue.

V Racine carrée d'une matrice symétrique positive

1.a. Soit $S \in \mathbf{S}_n^+$.

• Existence :

D'après le théorème spectral, il existe $U \in \mathbf{O}_n, D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{D}_n$ telles que $S = UDU^{-1}$. Comme $S \in \mathbf{S}_n^+$, d'après III 3., on a : $\forall i \in \{1, ..., n\},\ \lambda_i \geqslant 0$. Considérons $\varDelta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ et $R = U\varDelta U^{-1}$. On a alors :

$$R^2 = (U\varDelta U^{-1})^2 = U\varDelta^2 U^{-1} = UDU^{-1} = S$$

$${}^{\mathrm{t}}R = {}^{\mathrm{t}}(U\varDelta U^{-1}) = {}^{\mathrm{t}}U^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\varDelta\,{}^{\mathrm{t}}U = U\varDelta U^{-1} = R \quad \text{et} \quad \operatorname{Sp}(R) = \left\{\sqrt{\lambda_i}\,;\, 1 \leqslant i \leqslant n\right\} \subset \mathbb{R}_+,$$

donc, d'après III 3., $R \in \mathbf{S}_n^+$

• Unicité :

Soient $R_1, R_2 \in \mathbf{S}_n^+$ telles que $R_1^2 = S$ et $R_2^2 = S$. On a $R_1 - R_2 \in \mathbf{S}_n$. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(R_1 - R_2)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}$ tel que : $(R_1 - R_2)X = \lambda X$ et $X \neq 0$. On a alors, en prémultipliant par R_1 ou par R_2 :

$$\begin{cases} R_1^2 X - R_1 R_2 X = \lambda R_1 X \\ R_2 R_1 X - R_2^2 X = \lambda R_2 X, \end{cases}$$

d'où, en additionnant, puis en prémultipliant par ${}^{\mathrm{t}}X$:

$${}^{\mathrm{t}}X(R_2R_1 - R_1R_2)X = \lambda({}^{\mathrm{t}}XR_1X + {}^{\mathrm{t}}XR_2X).$$

Mais :

$${}^{\mathrm{t}}\big({}^{\mathrm{t}}X(R_2R_1 - R_1R_2)X\big) = {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}(R_2R_1 - R_1R_2)X = {}^{\mathrm{t}}X(R_1R_2 - R_2R_1)X = -\,{}^{\mathrm{t}}X(R_2R_1 - R_1R_2)X,$$

d'où ${}^{\mathrm{t}}X(R_1R_2 - R_2R_1)X = 0$.

Ceci revient à remarquer que la matrice $R_1R_2 - R_2R_1$ est antisymétrique.
On déduit :

$$\lambda({}^{\mathrm{t}}XR_1X + {}^{\mathrm{t}}XR_2X) = 0.$$

Si $\lambda \neq 0$, alors ${}^{\mathrm{t}}XR_1X + {}^{\mathrm{t}}XR_2X = 0$, puis, comme $R_1, R_2 \in \mathbf{S}_n^+$, ${}^{\mathrm{t}}XR_1X = 0$ et ${}^{\mathrm{t}}XR_2X = 0$, d'où :

$$\lambda||X||_2^2 = \lambda\,{}^{\mathrm{t}}XX = {}^{\mathrm{t}}X(R_1 - R_2)X = {}^{\mathrm{t}}XR_1X - {}^{\mathrm{t}}XR_2X = 0,$$

donc $\lambda = 0$, contradiction.

Ceci montre que $R_1 - R_2$ est diagonalisable (car symétrique réelle) et n'a que 0 pour valeur propre, donc $R_1 - R_2 = 0$, $R_1 = R_2$, d'où l'unicité.

1.b. Soit $S \in \mathbf{S}_n^{++}$. Notons $R = S^{1/2}$. On a déjà $R \in \mathbf{S}_n^+$. De plus :

$$\big(\det(R)\big)^2 = \det(R^2) = \det(S).$$

Comme $S \in \mathbf{S}_n^{++} = \mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n$, on a $\det(S) \neq 0$, puis $\det(R) \neq 0$, donc $R \in \mathbf{GL}_n$, et ainsi $R \in \mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n = \mathbf{S}_n^{++}$.

1.c. Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^+$. On a, en utilisant l'unicité de la racine carrée dans $\mathbf{S}_n^+$:

$$A + A^2 = B + B^2 \iff \Big(A + \frac{1}{2}\mathrm{I}_n\Big)^2 = \Big(B + \frac{1}{2}\mathrm{I}_n\Big)^2 \iff A + \frac{1}{2}\mathrm{I}_n = B + \frac{1}{2}\mathrm{I}_n \iff A = B.$$

1.d. Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^+$. Notons $R = A^{1/2}$, $S = B^{1/2}$. On a :

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(R^2S^2) = \mathrm{tr}\,\big(R(RS)S\big) = \mathrm{tr}\,\big((RS)(SR)\big) = \mathrm{tr}\,\big({}^{\mathrm{t}}(SR)(SR)\big) = ||SR||_2^2 \geqslant 0.$$

1.e. Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^+$ telles que $A \leqslant B$. Notons $H = B - A \in \mathbf{S}_n^+$. On a :

$$\mathrm{tr}\,(B^2) - \mathrm{tr}\,(A^2) = \mathrm{tr}\,\big((A+H)^2\big) - \mathrm{tr}\,(A^2) = \mathrm{tr}\,(A^2 + AH + HA + H^2) - \mathrm{tr}\,(A^2) = 2\,\mathrm{tr}\,(AH) + \mathrm{tr}\,(H^2).$$

Puisque $A, H \in \mathbf{S}_n^+$, d'après V 1.d., on a : $\mathrm{tr}\,(AH) \geqslant 0$ et $\mathrm{tr}\,(H^2) \geqslant 0$. On conclut : $\mathrm{tr}\,(A^2) \leqslant \mathrm{tr}\,(B^2)$.

1.f. Cherchons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de façon que : $\big(W(a,b)\big)^2 = W(1,1)$. On a :

$$\big(W(a,b)\big)^2 = (a\mathrm{I}_n + bW)^2 = a^2\mathrm{I}_n + 2abW + b^2W^2 = a^2\mathrm{I}_n + (2ab + nb^2)W,$$

d'où :

$$\big(W(a,b)\big)^2 = W(1,1) \Longleftarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab + nb^2 = 1 \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{-1 + \sqrt{1+n}}{n}, \end{cases}$$

et $a = 1 \geqslant 0$ et $a + nb = \sqrt{1+n} \geqslant 0$, donc, d'après III 3., $W(a,b) \in \mathbf{S}_n^+$.

On conclut :

$$\boxed{\big(W(1,1)\big)^{1/2} = W\Big(1, \frac{\sqrt{1+n} - 1}{n}\Big)}$$

2. Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^+$ telles que $A \leqslant B$. Notons $R = A^{1/2}$, $S = B^{1/2}$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(S - R)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}$ telle que $(S - R)X = \lambda X$ et $X \neq 0$. On a :

$${}^{\mathrm{t}}X(S+R)(S-R)X = {}^{\mathrm{t}}X(S+R)\lambda X = \lambda({}^{\mathrm{t}}XSX + {}^{\mathrm{t}}XRX),$$

et :

$${}^{\mathrm{t}}X(S+R)(S-R)X = {}^{\mathrm{t}}X(S^2 + RS - SR - R^2)X = {}^{\mathrm{t}}X(B-A)X + {}^{\mathrm{t}}X(RS - SR)X.$$

Comme plus haut (solution de V 1.a.), puisque $RS - SR$ est antisymétrique, on a ${}^{\mathrm{t}}X(RS - SR)X = 0$. On obtient :

$${}^{\mathrm{t}}X(B-A)X = \lambda({}^{\mathrm{t}}XRX + {}^{\mathrm{t}}XSX).$$

Comme $R, S, B - A$ sont dans $\mathbf{S}_n^+$, on a :

$${}^{\mathrm{t}}X(B-A)X \geqslant 0, \quad {}^{\mathrm{t}}XRX \geqslant 0, \quad {}^{\mathrm{t}}XSX \geqslant 0.$$

Si ${}^{\mathrm{t}}XRX + {}^{\mathrm{t}}XSX > 0$, alors $\lambda = \dfrac{{}^{\mathrm{t}}X(B-A)X}{{}^{\mathrm{t}}XRX + {}^{\mathrm{t}}XSX} \geqslant 0$.
Si ${}^{\mathrm{t}}XRX + {}^{\mathrm{t}}XSX = 0$, alors ${}^{\mathrm{t}}XRX = {}^{\mathrm{t}}XSX = 0$, d'où :

$$\lambda ||X||_2^2 = \lambda\, {}^{\mathrm{t}}XX = {}^{\mathrm{t}}X(S-R)X = {}^{\mathrm{t}}XSX - {}^{\mathrm{t}}XRX = 0 - 0 = 0,$$

et donc $\lambda = 0$.

Ceci montre que la matrice $S - R$, qui est diagonalisable car symétrique réelle, n'a que 0 pour valeur propre, donc est la matrice nulle, et $R = S$.

On conclut que l'application ψ est croissante.

3.a. Soient $S \in \mathbf{S}_n^+$, $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbf{S}_n^+$ convergeant vers S. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R_k = S_k^{1/2}$.
Puisque $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad ||S_k||_2 \leqslant M.$$

On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$||R_k||_2^2 = \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}R_kR_k) = \mathrm{tr}\,(R_k^2) = \mathrm{tr}\,(S_k) = \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}\mathrm{I}_nS_k) \leqslant \big(\mathrm{tr}\,(\mathrm{I}_n^2)\big)^{1/2}\big(\mathrm{tr}\,(S_k^2)\big)^{1/2} = \sqrt{n}\,||S_k||_2 \leqslant \sqrt{n}\,M,$$

ce qui montre que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Puisque $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbf{M}_n$ qui est un espace vectoriel de dimension finie, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice σ et $R \in \mathbf{M}_n$ tels que : $R_{\sigma(k)} \underset{k\infty}{\longrightarrow} R$.

Comme $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $R_k \in \mathbf{S}_n^+$ et que $\mathbf{S}_n^+$ est fermé dans $\mathbf{M}_n$, on a : $R \in \mathbf{S}_n^+$.
D'autre part, comme $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $(R_{\sigma(k)})^2 = S_{\sigma(k)}$ et que $R_{\sigma(k)} \underset{k\infty}{\longrightarrow} R$ et $S_{\sigma(k)} \underset{k\infty}{\longrightarrow} S$, on déduit, par passage à la limite, $R^2 = S$, puis, par unicité de la racine carrée dans $\mathbf{S}_n^+$, $R = S^{1/2}$.
Ceci montre que la suite bornée $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence et une seule, qui est R, donc (exercice classique de compacité) : $R_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} R$.

On a montré que, pour toute suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{S}_n^+$ convergeant vers S, la suite $(S_k^{1/2})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $S^{1/2}$. D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on conclut :

$$\boxed{\text{L'application } \psi : \mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathbf{S}_n^+,\ S \longmapsto \psi(S) = S^{1/2} \text{ est continue}}$$

3.b. Puisque φ est continue, bijective et que sa réciproque ψ est continue, φ est un homéomorphisme de $\mathbf{S}_n^+$ sur lui-même.

VI Décomposition polaire d'une matrice carrée

1.Soit $M \in \mathbf{GL}_n$.

Existence

D'après III 2.a. (8), on a : ${}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^{++}$.
D'après V 1.b., il existe $S \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que : ${}^{\mathrm{t}}MM = S^2$.
Comme $S \in \mathbf{S}_n^{++} = \mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n$, S est inversible. Notons $U = MS^{-1} \in \mathbf{M}_n$. On a :

$${}^{\mathrm{t}}UU = {}^{\mathrm{t}}(MS^{-1})MS^{-1} = {}^{\mathrm{t}}S^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}MMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = \mathrm{I}_n,$$

donc $U \in \mathbf{O}_n$.
Ceci montre qu'il existe $U \in \mathbf{O}_n, S \in \mathbf{S}_n^{++}$ telles que $M = US$.

Unicité

Soit $(U,S)\in\mathbf{O}_n\times\mathbf{S}_n^{++}$ tel que $M=US$. On a alors :

$$^{\mathrm{t}}MM={}^{\mathrm{t}}(US)(US)={}^{\mathrm{t}}S\,{}^{\mathrm{t}}UUS=S({}^{\mathrm{t}}UU)S=S\mathrm{I}_nS=S^2.$$

Puisque $S\in\mathbf{S}_n^{++}$ et $S^2={}^{\mathrm{t}}MM$, par unicité de la racine carrée dans $\mathbf{S}_n^{+}$, il y a unicité de S.
Ensuite, $U=MS^{-1}$ est unique.

2.a. Le polynôme caractéristique χ de M :

$$\chi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad t\longmapsto\chi(t)=\det(M-t\mathrm{I}_n)$$

est un polynôme de degré n, donc admet au plus n zéros réels, parmi lesquels il peut y avoir ou pas le réel 0. Il existe donc $\eta>0$ tel que :

$$\forall\, t\in\,]0\,;\eta[,\quad \chi(t)\neq 0.$$

Il existe ensuite $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $0<\dfrac{1}{N}<\eta$. Considérons, pour tout $k\in\mathbb{N}$: $M_k=M-\dfrac{1}{k+N}\mathrm{I}_n$.
On a alors : $\forall\, k\in\mathbb{N},\quad M_k\in\mathbf{GL}_n\;$ et $\;M_k\underset{k\infty}{\longrightarrow}M$.

D'après 1., pour chaque $k\in\mathbb{N}$, il existe $(U_k,S_k)\in\mathbf{O}_n\times\mathbf{S}_n^{++}$ tel que $M_k=U_kS_k$. Autrement dit, il existe une suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{O}_n$ et une suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{S}_n^{++}$ telles que :

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad M_k=U_kS_k.$$

2.b. • $\mathbf{O}_n$ est l'image réciproque du singleton $\{\mathrm{I}_n\}$, qui est fermé, par l'application continue $\begin{array}{rcl}\mathbf{M}_n&\longrightarrow&\mathbf{M}_n\\ M&\longmapsto&{}^{\mathrm{t}}MM\end{array}$,
donc $\mathbf{O}_n$ est fermé.

• Pour toute $U=(u_{ij})_{ij}\in\mathbf{O}_n$, on a : $\quad\forall\, i\in\{1,...,n\},\;\; \displaystyle\sum_{j=1}^{n}u_{ij}^2=1,$

donc :

$$\forall\, i\in\{1,...,n\},\ \forall\, j\in\{1,...,n\},\quad |u_{ij}|\leqslant 1,$$

et donc $||U||_\infty\leqslant 1$, ce qui montre que $\mathbf{O}_n$ est borné, pour $||.||_\infty$, donc aussi pour $||.||_2$, puisque, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Puisque $\mathbf{O}_n$ est fermé borné dans $\mathbf{M}_n$ qui est de dimension finie, $\mathbf{O}_n$ est compact.

2.c. Puisque $\mathbf{O}_n$ est compact, la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbf{O}_n$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathbf{O}_n$. Il existe donc une extractrice σ et $U\in\mathbf{O}_n$ tels que : $U_{\sigma(k)}\underset{k\infty}{\longrightarrow}U$.

On a :

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad S_k=M_kU_k^{-1}$$

donc :

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad S_{\sigma(k)}=M_{\sigma(k)}U_{\sigma(k)}^{-1}.$$

Puisque $M_k\underset{k\infty}{\longrightarrow}M$, par suite extraite, $M_{\sigma(k)}\underset{k\infty}{\longrightarrow}M$. Ensuite, par continuité du produit et de la prise d'inverse matriciel, on a :

$$S_{\sigma(k)}=M_{\sigma(k)}U_{\sigma(k)}^{-1}\underset{k\infty}{\longrightarrow}MU^{-1}.$$

Notons $S=U^{-1}M$. On a : $US=U(U^{-1}M)=M$ et $U\in\mathbf{O}_n$.
De plus : $\forall\, k\in\mathbb{N},\quad S_{\sigma(k)}\in\mathbf{S}_n^{++}\subset\mathbf{S}_n^{+},\quad S_{\sigma(k)}\underset{k\infty}{\longrightarrow}S\;$ et $\;\mathbf{S}_n^{+}$ est fermé dans $\mathbf{M}_n$, donc : $S\in\mathbf{S}_n^{+}$.

Finalement, il existe $(U,S)\in\mathbf{O}_n\times\mathbf{S}_n^{+}$ tel que : $M=US$.

3.a. • Soit $X \in \mathbf{M}_n$, $X = US$ une décomposition polaire de X, $U \in \mathbf{O}_n$, $S \in \mathbf{S}_n^+$. On a :

$$^{\mathrm{t}}XX = C \iff {}^{\mathrm{t}}(US)US = C \iff {}^{\mathrm{t}}S({}^{\mathrm{t}}UU)S = C \iff S^2 = C \iff S = C^{1/2}.$$

Donc :

$$\boxed{\{X \in \mathbf{M}_n\,;\ {}^{\mathrm{t}}XX = C\} = \{UC^{1/2}\,;\, U \in \mathbf{O}_n\}}$$

• Supposons $C \in \mathbf{S}_n^{++}$ et $n \geqslant 2$.

D'après le résultat précédent, l'application $f : U \longmapsto UC^{1/2}$ est une surjection de $\mathbf{O}_n$ sur l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de ${}^{\mathrm{t}}XX = C$ dans $\mathbf{M}_n$. De plus, f est injective car $C \in \mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n$ donc C est inversible, $C^{1/2}$ est aussi inversible. Et il est clair que, pour $n \geqslant 2$, $\mathbf{O}_n$ est infini car, par exemple, $\mathbf{O}_n$ contient les matrices de rotation.

Il s'ensuit, par bijection, que l'ensemble $\mathcal{S}$ est infini.

3.b. Notons $R = S^{1/2} \in \mathbf{S}_n^{++}$ et $Y = RX$. On a :

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{t}}XSX + {}^{\mathrm{t}}XA + {}^{\mathrm{t}}AX + B = 0 \quad &\iff \quad {}^{\mathrm{t}}YR^{-1}R^2R^{-1}Y + {}^{\mathrm{t}}(R^{-1}Y)A + {}^{\mathrm{t}}A(R^{-1}Y) + B = 0 \\
&\iff \quad {}^{\mathrm{t}}YY + {}^{\mathrm{t}}YR^{-1}A + {}^{\mathrm{t}}AR^{-1}Y + B = 0 \\
&\iff \quad \Big({}^{\mathrm{t}}Y + \frac{1}{2}\,{}^{\mathrm{t}}AR^{-1}\Big)\Big(Y + \frac{1}{2}R^{-1}A\Big) - \frac{1}{4}\,{}^{\mathrm{t}}AR^{-2}A + B = 0 \\
&\iff \quad {}^{\mathrm{t}}\Big(Y + \frac{1}{2}R^{-1}A\Big)\Big(Y + \frac{1}{2}R^{-1}A\Big) = C,
\end{aligned}$$

où on a noté $C = \dfrac{1}{4}\,{}^{\mathrm{t}}AR^{-2}A - B = \dfrac{1}{4}\,{}^{\mathrm{t}}AS^{-1}A - B$.

Si $C \notin \mathbf{S}_n^+$, alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation proposée est vide.

Si $C \in \mathbf{S}_n^+$, d'après 3.a., il existe des solutions en Y, donc des solutions en X.

On conclut :

$$\boxed{\text{L'équation proposée admet au moins une solution si et seulement si : } \frac{1}{4}\,{}^{\mathrm{t}}AS^{-1}A - B \in \mathbf{S}_n^+}$$

3.c. Puisque $C \in \mathbf{S}_n^+ - \{0\} \subset \mathbf{S}_n^+$, il existe $R \in \mathbf{S}_n^+$ telle que $R^2 = C$.

Cherchons un couple (X, Y) solution de la forme (aR, bR), $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$${}^{\mathrm{t}}(aR)aR + {}^{\mathrm{t}}(bR)bR = C \iff (a^2 + b^2)C = C \iff a^2 + b^2 = 1,$$

car $C \neq 0$.

L'application

$$g : [0\,; 2\pi[\longrightarrow \mathbf{M}_n^2,\ \theta \longmapsto g(\theta) = (\cos\theta R, \sin\theta R)$$

est injective et son image est incluse dans l'ensemble des solutions de l'équation proposée.

On conclut :

$$\boxed{\text{L'équation proposée admet une infinité de solutions}}$$

VII Calcul d'une borne supérieure

1) Soit $(X,Y) \in \mathbf{M}_n^2$ tel que ${}^{\mathrm{t}}XX + {}^{\mathrm{t}}YY = \mathrm{I}_n$.
On a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\big(\mathrm{tr}\,(X)\big)^2 = < \mathrm{I}_n \,|\, X >^2 \leqslant ||\mathrm{I}_n||_2^2 \, ||X||_2^2 = n \,\mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}XX),$$

et de même : $\big(\mathrm{tr}\,(Y)\big)^2 \leqslant n \,\mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}YY)$.
D'autre part :

$$\forall\,(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad (a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2),$$

comme on le voit en développant.
D'où :

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{tr}\,(X) + \mathrm{tr}\,(Y)\big)^2 \leqslant 2\Big(\big(\mathrm{tr}\,(X)\big)^2 + \big(\mathrm{tr}\,(Y)\big)^2\Big) &\leqslant 2n\big(\mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}XX) + \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}YY)\big)\\ &= 2n\mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}XX + {}^{\mathrm{t}}YY) = 2n\mathrm{tr}\,(\mathrm{I}_n) = 2n^2.\end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\mathrm{tr}\,(X) + \mathrm{tr}\,(Y) \leqslant \sqrt{2}\,n.$$

2) Pour $X = Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{I}_n$, on a :

$${}^{\mathrm{t}}XX + {}^{\mathrm{t}}YY = \frac{1}{2}\,\mathrm{I}_n + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$$

et

$$\mathrm{tr}\,(X) + \mathrm{tr}\,(Y) = \frac{1}{\sqrt{2}}n + \frac{1}{\sqrt{2}}n = \sqrt{2}\,n.$$

On conclut :

$$\boxed{\text{La borne supérieure demandée est égale à } \sqrt{2}\,n}$$

****